MATHÉMATIQUES

Algèbre et analyse

Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés

Stéphane Balac
Frédéric Sturm

1er Cycle

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Copyrighted material

Copyrighted material

Algèbre et analyse

Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés

This One
JKZR-NAY-DXBH
Copyrighted material

Copyrighted material

Collection des sciences appliquées de l'INSA de Lyon

Algèbre et analyse

Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés

Stéphane Balac
Frédéric Sturm

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Copyrighted material

La collection des Sciences appliquées de l'INSA de Lyon est dirigée par le professeur Bernard Balland.

Récentes parutions

Eléments de mathématiques discrètes
Louis Frécon

Modélisation cognitive et résolution de problèmes
Guy Caplat

Matériaux non cristallins et science du désordre
Jo Perez

Artificialisme
Jean-Pierre Micaëlli, Joëlle Forest

AGILE 2003 (Proceedings)
Michael Gould, Robert Laurini, Stéphane Coulondre, Eds

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne et de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, ainsi que d'autres universités et écoles d'ingénieurs francophones.
Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes,
EPFL – Centre Midi, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à ppur@epfl.ch,
par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

http://www.ppur.org

ISBN 2-88074-558-6
© 2003, Presses polytechniques et universitaires romandes,
CH – 1015 Lausanne.
Tous droits réservés.
Reproduction, même partielle, sous quelque forme
ou sur quelque support que ce soit,
interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.

Imprimé en Italie

Copyrighted material

Préface

L'accueil d'étudiants étrangers à l'INSA de Lyon dès la première année du cycle de formation d'ingénieur est un enrichissement pour tous. De manière originale, ce cours en est une parfaite illustration.

Ce livre est le fruit d'une longue réflexion et d'innombrables échanges d'idées entre enseignants. Il reflète également une large expérience de pratique pédagogique avec les étudiants.

Dans le cadre de la filière ASINSA qui accueille pour moitié des étudiants asiatiques (Chine, Vietnam, Inde, Malaisie, Thaïlande, Corée) et pour moitié des étudiants français, les équipes pédagogiques doivent sans cesse adapter leurs méthodes en restant dans le cadre des programmes institutionnels. Ces adaptations sont réalisées en concertation avec les différentes disciplines et ont pour objectif d'intégrer une pédagogie différenciée pour mieux répondre à l'étudiant français ou étranger. Ce cours est une parfaite illustration de cette démarche et s'adapte donc également à tout étudiant de Premier Cycle Universitaire.

Confrontés à d'autres cultures, y compris d'autres cultures scientifiques, Stéphane Balac et Frédéric Sturm ont réalisé un ouvrage adapté au plus grand nombre d'étudiants sans rien céder sur la rigueur du raisonnement. Nous avons tous à y gagner.

Denis FRIBOULET
Directeur de la filière ASINSA

Didier VRAY
Directeur Adjoint du Premier Cycle
chargé des filières internationales

Copyrighted material

Copyrighted material

Avant-propos

Ce *Cours de Mathématiques* correspond à l'enseignement que nous dispensons en première année du cycle préparatoire de l'INSA de Lyon dans la filière ASINSA.

La filière ASINSA est l'une des trois filières de premier cycle international de l'INSA de Lyon. Elle regroupe étudiants français et étudiants originaires de différents pays d'Asie (Chine, Corée, Inde, Malaisie, Thaïlande, Vietnam). Compte tenu de la grande diversité du niveau de maîtrise de la langue française et de la variété des acquis mathématiques des étudiants arrivant en première année, la nécessité de disposer d'un support de cours écrit pour l'enseignement des mathématiques nous est apparue plus qu'ailleurs indispensable. Ce document a vu le jour dans un premier temps sous forme de polycopiés. Encouragés par le Professeur Bernard Balland, nous avons souhaité le rendre accessible au plus grand nombre.

Le livre est divisé en 20 chapitres correspondant au programme d'algèbre et d'analyse de première année de la filière ASINSA. Ces chapitres sont regroupés en 5 grandes parties : ensembles numériques fondamentaux, polynômes et fractions rationnelles, algèbre linéaire, calcul différentiel et calcul intégral. Ils couvrent les notions généralement abordées en première année de tout premier cycle et ce livre pourra donc être utilisé avec profit par les étudiants des différents cycles préparatoires intégrés, les étudiants des DEUG scientifiques, les étudiants en formation continue, etc. Le livre débute par un chapitre traitant de la logique mathématique dont l'objet est de fournir les notions de base utilisées lors des raisonnements mathématiques ultérieurs. L'assimilation du contenu de ce chapitre n'est pas aisée et nous suggérons au lecteur de s'y référer tout au long de l'année afin d'acquérir une bonne maîtrise du raisonnement mathématique.

Nous nous sommes attachés à donner des définitions précises et à présenter des raisonnements rigoureux[1] sans toutefois chercher l'exhaustivité. Ainsi, certains résultats énoncés sont admis sans démonstration. D'une manière générale, les démonstrations « techniques » sont omises au profit des démonstrations pouvant améliorer la compréhension du résultat énoncé, illustrant l'utilisation de notions déjà introduites ou mettant en avant des idées ou méthodes susceptibles d'être réutilisées par la suite. Celles-ci sont soigneusement détaillées

[1] « Le danger dans le traitement mathématique d'un problème technique, c'est moins la faute de calcul, dont on finira toujours par s'apercevoir, que la légère faille dans le raisonnement qui conduira à des conclusions erronées. » A. Hocquenghem, P. Jaffard, R. Chenon, Mathématiques, collection du CNAM, Masson.

Copyrighted material

et commentées et une attention toute particulière a été apportée à leur rédaction. Par ailleurs, nous avons, dans la mesure du possible, cherché à motiver les notions introduites et à les illustrer par des exemples, des remarques et des mises en garde afin de rendre l'apprentissage plus dynamique. Chaque chapitre contient de courts exercices visant à tester la bonne compréhension des notions introduites. Il se termine par des exercices de synthèse qui font appel à la fois aux résultats présentés dans le chapitre concerné et aux notions acquises dans les chapitres antérieurs. Ces exercices sont souvent issus de devoirs et d'interrogations écrites et doivent permettre d'assimiler des méthodes de raisonnement et des techniques de calcul. Les exercices sont intégralement corrigés en fin de chaque chapitre. Nous avons tenu à apporter le plus grand soin à la rédaction de ces corrigés en y incluant tous les détails utiles à une bonne assimilation. Enfin, nous avons essayé de fournir quelques éléments biographiques sur les mathématiciens cités dans cet ouvrage à travers formules et théorèmes afin de mieux situer les résultats présentés dans leur contexte historique. [2]

Ce livre a fait l'objet d'une relecture attentive et a bénéficié des commentaires de Pascale Stéphan et d'Aimé Lachal, Professeurs Agrégés à l'INSA de Lyon, d'Éric Rannou, Maître de Conférences au Département de Mathématiques de l'Université de Bretagne Occidentale et de Jean-Marie Barbaroux, Maître de Conférences au Département de Mathématiques de l'Université de Toulon et du Var. Nous tenons à leur exprimer toute notre gratitude pour cet important travail. Il nous est également particulièrement agréable de remercier Didier Vray, Directeur Adjoint du Premier Cycle chargé des filières internationales, et Denis Friboulet, Directeur de la filière ASINSA, pour leur soutien et leurs encouragements à la rédaction de cet ouvrage. Pour l'accueil compréhensif et la confiance qui nous a été accordée, nous souhaitons enfin remercier Bernard Balland, Directeur de la Collection des Sciences Appliquées de l'INSA de Lyon, et Olivier Babel, Directeur des Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

Les auteurs recueilleront avec intérêt toute remarque ou suggestion concernant cet ouvrage.

Villeurbanne, juillet 2003

À Anna-Lise, à Caroline et Pierre

Stéphane BALAC, Frédéric STURM
Centre de Mathématiques
21 av. Capelle, INSA de Lyon
F-69621 Villeurbanne Cedex

[2] Nous signalons aux lecteurs curieux d'histoire des mathématiques le site *The MacTutor History of Mathematics archive* réalisé par John J. O'Connor et Edmund F. Robertson de l'Université de St-Andrew (Écosse) (`www-history.mcs.st-andrews.ac.uk`) ainsi que le site français *ChronoMath* (`www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath`) réalisé par Serge Mehl.

Copyrighted material

Table des matières

Préface v

Avant-propos vii

Table des matières ix

Préliminaires 1

1 Introduction à la logique mathématique 3

1.1 Assertion et prédicat 3

1.2 Les connecteurs logiques 4

1.2.1 Négation, conjonction, disjonction 5

1.2.2 Implication, équivalence 6

1.2.3 Propriétés 7

1.3 Les quantificateurs mathématiques 12

1.3.1 Quantificateurs simples 12

1.3.2 Quantificateurs multiples 15

1.4 Les différents modes de démonstration en mathématique 16

1.4.1 Raisonnement par hypothèse auxiliaire 16

1.4.2 Raisonnement par contraposée 17

1.4.3 Raisonnement par l'absurde 18

1.4.4 Raisonnement par contre-exemple 19

1.4.5 Raisonnement par récurrence 20

2 Structures fondamentales 23

2.1 Ensemble et sous-ensemble 23

2.1.1 Généralités sur les ensembles 23

2.1.2 Partie, sous-ensemble 25

2.1.3 Ensemble des parties d'un ensemble 26

2.1.4 Opérations sur les ensembles 27

2.1.5 Produit cartésien 31

Copyrighted material

2.2 Relation, fonction, application 33
2.2.1 Relation 33
2.2.2 Fonction 35
2.2.3 Application 36
2.2.4 Injection, surjection, bijection 41
2.2.5 Puissance du dénombrable, puissance du continu 50
2.2.6 Restriction et prolongement d'une application 52
2.2.7 Relation d'équivalence sur un ensemble 55
2.3 Structures algébriques élémentaires 56
2.3.1 Loi de composition interne 56
2.3.2 Structure de groupe 61
2.3.3 Structure d'anneau 63
2.3.4 Structure de corps 74
2.4 Exercices de synthèse 77
2.5 Solution des exercices 78

Ensembles numériques fondamentaux 85

3 Le corps des réels 87
3.1 Généralités 87
3.1.1 Le corps des rationnels 87
3.1.2 Relation d'ordre sur un ensemble 88
3.1.3 Bornes supérieure et inférieure 89
3.1.4 Les insuffisances du corps des rationnels 91
3.1.5 Le corps des réels 93
3.2 Propriétés des nombres réels 97
3.2.1 Propriétés calculatoires 97
3.2.2 La valeur absolue 102
3.2.3 Partie entière et racine **n**-ième 104
3.2.4 Propriétés fondamentales 107
3.3 Topologie de la droite réelle 109
3.3.1 Intervalles 109
3.3.2 Ensemble ouvert et ensemble fermé 110
3.3.3 Intérieur et adhérence d'un ensemble 111
3.3.4 La droite numérique achevée 112

Copyrighted material

3.4 Quelques notions sur la représentation des réels en machine . . 113
3.4.1 Quelques calculs déroutants 113
3.4.2 Représentation des nombres réels en machine 114
3.4.3 Opérations sur les nombres réels 114
3.5 Exercices de synthèse 116
3.6 Solution des exercices 117

4 Le corps des complexes 125
4.1 Structure de corps commutatif sur $\mathbb{R}^2$ 125
4.1.1 Première approche 125
4.1.2 Seconde approche 127
4.1.3 Structure de corps commutatif sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ 128
4.2 Le corps des nombres complexes 130
4.2.1 Définition de l'ensemble des nombres complexes 130
4.2.2 Conjugaison d'un nombre complexe 133
4.3 Module et argument 134
4.3.1 Module d'un nombre complexe 134
4.3.2 Argument d'un nombre complexe 136
4.3.3 Notation exponentielle complexe et forme polaire 138
4.3.4 Représentation géométrique 140
4.4 Racines d'un nombre complexe 142
4.4.1 Racines deuxièmes d'un nombre complexe 142
4.4.2 Calcul algébrique des racines d'un trinôme 145
4.4.3 Racines n-ièmes d'un nombre complexe 147
4.5 Application à la trigonométrie 154
4.5.1 Rappels des formules de trigonométrie 154
4.5.2 Développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ 157
4.5.3 Linéarisation de $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ 158
4.6 Solution des exercices 160

5 Suites numériques 167
5.1 Définitions et généralités 167
5.1.1 Convergence d'une suite numérique 168
5.1.2 Suites bornées 172
5.2 Propriétés 174
5.2.1 Propriétés algébriques pour les suites numériques 174

Copyrighted material

5.2.2 Autres propriétés algébriques pour les suites réelles . . . 175
5.2.3 Propriétés d'ordre pour les suites réelles 178
5.3 Monotonie 181
5.3.1 Suites réelles monotones 181
5.3.2 Suites adjacentes 185
5.4 Suites extraites 186
5.5 Suites de Cauchy 190
5.6 Suites usuelles 194
5.6.1 Suites arithmétiques et géométriques 194
5.6.2 Suites récurrentes 196
5.7 Limite supérieure et limite inférieure 197
5.8 Exercices de synthèse 198
5.9 Solution des exercices 200

Polynômes et fractions rationnelles 215

6 L'anneau des polynômes 217
6.1 Définition de l'ensemble des polynômes 217
6.1.1 Polynôme formel 217
6.1.2 Valuation et degré d'un polynôme 218
6.2 Structures algébriques sur les polynômes 219
6.2.1 Addition de polynômes 219
6.2.2 Multiplication d'un polynôme par un élément de $\mathbb{K}$ . . . 220
6.2.3 Multiplication de polynômes 221
6.2.4 Notion d'indéterminée 223
6.2.5 Fonction polynomiale 224
6.3 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ 224
6.3.1 Division euclidienne 224
6.3.2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$ 228
6.3.3 Division selon les puissances croissantes 230
6.4 Dérivation des polynômes 233
6.4.1 Définition d'un polynôme dérivé 233
6.4.2 Dérivées successives - formule de Taylor 235
6.5 Racines d'un polynôme 238
6.5.1 Définition d'une racine 238

Copyrighted material

6.5.2 Multiplicité d'une racine 241
6.5.3 Multiplicité d'une racine et polynômes dérivés 243
6.5.4 Relations entre coefficients et racines d'un polynôme . . 245
6.6 Étude des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$ 247
6.6.1 Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ 248
6.6.2 Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ 249
6.7 Exercices de synthèse 253
6.8 Solution des exercices 255

7 Le corps des fractions rationnelles 269
7.1 Les fractions rationnelles 269
7.1.1 Définition d'une fraction rationnelle 269
7.1.2 Racines et pôles d'une fraction rationnelle 273
7.2 Décomposition d'une fraction rationnelle 274
7.2.1 Partie entière d'une fraction rationnelle 274
7.2.2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ 275
7.2.3 Décomposition sur $\mathbb{C}$ 279
7.2.4 Décomposition sur $\mathbb{R}$ 280
7.3 Techniques de décomposition d'une fraction rationnelle 282
7.3.1 Cas d'un pôle simple 282
7.3.2 Cas d'un pôle multiple 283
7.3.3 Techniques de réduction du nombre des coefficients . . . 285
7.4 Exercices de synthèse 288
7.5 Solution des exercices 289

Algèbre linéaire 295

8 Les espaces vectoriels 297
8.1 Structure d'espace vectoriel 297
8.1.1 Définition d'un espace vectoriel 297
8.1.2 Principaux exemples d'espaces vectoriels 298
8.1.3 Propriétés élémentaires 302
8.1.4 Combinaison linéaire 303
8.2 Structure de sous-espace vectoriel 306
8.2.1 Définition d'un sous-espace vectoriel 306
8.2.2 Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels . . . 308

Copyrighted material

8.2.3 Sous-espace engendré par une famille finie 310
8.2.4 Propriétés 312
8.2.5 Sous-espace engendré par une famille infinie 316
8.3 Indépendance linéaire 317
8.3.1 Famille liée et famille libre 317
8.3.2 Base algébrique d'un espace vectoriel 323
8.4 Espace vectoriel de dimension finie 327
8.4.1 Définition d'un espace vectoriel de dimension finie . . . 327
8.4.2 Dimension d'un espace vectoriel 329
8.4.3 Rang d'une famille finie de vecteurs 332
8.4.4 La méthode des zéros échelonnés 333
8.5 Somme de sous-espaces vectoriels 338
8.5.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels 339
8.5.2 Cas d'un espace vectoriel de dimension finie 343
8.6 Exercices de synthèse 346
8.7 Solution des exercices 347

9 Les applications linéaires 355
9.1 Application linéaire 355
9.1.1 Définition d'une application linéaire 355
9.1.2 Propriétés 361
9.1.3 Endomorphismes particuliers 363
9.2 Image et noyau 364
9.2.1 Image d'une application linéaire 364
9.2.2 Noyau d'une application linéaire 365
9.3 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire . . 369
9.3.1 Image d'une famille génératrice 369
9.3.2 Image d'une famille libre 371
9.3.3 Image d'une base 371
9.4 Rang d'une application linéaire 375
9.4.1 Rang d'une application linéaire 375
9.4.2 Théorème du rang 376
9.4.3 Conséquences du théorème du rang 378
9.5 Exercices de synthèse 381
9.6 Solution des exercices 382

Copyrighted material

10 Les matrices **393**

10.1 Calcul matriciel 393

10.1.1 Définition d'une matrice 393

10.1.2 Opérations sur les matrices 396

10.1.3 Transposition de matrices 400

10.1.4 Cas particulier des matrices carrées 403

10.2 Matrices et applications linéaires 406

10.2.1 Matrice associée à une application linéaire 406

10.2.2 Écriture matricielle d'une égalité vectorielle 410

10.2.3 Application canoniquement associée à une matrice . . . 413

10.2.4 Propriétés 414

10.3 Rang d'une matrice rectangulaire 419

10.3.1 Définition du rang d'une matrice 419

10.3.2 Lien entre le rang d'une matrice et celui d'une application associée 421

10.3.3 Lien entre le rang d'une matrice et celui de sa transposée 423

10.4 Matrices carrées inversibles 425

10.4.1 Définition d'une matrice inversible 425

10.4.2 Propriétés 428

10.5 Changement de bases 433

10.5.1 Définition d'une matrice de passage 433

10.5.2 Propriétés des matrices de passage 434

10.5.3 Changement de bases pour un vecteur 437

10.5.4 Effet d'un changement de bases pour une application linéaire 440

10.5.5 Matrices équivalentes, matrices semblables 444

10.6 Exercices de synthèse 448

10.7 Solution des exercices 449

11 Systèmes d'équations linéaires **459**

11.1 Un outil pratique : le déterminant 459

11.1.1 Tel Monsieur Jourdain 459

11.1.2 Déterminant d'ordre 2 465

11.1.3 Déterminant d'ordre 3 467

11.1.4 Déterminant d'ordre n 472

11.1.5 Développement d'un déterminant suivant une colonne ou une ligne 481

Copyrighted material

11.1.6 Propriétés des déterminants 483
11.2 Généralités sur les systèmes d'équations linéaires 486
11.2.1 Définition 486
11.2.2 Interprétation matricielle 488
11.2.3 Interprétation vectorielle 489
11.3 Résolution d'un système de Cramer 493
11.3.1 Définition 493
11.3.2 Les formules de Cramer 494
11.4 Résolution d'un système d'équations linéaires 497
11.4.1 Compatibilité d'un système 497
11.4.2 Le théorème de Rouché-Fontené 498
11.4.3 Méthode d'élimination de Gauss 500
11.4.4 Illustration avec des exemples 503
11.5 Exercices de synthèse 507
11.6 Solution des exercices 508

12 Réduction des endomorphismes 515
12.1 Éléments propres d'un endomorphisme 515
12.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres 515
12.1.2 Caractérisation des valeurs propres 517
12.2 Sous-espaces propres 518
12.2.1 Définition 518
12.2.2 Somme de sous-espaces propres 519
12.3 Cas d'un espace de dimension finie 522
12.3.1 Écriture sous forme matricielle 523
12.3.2 Calcul des valeurs propres 523
12.3.3 Calcul des vecteurs propres 528
12.3.4 Illustration avec un exemple 531
12.4 Diagonalisation et trigonalisation 533
12.4.1 Diagonalisation d'un endomorphisme 533
12.4.2 Caractérisation de la diagonalisation en dimension finie 536
12.4.3 Trigonalisation d'un endomorphisme 541
12.4.4 Illustration avec un exemple 544
12.4.5 Complément : réduction de Jordan 547
12.5 Exercices de synthèse 550
12.6 Solution des exercices 551

Copyrighted material

Calcul différentiel 557

13 Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle 559
13.1 L'ensemble des applications de **D** dans $\mathbb{R}$ . . . 559
13.1.1 Propriétés algébriques . . . 559
13.1.2 Monotonicité, parité et périodicité . . . 562
13.1.3 Applications bornées . . . 565
13.2 Limites . . . 569
13.2.1 Définitions . . . 569
13.2.2 Propriétés . . . 575
13.2.3 Opérations algébriques sur les fonctions admettant une limite . . . 579
13.2.4 Limites usuelles . . . 586
13.3 Continuité . . . 588
13.3.1 Définitions et premières propriétés . . . 588
13.3.2 Opérations algébriques sur les applications continues . . . 593
13.3.3 Continuité sur un intervalle . . . 594
13.3.4 Continuité uniforme . . . 597
13.4 Étude des suites récurrentes . . . 600
13.5 La dichotomie ou l'art de couper en deux . . . 605
13.5.1 Principe de la méthode . . . 606
13.5.2 Étude de la convergence . . . 607
13.6 Exercices de synthèse . . . 608
13.7 Solution des exercices . . . 609

14 Fonctions usuelles 623
14.1 Application réciproque . . . 623
14.2 Fonctions logarithmes . . . 628
14.2.1 La fonction logarithme néperien . . . 628
14.2.2 La fonction logarithme de base a . . . 632
14.3 Fonctions exponentielles . . . 633
14.3.1 La fonction exponentielle . . . 633
14.3.2 La fonction exponentielle de base a . . . 636
14.4 Fonctions puissances . . . 637
14.5 Comparaison locale des fonctions logarithme, exponentielle et puissances . . . 640
14.6 Fonctions hyperboliques . . . 642

Copyrighted material

14.7 Fonctions circulaires réciproques 647
14.7.1 La fonction arc-sinus 647
14.7.2 La fonction arc-cosinus 651
14.7.3 La fonction arc-tangente 653
14.8 Fonctions hyperboliques réciproques 656
14.8.1 La fonction argument sinus hyperbolique 656
14.8.2 La fonction argument cosinus hyperbolique 659
14.8.3 La fonction argument tangente hyperbolique 660
14.9 Exercices de synthèse 662
14.10Solution des exercices 664

15 Comparaison locale de fonctions 683
15.1 Prépondérance et Domination 683
15.2 Équivalence 688
15.2.1 Définition et propriétés 688
15.2.2 Opérations sur les équivalents 691
15.2.3 Composition de fonctions équivalentes 695
15.2.4 Équivalents aux fonctions usuelles 698
15.2.5 Changement de variable 699
15.2.6 Application au calcul de limites 701
15.2.7 Suites équivalentes 702
15.3 Exercices de synthèse 704
15.4 Solution des exercices 704

16 Dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle 713
16.1 Dérivée d'une fonction réelle 713
16.1.1 Définitions 713
16.1.2 Dérivées des fonctions usuelles 717
16.1.3 Propriétés algébriques de la dérivée 718
16.1.4 Différentielle 723
16.1.5 Dérivées successives 725
16.2 Le théorème des accroissements finis 728
16.2.1 Le théorème de Rolle 729
16.2.2 Le théorème des accroissements finis 731
16.3 Applications du théorème des accroissements finis 734
16.3.1 Étude de la monotonie d'une fonction dérivable 734

Copyrighted material

16.3.2 Application à la recherche d'extremum 736
16.3.3 Étude de la convexité 737
16.3.4 La règle de L'Hôpital 742
16.3.5 Interpolation de Lagrange 744
16.4 La formule de Taylor-Lagrange 750
16.5 Applications de la formule de Taylor-Lagrange 754
16.5.1 Approximation polynomiale 754
16.5.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point 755
16.6 Exercices de synthèse 757
16.7 Solution des exercices 759

17 Développements limités 773
17.1 Définition et généralités 773
17.2 Le théorème de Taylor-Young 778
17.3 Opérations sur les développements limités 783
17.3.1 Opérations algébriques 784
17.3.2 Dérivation et primitivation d'un développement limité . 788
17.4 Extensions de la notion de développement limité 793
17.4.1 Développements limités à gauche ou à droite 794
17.4.2 Développement limité au voisinage d'un réel non nul . . 795
17.4.3 Développement limité au voisinage de l'infini 797
17.4.4 Développement limité d'une fonction non bornée 798
17.5 Applications 799
17.5.1 Application à la recherche d'équivalents 799
17.5.2 Application au calcul de limites 801
17.5.3 Étude des branches infinies 802
17.5.4 Étude des propriétés locales de la représentation graphique d'une application 808
17.6 Quelques notions sur les développements asymptotiques 809
17.6.1 Échelle de comparaison 809
17.6.2 Développement asymptotique 810
17.7 Plan d'étude d'une fonction 811
17.8 Exercices de synthèse 814
17.9 Solution des exercices 816

Copyrighted material

Calcul intégral 829

18 L'intégrale de Riemann 831

18.1 Intégrale d'une fonction en escalier 831
18.1.1 Fonction en escalier 831
18.1.2 Intégrale d'une fonction en escalier 833
18.2 Intégrale de Riemann 836
18.2.1 Définition 836
18.2.2 Principaux exemples de fonctions Riemann intégrables . 842
18.2.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann 844
18.3 Intégrales indéfinies et primitives 847
18.3.1 Intégrales indéfinies 847
18.3.2 Primitives 850
18.3.3 Liste des primitives usuelles 852
18.3.4 Formule de primitivation par parties 855
18.3.5 Formules de changement de variable pour une primitive 855
18.4 Résultats généraux sur l'intégrale de Riemann 860
18.4.1 Intégration par parties 860
18.4.2 Formule du changement de variable pour une intégrale . 863
18.4.3 Sommes de Riemann 868
18.4.4 Formules de la moyenne 871
18.4.5 Formule de Taylor à reste intégral 873
18.5 Méthodes de calcul de primitives 874
18.5.1 Intégration d'une fonction rationnelle 874
18.5.2 Intégration d'une fonction rationnelle en $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \mathrm{e}^x$ . . 879
18.5.3 Intégration d'une fonction rationnelle en $\sin x, \cos x, \tan x$ 880
18.5.4 Intégration d'une fonction rationnelle à radical du second degré 881
18.6 Intégration numérique 883
18.6.1 Principe des méthodes d'intégration numérique 884
18.6.2 Formules de quadrature 885
18.6.3 Méthodes composites d'intégration numérique 888
18.6.4 Convergence des méthodes d'intégration 890
18.7 Exercices de synthèse 896
18.8 Solution des exercices 898

Copyrighted material

19 L'intégrale généralisée **917**

19.1 Définitions 917

19.2 Calcul des intégrales généralisées 922

19.2.1 Formule de changement de variable 922

19.2.2 Intégration par parties 925

19.2.3 Exemples de référence 927

19.3 Critères de convergence 928

19.3.1 Remarques préliminaires 928

19.3.2 Critère de Cauchy 930

19.3.3 Critères de convergence pour les fonctions positives . . . 932

19.4 Convergence absolue 938

19.5 Semi-convergence 940

19.6 Exercices de synthèse 941

19.7 Solution des exercices 943

20 Équations différentielles linéaires **957**

20.1 Définitions et terminologie 957

20.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre 959

20.2.1 Normalisation d'une équation différentielle 959

20.2.2 Équations différentielles homogènes 961

20.2.3 Équations différentielles non homogènes 963

20.2.4 Étude d'un exemple 970

20.2.5 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients complexes constants 977

20.3 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants 979

20.3.1 Généralités 980

20.3.2 Systèmes différentiels homogènes 981

20.3.3 Systèmes différentiels non homogènes 987

20.3.4 Équations différentielles linéaires d'ordre **n** à coefficients constants 992

20.4 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants 993

20.4.1 Équations différentielles homogènes 994

20.4.2 Équation différentielle non homogène 997

20.5 Exercices de synthèse 998

20.6 Solution des exercices 999

Copyrighted material

Bibliographie **1013**

Index **1015**

Copyrighted material

Première partie

Préliminaires

Copyrighted material

Copyrighted material

Chapitre 1

Introduction à la logique mathématique

Au départ de toute théorie mathématique, se trouve un petit nombre d'énoncés que l'on pose comme vrais *a priori* (on les appelle des **axiomes**), à partir desquels se déduisent d'autres résultats mathématiques, ce qui permet d'enrichir les énoncés considérés comme vrais de la théorie en question. Un résultat mathématique qui mérite d'être retenu est en général qualifié de ***proposition***. D'ailleurs, suivant son importance dans le cadre d'une théorie donnée, il pourra aussi être qualifié de :

- ***lemme*** : résultat d'une importance mineure, apparaissant en général en préambule de résultats plus importants,
- ***théorème*** : résultat d'une importance majeure.

Notons qu'un résultat est qualifié de ***corollaire*** à un autre résultat si sa démonstration découle directement du résultat mathématique dont il est le corollaire. Un énoncé qui définit un nouvel objet mathématique s'appelle une ***définition***.

Un résultat mathématique est donc un enoncé vrai que l'on peut déduire d'axiomes ou d'autres résultats mathématiques en s'appuyant sur des règles strictes de logique.

Le but de ce premier chapitre est de préciser certaines règles de logique sur lesquelles nous nous appuierons pour justifier les raisonnements utilisés dans nos démonstrations.

1.1 Assertion et prédicat

Définition 1.1 *Une* **assertion** *est un énoncé auquel on peut attribuer la valeur de vérité*

$$\textit{vrai}\ (\mathrm{V}) \quad \textit{ou} \quad \textit{faux}\ (\mathrm{F}),$$

mais jamais les deux à la fois. C'est le ***principe du tiers-exclu***.

Il est d'usage de noter une assertion en utilisant une lettre majuscule (par exemple P, Q, R).

Copyrighted material

Exemples

1. « Paris est la capitale de la France » est une assertion vraie.

2. L'assertion « 24 est un multiple de 2 » est vraie et « 19 est un multiple de 2 » est une assertion fausse.

Les énoncés que nous rencontrons le plus souvent sont d'une nature plus générale. Par exemple, considérons un entier naturel n. On ne peut pas dire si l'énoncé « n est un multiple de 2 » est vrai ou faux puisque sa valeur de vérité dépend de l'entier n. Par conséquent, l'énoncé « n est un multiple de 2 » n'est pas une assertion. On dit que c'est un prédicat.

Définition 1.2 *On appelle* ***prédicat*** *un énoncé contenant des lettres appelées* ***variables*** *tel que quand on remplace chacune de ces variables par un élément d'un ensemble donné, on obtienne une assertion.*

Un prédicat contenant la variable x sera noté $P(x)$ pour marquer la dépendance de sa valeur de vérité par rapport à la variable x considérée. Il est clair qu'une assertion peut s'interpréter comme un prédicat sans variable, c'est-à-dire comme un prédicat toujours vrai ou toujours faux, ce qui nous autorise à ne faire référence par la suite qu'à la notion de prédicat, englobant ainsi celle d'assertion.

Exemples

1. Comme nous l'avons mentionné, l'énoncé $P(n)$ défini par

$$\text{« } n \text{ est un multiple de 2 »}$$

est un prédicat. Il devient une assertion quand on donne une valeur entière à n. Par exemple,

- l'assertion $P(10)$ définie par « 10 est un multiple de 2 » obtenue en remplaçant n par 10 est vraie ;
- l'assertion $P(11)$ définie par « 11 est un multiple de 2 » obtenue en remplaçant n par 11 est fausse.

2. L'énoncé $P(x, A)$ défini par « $x \in A$ » est un prédicat à deux variables. On obtient par exemple les assertions

$$P(1, \mathbb{N}) \qquad \text{et} \qquad P(1/2, \mathbb{Z})$$

à partir du prédicat $P(x, A)$. Il est clair que $P(1, \mathbb{N})$ est une assertion vraie et que $P(1/2, \mathbb{Z})$ est une assertion fausse.

1.2 Les connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent à partir de prédicats P, Q, R, ... de créer de nouveaux prédicats dits ***prédicats composés*** dont on peut déterminer la valeur de vérité à partir des valeurs de vérité de P, Q, R, ... Les cinq ***connecteurs*** logiques usuels sont « non », « et », « ou », « $\Longrightarrow$ » et « $\Longleftrightarrow$ ».

Copyrighted material

1.2.1 Négation, conjonction, disjonction

Définition 1.3 *La* ***négation*** *du prédicat P est le prédicat noté* non(P)*, qui est vrai lorsque P est faux, et est faux lorsque P est vrai.*

Il est d'usage de présenter les valeurs de vérité de non(P) en fonction des valeurs de vérité de P dans un tableau appelé ***table de vérité***. Pour le connecteur logique « non », on obtient la table de vérité suivante :

P	non(P)
V	F
F	V

Exemples

1. Considérons le prédicat P défini par « 24 est un multiple de 2 ». Il s'agit d'une assertion vraie. Sa négation est « 24 n'est pas un multiple de 2 ». Il s'agit donc d'une assertion fausse.

2. À partir du prédicat « $x \in A$ », on définit le prédicat « non $(x \in A)$ » qui s'écrit « $x \notin A$ ». Par exemple, l'assertion « $1/2 \notin \mathbb{Z}$ » est vraie car l'assertion « $1/2 \in \mathbb{Z}$ » est fausse.

3. De même, à partir du prédicat $P(E)$ défini par

« E est un ensemble ayant un nombre infini d'éléments »,

on définit le prédicat non$\big(P(E)\big)$. Il est donné par

« E est un ensemble ayant un nombre fini d'éléments ».

Définition 1.4 *Soient P et Q deux prédicats.*

✗ *Le prédicat « P et Q », appelé* ***conjonction de P et de Q****, est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément, et faux dans tous les autres cas. On le note aussi « $P \wedge Q$ ».*

✗ *Le prédicat « P ou Q », appelé* ***disjonction de P et de Q****, est un prédicat qui est vrai lorsque l'un au moins des deux prédicats P et Q est vrai, et faux lorsque les deux sont faux. On le note aussi « $P \vee Q$ ».*

Les tables de vérité des deux connecteurs logiques « et », et « ou » ainsi définis sont donc

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Copyrighted material

Il est à noter que le « ou » du langage courant a un sens exclusif, ce qui traduit l'alternative entre P et Q : ou bien P est vraie (et Q est fausse), ou bien Q est vraie (et P fausse), mais P et Q ne peuvent être vrais simultanément. En revanche, le « ou » logique n'est pas exclusif.

Exemples

1. Le prédicat P défini par « 10 est divisible par 2 » (c'est une assertion) est vrai. Le prédicat Q défini par « 10 est divisible par 3 » (c'est aussi une assertion) est faux. Ainsi, « P et Q » (c'est encore une assertion) est faux. En revanche, « P ou Q » est vrai.

2. On considère le prédicat $P(x)$ défini par « $x \leqslant 1$ » et le prédicat $Q(x)$ défini par « $x \geqslant 2$ » où x désigne un nombre réel. Alors, le prédicat « $P(x)$ ou $Q(x)$ » est défini par

$$\text{« } x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2 \text{ ».}$$

Il est vrai si $x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ et faux si $x \in]1, 2[$. En revanche, le prédicat « $P(x)$ et $Q(x)$ » défini par

$$\text{« } x \leqslant 1 \text{ et } x \geqslant 2 \text{ »}$$

est faux pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.2.2 Implication, équivalence

Définition 1.5 *Soient P et Q deux prédicats.*

✗ *Le prédicat « $P \implies Q$ » appelé* **implication de P vers Q**, *et on lit « P implique Q » ou encore « P entraîne Q », est un prédicat qui est faux lorsque P est vrai et Q faux, et vrai dans tous les autres cas.*

✗ *Le prédicat « $P \iff Q$ » appelé* **équivalence de P et de Q**, *et on lit « P équivaut à Q », est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux, et faux dans tous les autres cas.*

Les tables de vérités des deux connecteurs logiques « $\implies$ » et « $\iff$ » ainsi définis sont donc

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La définition de ces deux connecteurs appellent quelques commentaires.

Observons que l'implication de P vers Q, telle qu'elle est définie ci-dessus, englobe la notion d'implication du langage courant : « Si P alors Q ». En effet, si $P \implies Q$ est vrai, et si P vrai, alors Q est vrai (ce qui correspond à la première ligne de la table de vérité de $P \implies Q$).

Copyrighted material

Remarquons qu'au sens du langage courant, une implication exprime une relation de cause à effet. Ici, la cause est P et l'effet est Q. Elle signifie que pour avoir l'effet, il suffit d'avoir la cause, et en ce sens, on dit parfois que P est une ***condition suffisante*** pour Q. Elle signifie aussi que la situation où il y a la cause mais pas l'effet est impossible (ce qui correspond à la deuxième ligne de la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$). Bien entendu, s'il n'y a pas la cause, il peut tout de même y avoir l'effet (on retrouve ici la troisième ligne de la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$). Enfin, il se peut qu'il n'y ait ni la cause, ni l'effet (ce qui correspond cette fois-ci à la quatrième ligne de la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$).

Observons aussi que l'équivalence de P et de Q, telle qu'elle est définie ci-dessus, correspond à la notion d'équivalence du langage courant.

Remarques

1. En pratique, si P, Q et R désignent trois prédicats, alors

$$\big(P \Longrightarrow Q\big) \text{ et } \big(Q \Longrightarrow R\big) \quad \text{se note} \quad P \Longrightarrow Q \Longrightarrow R;$$

$$\big(P \Longleftrightarrow Q\big) \text{ et } \big(Q \Longleftrightarrow R\big) \quad \text{se note} \quad P \Longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow R.$$

2. L'implication $Q \Longrightarrow P$ s'appelle l'***implication réciproque*** de $P \Longrightarrow Q$.

1.2.3 Propriétés

Définition 1.6 *Soient R_1 et R_2 deux prédicats (composés ou non). Si R_1 est vrai lorsque R_2 est vrai et si R_1 est faux lorsque R_2 est faux alors on dit que R_1 et R_2 ont la même table de vérité ou qu'ils sont* ***logiquement équivalents****, et on note*

$$R_1 \equiv R_2.$$

Dans le cas contraire, on note $R_1 \not\equiv R_2$.

Exemples

1. Les deux prédicats P et $\text{non}\big(\text{non}(P)\big)$ sont logiquement équivalents. En effet, grâce à la table de vérité

P	$\text{non}\,(P)$	$\text{non}\big(\text{non}\,(P)\big)$
V	F	V
F	V	F

et en comparant la première colonne à la dernière colonne, on se rend compte que ces deux colonnes sont effectivement identiques. Ceci peut se résumer en disant que la double négation annule la négation. On note alors

$$\text{non}\big(\text{non}(P)\big) \equiv P.$$

Bien évidemment, $\text{non}(P) \not\equiv P$.

Copyrighted material

2. Soit P un prédicat. On a

$$\begin{cases} (P \text{ et } P) & \equiv & P \\ (P \text{ ou } P) & \equiv & P \end{cases}.$$

3. Soient P, Q, R trois prédicats. On vérifie facilement les équivalences logiques

$$\begin{cases} P \text{ et } Q & \equiv & Q \text{ et } P \\ P \text{ ou } Q & \equiv & Q \text{ ou } P \\ (P \text{ et } Q) \text{ et } R & \equiv & P \text{ et } (Q \text{ et } R) \\ (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R & \equiv & P \text{ ou } (Q \text{ ou } R) \end{cases}.$$

Les deux premières (respectivement les deux dernières) expriment que les deux connecteurs logiques « et » et « ou » sont commutatifs (resp. associatifs).

4. Soient P et Q deux prédicats. On a $\big(P \text{ et } (P \text{ ou } Q)\big) \equiv P$ que l'on peut vérifier en comparant la première colonne et la dernière colonne de la table de vérité suivante :

P	Q	P ou Q	P et $(P$ ou $Q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

5. Soient P et Q deux prédicats. On vérifie l'équivalence logique

$$\Big(\big(\text{non}(P) \Longrightarrow Q\big) \text{ et } \big(\text{non}(P) \Longrightarrow \text{non}(Q)\big) \Big) \equiv P.$$

C'est sur cette équivalence logique que nous nous appuierons pour justifier un raisonnement par l'absurde (voir p. 18).

Définition 1.7 *Un prédicat composé R qui est vrai quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats qui le composent, est appelé une* **tautologie**.

Exemples

1. Le prédicat composé « P ou non (P) », construit par disjonction d'un prédicat P et de sa négation, est vrai quelle que soit la valeur de vérité du prédicat P. C'est donc une tautologie. Cela se vérifie en écrivant sa table de vérité :

P	non (P)	P ou non (P)
V	F	V
F	V	V

et en ne constatant que la présence de la valeur de vérité V dans la colonne de « P ou non (P) ».

Copyrighted material

2. Soient P, Q et R trois prédicats. Vérifions que le prédicat

$$\big(\,(P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow R)\,\big) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$$

est vrai quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q et R. Par commodité, désignons par A le prédicat « $P \Longrightarrow Q$ », par B le prédicat « $Q \Longrightarrow R$ » et par C le prédicat « $P \Longrightarrow R$ ». On doit donc montrer que « $(A \text{ et } B) \Longrightarrow C$ » est toujours vrai. Écrivons la table de vérité :

P	Q	R	A	B	A et B	C	$(A \text{ et } B) \Longrightarrow C$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Puisque la dernière colonne ne comporte que la valeur de vérité V, le prédicat $\big((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow R)\big) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ est donc une tautologie qui exprime que l'implication est transitive.

3. Si P, Q et R désignent trois prédicats, on montre de la même manière que le prédicat

$$\big(\,(P \Longleftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longleftrightarrow R)\,\big) \Longrightarrow (P \Longleftrightarrow R)$$

est vrai quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q et R. On dit alors que l'équivalence est transitive.

4. Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat

$$\big(\,P \text{ et } (P \Longrightarrow Q)\,\big) \Longrightarrow Q$$

est vrai quelles que soient les valeurs de vérité de P et Q.

Définition 1.8 *Deux prédicats composés sont dits* **incompatibles** *si leur conjonction est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des prédicats qui les composent.*

Exemples

1. Le prédicat P et le prédicat non(P) sont incompatibles car

P	non (P)	P et non(P)
V	F	F
F	V	F

Copyrighted material

Ce résultat est bien connu. Il exprime qu'on ne peut avoir à la fois quelque chose et son contraire.

2. Les deux prédicats « $x \leqslant 1$ » et « $x \geqslant 2$ » sont incompatibles.

Proposition 1.1 *Soient P, Q, R trois prédicats.*

✗ *On a les équivalences logiques suivantes, appelées* **lois de Morgan** *pour les prédicats :*

$$\begin{aligned} \text{non}\,(P \text{ ou } Q) &\equiv \big(\,\text{non}(P) \text{ et non}(Q)\,\big), \\ \text{non}\,(P \text{ et } Q) &\equiv \big(\,\text{non}(P) \text{ ou non}(Q)\,\big). \end{aligned}$$

✗ *On a les équivalences logiques suivantes,*

$$\begin{aligned} P \text{ ou } (Q \text{ et } R) &\equiv (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R), \\ P \text{ et } (Q \text{ ou } R) &\equiv (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R), \end{aligned}$$

qui expriment la distributivité du « ou » (respectivement du « et ») par rapport au « et » (resp. au « ou »).

Démonstration La démonstration pour chacune des quatre équivalences logiques consiste en la comparaison des tables de vérité des prédicats à gauche et à droite du symbole d'équivalence logique. Montrons à titre d'exemple la première loi de Morgan. On a

P	Q	P ou Q	non $(P$ ou $Q)$	non (P)	non (Q)	non (P) et non (Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

En comparant la quatrième colonne et la dernière colonne, on se rend compte qu'elles sont identiques, d'où $\text{non}(P \text{ ou } Q) \equiv \big(\,\text{non}(P) \text{ et non}(Q)\,\big)$. □

Proposition 1.2 *Soient P et Q deux prédicats. On a*

$$\begin{aligned} P \implies Q &\equiv \big(\,\text{non}(P) \text{ ou } Q\,\big); \\ \text{non}\big(P \implies Q\big) &\equiv \big(\,P \text{ et non}(Q)\,\big); \\ P \implies Q &\equiv \text{non}(Q) \implies \text{non}(P); \\ P \iff Q &\equiv \big(\,(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)\,\big). \end{aligned}$$

Copyrighted material

Démonstration ⊵ Montrons que « $P \implies Q$ » et « non(P) ou Q » sont logiquement équivalents. Écrivons la table de vérité de « non(P) ou Q ». On a

P	Q	non(P)	non(P) ou Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

L'équivalence logique s'en déduit en comparant la dernière colonne de la table de vérité donnée ci-dessus avec la dernière colonnne de la table de vérité de « $P \implies Q$ » donnée en page 6.

⊵ En utilisant la propriété démontrée ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
&\text{non}\big(P \implies Q\big) \equiv \text{non}\big(\text{non}(P) \text{ ou } Q\big)\\
&\equiv \big(\text{non}(\text{non}(P)) \text{ et non}(Q)\big) \quad \text{d'après la première loi de Morgan}\\
&\equiv \big(P \text{ et non}\big(Q\big)\big) \quad \text{car} \quad \text{non}(\text{non}(P)) \equiv P.
\end{aligned}$$

⊵ On vérifie facilement les équivalences logiques suivantes :

$$\begin{aligned}
&\text{non}(Q) \implies \text{non}(P) \equiv \big(\text{non}(\text{non}(Q)) \text{ ou non}(P)\big)\\
&\equiv \big(Q \text{ ou non}\big(P\big)\big) \quad \text{car} \quad \text{non}(\text{non}(Q)) \equiv Q\\
&\equiv \big(\text{non}\big(P\big) \text{ ou } Q\big) \quad \text{car} \quad \big(Q \text{ ou non}(P)\big) \equiv \big(\text{non}(P) \text{ ou } Q\big)\\
&\equiv P \implies Q.
\end{aligned}$$

⊵ Écrivons la table de vérité de « $\big(P \implies Q\big)$ et $\big(Q \implies P\big)$ ». On a

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$\big(P \implies Q\big)$ et $\big(Q \implies P\big)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La dernière colonne de la table de vérité donnée ci-dessus est identique à la dernière colonnne de la table de vérité de « $P \iff Q$ » donnée en page 6, ce qui établit la quatrième propriété. □

Exemples

1. Soient A et B deux ensembles finis. On a

$$\big(A \subset B \implies \text{card}\,(A) \leqslant \text{card}\,(B)\big) \equiv \big(\text{card}\,(A) > \text{card}\,(B) \implies A \not\subset B\big).$$

Copyrighted material

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}) \equiv (n \text{ impair} \implies n^2 \text{ impair}).$$

Soient P et Q deux prédicats. L'implication « non$(Q) \implies$ non(P) » s'appelle la ***contraposée*** de l'implication « $P \implies Q$ ». On dit aussi que l'implication « non$(Q) \implies$ non(P) » s'obtient par contraposition de « $P \implies Q$ ».

Si on interprète l'implication de P vers Q comme une relation de cause (ici P) à effet (ici Q), alors sa contraposée traduit le fait que de l'absence de l'effet on peut déduire l'absence de la cause. En ce sens, on dit parfois que Q est une ***condition nécessaire*** pour P. D'après la proposition 1.2, une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes. En revanche, il est clair, en comparant la troisième colonne et la quatrième colonne dans la table de vérité donnée à la fin de la démonstration de la proposition 1.2, que les deux implications « $P \implies Q$ » et « $Q \implies P$ » ne sont pas logiquement équivalentes. On écrit alors

$$P \implies Q \not\equiv Q \implies P.$$

L'équivalence de P et de Q s'appelle ***double-implication***. Elle se lit aussi « Pour que P, il faut et il suffit que Q » et on dit que P (respectivement Q) est une ***condition nécessaire et suffisante*** pour Q (resp. pour P).

Remarques

1. Il est immédiat d'après la proposition 1.2, que les prédicats « $P \implies P$ » et « $P \iff P$ » sont vrais quelle que soit la valeur de vérité de P. Ce sont donc deux tautologies.

2. On a aussi l'équivalence logique : $(P \iff Q) \equiv (Q \iff P)$.

1.3 Les quantificateurs mathématiques

1.3.1 Quantificateurs simples

À partir d'un prédicat $P(x)$ défini sur un ensemble E, on peut construire de nouvelles assertions dites ***assertions quantifiées*** en utilisant les ***quantificateurs*** « il existe » et « quel que soit ».

Copyrighted material

Définition 1.9 *Soit $P(x)$ un prédicat défini sur un ensemble E.*

✗ *Le quantificateur « **quel que soit** »*[1] *noté $\forall$, permet de définir l'assertion quantifiée*

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

qui est vraie lorsque tous les éléments x de E vérifient $P(x)$.

✗ *Le quantificateur « **il existe** », noté $\exists$, permet de définir l'assertion quantifiée*

$$\exists x \in E \quad P(x)$$

qui est vraie lorsqu'on peut trouver (au moins) un élément x appartenant à E vérifiant l'énoncé $P(x)$.

Le quantificateur « quel que soit » est qualifié d'***universel*** et le quantificateur « il existe » d'***existentiel***.

Exemples

1. L'énoncé « $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ » est un prédicat. Il peut être vrai ou faux selon la valeur de x. L'énoncé

$$\forall x \in [-3, 1] \;\; x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$$

est une assertion (quantifiée). Elle est vraie.

2. L'assertion quantifiée « $\forall n \in \mathbb{N} \;\; (n-3)n > 0$ » est fausse puisque qu'il existe un élément n de $\mathbb{N}$ (par exemple $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$) pour lequel l'énoncé « $n > 0$ » est faux.

3. Pour signifier que le résultat « Si le carré d'un entier naturel est pair alors cet entier est pair » est vrai pour tout entier naturel, on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \big(n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}\big).$$

4. L'assertion quantifiée « $\exists x \in \mathbb{R} \;\; x^2 = 4$ » est vraie car il existe un élément de $\mathbb{R}$ qui vérifie $x^2 = 4$ (c'est le cas des deux réels -2 et 2).

Remarques

1. Il est clair que l'assertion quantifiée « $\exists x \in E \;\; P(x)$ » est automatiquement vérifiée dès lors que l'assertion quantifiée « $\forall x \in E \;\; P(x)$ » l'est. Par exemple, l'assertion

$$\exists x \in [-3, 1] \;\; x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$$

est vraie puisque l'assertion « $\forall x \in [-3, 1] \;\; x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ » est vraie.

2. Observons que dans une assertion quantifiée, par exemple « $\forall x \in E \;\; P(x)$ », la lettre x pourrait être remplacée par n'importe quelle autre lettre ; cela ne changerait ni le sens, ni la valeur de vérité de l'assertion quantifiée. En ce

[1] appelé aussi « ***pour tout*** ».

Copyrighted material

sens, on dit que x est une ***variable muette***. On pourrait par exemple écrire « $\forall x \in E \ P(x)$ » sous l'une des formes suivantes

$$\forall y \in E \ P(y), \quad \forall \alpha \in E \ P(\alpha), \quad \forall \ell \in E \ P(\ell), \quad \dots$$

3. Lorsqu'il existe un élément de E vérifiant $P(x)$, cela n'exclut en aucun cas la possibilité qu'il en existe plusieurs. S'il en existe un et un seul, on pourra écrire

$$\exists ! \, x \in E \quad P(x)$$

et on dira qu'il existe un unique élément x de E vérifiant $P(x)$.

Règles de négation d'une assertion quantifiée

La négation de « pour tout élément x de E l'énoncé $P(x)$ est vrai » est « il existe un élément x de E pour lequel l'énoncé $P(x)$ est faux » et la négation de « il existe un élément x de E pour lequel l'énoncé $P(x)$ est vrai » est « pour tout élément x de E l'énoncé $P(x)$ est faux ». Autrement dit,

$$\begin{aligned} \text{non}\big(\forall x \in E \ P(x)\big) &\equiv \exists x \in E \ \text{non}\big(P(x)\big), \\ \text{non}\big(\exists x \in E \ P(x)\big) &\equiv \forall x \in E \ \text{non}\big(P(x)\big). \end{aligned}$$

Exemple Soit $P(x)$ un prédicat défini sur E. On a

$$\text{non}\Big(\forall x \in E \ \big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)\Big) \equiv \exists x \in E \ \Big(P(x) \text{ et non}\big(Q(x)\big)\Big).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} &\text{non}\Big(\forall x \in E \ \big(P(x) \iff Q(x)\big)\Big) \\ &\equiv \exists x \in E \ \Big(\Big(P(x) \text{ et non}\big(Q(x)\big)\Big) \text{ ou } \Big(\text{non}\big(P(x)\big) \text{ et } Q(x)\Big)\Big). \end{aligned}$$

Remarque En pratique, il arrive parfois de manipuler des assertions quantifiées dont le sens est correct mais dont l'écriture ne l'est pas. Considérons par exemple l'énoncé « tout nombre réel x positif ou nul et inférieur ou égal à 1 vérifie l'inégalité $x^2 \leqslant x$ ». Son écriture à l'aide des quantificateurs est

$$\forall x \in \{u \in \mathbb{R}_+ \mid u \leqslant 1\} \quad x^2 \leqslant x. \tag{1}$$

On rencontre parfois cet énoncé écrit de manière abusive sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x \leqslant 1 \quad x^2 \leqslant x. \tag{2}$$

Cette dernière écriture est incorrecte car elle gène la compréhension de l'énoncé mathématique. Pour bien se rendre compte que l'assertion (2) est ambiguë du point de vue de la logique, il suffit d'essayer d'en écrire la négation. Il est clair que la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}_+$» s'écrit « $\exists x \in \mathbb{R}_+$». Par contre, on ne

Copyrighted material

sait pas que prendre pour la négation de « $x \leqslant 1 \;\; x^2 \leqslant x$ ». Faut-il prendre « $x > 1$ et $x^2 > x$ » ou bien « $x > 1$ ou $x^2 > x$ » ? Pour répondre à cette question, établissons la négation de l'assertion (1) écrite en respectant les règles de logique. On a

$$\text{non}\Big(\forall x \in \{u \in \mathbb{R}_+ \mid u \leqslant 1\} \;\; x^2 \leqslant x\Big) \;\equiv\; \exists x \in \{u \in \mathbb{R}_+ \mid u \leqslant 1\} \;\; x^2 > x.$$

On se rend compte que la négation ne correspond à aucune des deux formes proposées puisqu'en écrivant la négation de l'assertion (1) sous une forme analogue à l'assertion (2), on a

$$\exists x \in \mathbb{R}_+ \quad x \leqslant 1 \quad x^2 > x.$$

1.3.2 Quantificateurs multiples

Considérons maintenant un prédicat $P(x, y)$ à deux variables où x et y représentent respectivement un élément de l'ensemble E et un élément de l'ensemble F. L'énoncé « $\forall y \in F \;\; P(x, y)$ » est encore un prédicat puisque sa valeur de vérité dépend de la variable x appartenant à E. En revanche, l'énoncé « $\forall x \in E \;\; \forall y \in F \;\; P(x, y)$ » est une assertion. Elle est définie comme suit.

Définition 1.10 *Soit $P(x, y)$ un prédicat défini sur les ensembles E et F.*

✗ *L'assertion quantifiée « $\forall x \in E \;\; \forall y \in F \;\; P(x, y)$ » est vraie lorsque tous les éléments x de E et tous les éléments y de F vérifient $P(x, y)$.*

✗ *L'assertion quantifiée « $\exists x \in E \;\; \exists y \in F \;\; P(x, y)$ » est vraie lorsqu'il existe (au moins) un élément x appartenant à E et lorsqu'il existe (au moins) un élément y appartenant à F vérifiant $P(x, y)$.*

Exemples

1. L'assertion quantifiée « $\forall x \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; (1 + x)^n \geqslant 1$ » est vraie.

2. L'assertion quantifiée « $\exists x \in \mathbb{R} \;\; \exists y \in \mathbb{R} \;\; x + y = 5$ » est vraie. Il suffit de considérer par exemple $x = 2$ et $y = 3$ (ou encore $x = -2$ et $y = 7$).

3. On se convainc facilement de l'équivalence logique suivante :

$$\big(\exists\, ! \, x \in E \;\; P(x)\big) \;\equiv\; \big(R_1 \text{ et } R_2\big)$$

où l'assertion R_1 est définie par « $\exists x \in E \;\; P(x)$ » et où R_2 est définie par

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad \Big(\big(P(x) \text{ et } P(x')\big) \implies x = x'\Big).$$

L'assertion R_1 traduit l'existence d'un élément x vérifiant $P(x)$ et l'assertion R_2 traduit l'unicité de cet élément.

Copyrighted material

Règles d'utilisation des quantificateurs multiples

La plupart des énoncés mathématiques demandent pour être correctement formalisés l'usage successif de quantificateurs différents. On peut ainsi construire de nouvelles assertions quantifiées en combinant à souhait les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$ définis précédemment. Par exemple, l'assertion « tout nombre réel positif ou nul possède une racine carrée positive ou nulle » s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \exists u \in \mathbb{R}_+ \ u^2 = x.$$

L'utilisation de quantificateurs multiples doit cependant s'effectuer dans le respect de certaines règles.

- RÈGLE 1 : on peut permuter deux quantificateurs identiques.

$$\Big(\forall x \in E \ \forall y \in F \ P(x,y) \Big) \quad \equiv \quad \Big(\forall y \in F \ \forall x \in E \ P(x,y) \Big),$$
$$\Big(\exists x \in E \ \exists y \in F \ P(x,y) \Big) \quad \equiv \quad \Big(\exists y \in F \ \exists x \in E \ P(x,y) \Big).$$

- RÈGLE 2 : on ne peut pas permuter deux quantificateurs différents.

$$\Big(\exists y \in F \ \forall x \in E \ P(x,y) \Big) \quad \not\equiv \quad \Big(\forall x \in E \ \exists y \in F \ P(x,y) \Big).$$

  Par exemple, « $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \ x \leqslant y$ » est une assertion vraie puisque si x désigne un réel quelconque, alors, en prenant $y = x + 1$ on a : $x \leqslant x + 1$. En revanche l'assertion « $\exists y \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ x \leqslant y$ » est fausse puisque l'ensemble des nombres réels n'est pas borné.

1.4 Les différents modes de démonstration en mathématique

1.4.1 Raisonnement par hypothèse auxiliaire

Un raisonnement par hypothèse auxiliaire s'appuie sur l'équivalence logique

$$\Big(P \text{ et } (P \implies Q) \Big) \equiv Q.$$

Ainsi, si l'énoncé P est vrai et si l'implication $P \implies Q$ est vraie alors l'énoncé Q est nécessairement vrai. C'est la méthode de démonstration la plus courante.

Exemple Soient $A = \{2, -3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$. Pour montrer que $A = B$ on utilise l'implication

$$\Big(A \subset B \quad \text{et} \quad \text{card}(A) = \text{card}(B) \Big) \implies A = B. \tag{3}$$

Elle sera démontrée au chapitre suivant (voir le corollaire 2.1, p. 30). Ici, P est « $A \subset B$ et $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ » et Q est « $A = B$ ». Commençons par montrer que l'énoncé P est vrai. D'une part, $A \subset B$ car 2 et -3 sont des solutions de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$, et d'autre part, $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ car le trinôme $x^2 + x - 6$, de discriminant strictement positif, possède deux racines réelles distinctes. Puisque l'implication (3) est vraie, on obtient finalement que l'énoncé Q est vrai, autrement dit que l'égalité ensembliste $A = B$ est vraie.

Copyrighted material

1.4.2 Raisonnement par contraposée

Il sert à démontrer qu'une implication « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie. Il s'appuie sur l'équivalence logique suivante (voir proposition 1.2) :

$$\big(P \implies Q\big) \equiv \big(\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)\big).$$

Au lieu de montrer que l'implication « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie, le raisonnement par contraposée consiste à montrer que l'implication « $\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P)$ » est vraie. On fait donc l'hypothèse que l'énoncé $\text{non}(Q)$ est vrai et on montre que ceci implique que l'énoncé $\text{non}(P)$ est vrai.

Exemples

1. Montrons en utilisant un raisonnement par contraposée l'assertion suivante : « $\forall n \in \mathbb{N}\ \big(n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}\big)$ ». Pour cela, montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \big(\text{non}(n \text{ pair}) \implies \text{non}(n^2 \text{ pair})\big),$$

autrement dit que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \big(n \text{ impair} \implies n^2 \text{ impair}\big).$$

Soit n un entier naturel. Supposons n impair. Il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. On a alors

$$n^2 = (2p+1)^2 = 2(2p^2 + 2p) + 1.$$

On a ainsi écrit n^2 sous la forme $n^2 = 2q + 1$ avec $q = 2p^2 + 2p \in \mathbb{N}$. Le nombre n^2 est impair et le résultat est démontré.

2. Montrons que « $\forall x \in \mathbb{R}\ \big((\forall \varepsilon > 0\ |x| < \varepsilon) \Longrightarrow x = 0\big)$ ». Utilisons pour cela un raisonnement par contraposée. On doit donc montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \Big(\text{non}(x = 0) \implies \text{non}\big(\forall \varepsilon > 0\ |x| < \varepsilon\big)\Big),$$

autrement dit que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \Big(x \neq 0 \implies \big(\exists \varepsilon > 0\ |x| \geqslant \varepsilon\big)\Big)$$

puisque

$$\text{non}\big(\forall \varepsilon > 0\ |x| < \varepsilon\big) \equiv \Big(\exists \varepsilon > 0\ \text{non}\,(|x| < \varepsilon)\Big) \equiv \Big(\exists \varepsilon > 0\ |x| \geqslant \varepsilon\Big).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $x \neq 0$ et montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \geqslant \varepsilon$. C'est immédiat. Il suffit en effet de prendre $\varepsilon = |x|/2$ puisque $|x|/2$ est strictement positif et $|x| \geqslant |x|/2$. D'une manière générale, $\varepsilon = |x|/\alpha$ avec $\alpha \geqslant 1$ convient aussi puisque, pour tout réel $\alpha \geqslant 1$, $|x|/\alpha > 0$ et $|x| \geqslant |x|/\alpha$.

ATTENTION Pour montrer qu'une assertion quantifiée de la forme « $\forall x \in E\ P(x)$ » est vraie (avec E un ensemble infini), vérifier que l'énoncé $P(x)$ est vrai pour un élément particulier de E ne constitue en aucun cas une démonstration. Il faut le vérifier pour tous les éléments de E. La bonne démarche consiste à se donner un élément quelconque x appartenant à l'ensemble E et à démontrer que l'énoncé $P(x)$ est vrai pour cet élément x.

Copyrighted material

1.4.3 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'un énoncé P est vrai, un raisonnement par l'absurde consiste à montrer que sa négation, l'énoncé non(P), entraîne un énoncé Q et son contraire non(Q). Il s'appuie sur l'équivalence logique

$$\Big(\big(\text{non}(P) \implies Q\big) \text{ et } \big(\text{non}(P) \implies \text{non}(Q)\big) \Big) \equiv P.$$

En pratique, on suppose l'énoncé non(P) comme étant vrai et on cherche alors un énoncé (noté Q ci-dessus) qui, sous cette hypothèse, serait à la fois vrai et faux. On dit que l'on a obtenu une contradiction ou que l'hypothèse est contradictoire.

Exemple Montrons en utilisant un raisonnement par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire que

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Rappelons que $\sqrt{2}$ est, par définition, le nombre réel positif dont le carré vaut 2. Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec p et q premiers entre eux (c'est-à-dire sans diviseur commun autre que 1) tel que $\sqrt{2} = p/q$. Élevons au carré l'égalité $\sqrt{2} = p/q$. On obtient

$$2^2 = p^2/q^2$$

ou encore $2q^2 = p^2$, d'où p^2 est pair. D'après l'exemple précédent, on en déduit que p est pair. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2m$. Puisque $p^2 = 2q^2$, on obtient

$$(2m)^2 = 2q^2$$

ou encore $2m^2 = q^2$, ce qui implique que q^2 est pair. On en déduit alors que q est pair (voir l'exemple précédent), ce qui signifie qu'il existe $m' \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2m'$. On a donc fait apparaître un diviseur commun à p et q (à savoir le nombre 2), ce qui est contraire à notre hypothèse « p et q sont premiers entre eux ». La démonstration par l'absurde de « $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ » est terminée.

Remarque Ce mode de raisonnement est souvent utilisé pour montrer qu'une implication « $A \implies B$ » est vraie. Rappelons l'équivalence logique suivante :

$$\text{non}\big(A \implies B\big) \equiv \big(A \text{ et non}(B)\big).$$

Pour montrer par l'absurde que l'implication « $A \implies B$ » est vraie, on suppose l'énoncé A et l'énoncé non (B) comme étant vrais et on montre que cela conduit à une contradiction.

Exemple Soient x et y deux nombres rationnels. Montrons l'équivalence

$$x + y\sqrt{2} = 1 \iff \big(x = 1 \text{ et } y = 0\big).$$

Copyrighted material

Dans un premier temps, montrons « $x + y\sqrt{2} = 1 \Longrightarrow \big(x = 1 \ \text{ et } \ y = 0\big)$ » en utilisant un raisonnement par l'absurde. Supposons d'une part que

$$x + y\sqrt{2} = 1, \tag{4}$$

et d'autre part que $x \neq 1$ ou $y \neq 0$. De l'hypothèse $y \neq 0$ et de l'égalité (4), il vient

$$\sqrt{2} = (1 - x)/y. \tag{5}$$

Puisque x et y appartiennent à $\mathbb{Q}$, il est clair que $(1 - x)/y$ appartient aussi à $\mathbb{Q}$. L'égalité (5) signifie ainsi que $\sqrt{2}$ est égal à un nombre rationnel, ce qui est absurde puisqu'il a été démontré plus haut que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Nous avons ainsi établi que y est nul. Il s'en suit, en remplaçant $y = 0$ dans l'égalité (4), que $x = 1$, ce qui termine la démonstration de « $x + y\sqrt{2} = 1 \Longrightarrow \big(x = 1 \ \text{ et } \ y = 0\big)$ ». Sa réciproque, l'implication « $\big(x = 1 \ \text{ et } \ y = 0\big) \Longrightarrow x + y\sqrt{2} = 1$ » est immédiate. L'équivalence est démontrée.

1.4.4 Raisonnement par contre-exemple

Un raisonnement par contre-exemple sert à démontrer qu'une assertion quantifiée de la forme « $\forall x \in E \ \ P(x)$ » est fausse. Pour cela, on démontre que sa négation est vraie. On a vu que

$$\text{non}\big(\ \forall x \in E \ \ P(x)\ \big) \ \equiv \ \Big(\ \exists x \in E \ \ \text{non}\big(P(x)\big)\ \Big).$$

Ainsi, pour montrer que « $\forall x \in E \ \ P(x)$ » est une assertion fausse, la méthode consiste à exhiber un élément x de E ne vérifiant pas $P(x)$.

Exemples

1. « toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est soit paire soit impaire » est une assertion fausse puisqu'on peut trouver une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est ni paire, ni impaire. C'est par exemple le cas de l'application $x \longmapsto \exp(x)$.

2. Considérons l'assertion quantifiée « $\forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \big(|x| < \varepsilon \implies x = 0\big)$ ». Il s'agit d'une assertion fausse puisqu'on peut trouver un réel x et un réel $\varepsilon > 0$ pour lesquels l'implication « $|x| < \varepsilon \implies x = 0$ » est fausse, autrement dit vérifiant « $|x| < \varepsilon$ et $x \neq 0$ ». Il suffit par exemple de prendre $x = 1$ et $\varepsilon = 2$.

ATTENTION Il ne faut pas confondre l'assertion quantifiée

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \big(|x| < \varepsilon \implies x = 0\big) \tag{6}$$

avec l'assertion quantifiée

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \Big(\big(\forall \varepsilon > 0 \ \ |x| < \varepsilon\big) \Longrightarrow x = 0\Big). \tag{7}$$

Les différences entre ces deux assertions apparaissent seulement au niveau des parenthèses. L'assertion (6) est fausse (nous venons d'en exhiber un contre-exemple) tandis que l'assertion (7) est vraie (nous l'avons démontrée en utilisant un raisonnement par contraposée, voir § 1.4.2). D'où l'importance des parenthèses dans les écritures.

Copyrighted material

1.4.5 Raisonnement par récurrence

De nombreux résultats s'expriment sous la forme « $\forall n \in \mathbb{N}\ \ P(n)$ » Une démonstration par récurrence permet de montrer qu'une telle assertion quantifiée est vraie. Son principe exprime le fait que si la propriété $P(0)$ est vraie et si l'implication « $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ » est vraie (on dit alors que $P(n)$ est une propriété héréditaire), alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

La méthodologie consiste à :

- vérifier que la propriété $P(0)$ est vraie ;
- puis démontrer que si la propriété $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie. La propriété $P(n)$ supposée vraie est appelée ***hypothèse de récurrence***.

Comme l'illustre l'exemple suivant, un raisonnement par récurrence peut être utilisé si la propriété $P(n)$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n_0 où n_0 désigne un entier naturel non nécessairement égal à 0. Dans ce cas précis, la première étape consistera à montrer que la propriété $P(n_0)$ est vraie.

Exemple Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3.$$

Soit $P(n)$ la propriété : $(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$. La propriété $P(1)$ est vraie car $1^2 = 1^3$. Soit n un entier naturel non nul. Montrons que l'implication « $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ » est vraie. Supposons la propriété vraie au rang n (c'est l'hypothèse de récurrence) et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire montrons que

$$(1+2+\ldots+n+1)^2 = 1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3.$$

Partons du terme de gauche pour arriver au terme de droite (c'est ici plus simple). Posons $S = 1+2+\ldots+n$. On a

$$(1+2+\ldots+n+1)^2 = (S+(n+1))^2 = S^2+2S(n+1)+(n+1)^2.$$

Or S qui est la somme des n premiers entiers vaut aussi $n(n+1)/2$ et par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence, $S^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$. On a donc

$$\begin{aligned}(1+2+\ldots+n+1)^2 &= 1^3+2^3+\ldots+n^3+n(n+1)^2+(n+1)^2\\ &= 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3.\end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré que pour tout entier naturel n non nul, l'implication « $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ » était vraie. Le principe de récurrence permet alors d'affirmer que l'égalité

$$(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$$

est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Copyrighted material

Récurrence multiple

Soient q un entier naturel non nul et $P(n)$ une propriété définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$. Si les propriétés $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ..., $P(n_0+q-1)$ sont vraies et si

$$\big(P(n) \text{ et } P(n+1) \text{ et } \ldots \text{ et } P(n+q-1)\big) \implies P(n+q),$$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$. On parle alors de ***récurrence multiple***. En particulier, on parle de ***récurrence double*** si $q = 2$ et de ***récurrence triple*** si $q = 3$.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \tag{8}$$

Cherchons l'expression de u_n en fonction de n. Pour cela, commençons par calculer les premières valeurs prises par u_n. Nous les avons regroupées pour n variant de 0 à 7 dans le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	2	3	5	9	17	33	65	129

On se rend compte que $u_n = 2^n + 1$ pour $n \in \{0, 1, \ldots, 7\}$. Montrons que ce résultat est en fait vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n + 1.$$

Utilisons un raisonnement par récurrence (ici une récurrence double s'impose). Soit $P(n)$ la propriété : $u_n = 2^n + 1$. Les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies car $u_0 = 2^0 + 1$ et $u_1 = 2^1 + 1$. Soit n un entier naturel non nul. Montrons que l'implication « $\big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \implies P(n+2)$ » est vraie. Supposons que la propriété soit vraie au rang n et au rang $n+1$ (c'est notre hypothèse de récurrence), c'est-à-dire que

$$u_n = 2^n + 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2^{n+1} + 1,$$

et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que

$$u_{n+2} = 2^{n+2} + 1.$$

En remplaçant $u_n = 2^n + 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$ dans la relation (8), on obtient

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) = 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n + 1 \\ &= 2 \times 2^{n+1} + 1 = 2^{n+2} + 1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $u_{n+2} = 2^{n+2} + 1$. Nous avons ainsi montré que pour tout entier naturel n, l'implication « $\big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \implies P(n+2)$ » était vraie. Le principe de récurrence multiple permet alors d'affirmer que $u_n = 2^n + 1$ pour tout entier naturel n.

Copyrighted material

Copyrighted material

CHAPITRE 2

Structures fondamentales

2.1 Ensemble et sous-ensemble

2.1.1 Généralités sur les ensembles

On peut définir de manière intuitive un **ensemble** comme la réunion dans une même entité de certains objets bien déterminés. On appelle ces objets les **éléments** de l'ensemble. Ce ne sont pas nécessairement des nombres.

Il est d'usage de noter un ensemble en utilisant une lettre majuscule et un élément en utilisant une lettre minuscule. Ainsi pour signifier que x est un élément de l'ensemble E on écrit $x \in E$ et on lit « x *appartient à* E ». Si x n'est **pas** un élément de E on écrit $x \notin E$ et on dit que « x *n'appartient pas à* E ». Si x et y sont deux éléments de E, on notera $x = y$ si ces éléments sont égaux et $x \neq y$ s'ils sont différents.

Exemples usuels d'ensembles de nombres :

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels,
$\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs,
$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels,
$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels,
$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

Signalons que nous devons la notation $\mathbb{Z}$ au mathématicien allemand Richard Dedekind (du mot allemand *zahl* qui signifie « nombre ») et les notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ au mathématicien italien Giuseppe Peano (des mots italiens *naturale* et *quoziente* qui signifient respectivement « naturel » et « quotient »). Le terme « réel » (*real* en allemand et en anglais) pour désigner un nombre rationnel ou irrationnel, fut utilisé par Georg Cantor.

Un ensemble peut se définir de deux manières :

- soit ***en extension*** : on dresse la liste de tous les éléments. L'ordre, ainsi qu'une éventuelle répétition des éléments sont sans influence. Ainsi

$$\{a, b, c, d\} = \{b, c, a, d\} = \{a, b, a, c, d, d\}.$$

Copyrighted material

– soit ***en compréhension*** : on énonce une propriété caractéristique des éléments de l'ensemble.

On peut représenter graphiquement un ensemble à l'aide d'un ***diagramme de Venn***.

Exemple Considérons l'ensemble A défini en extension par

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Il peut aussi être défini en compréhension par $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 9\}$. Le diagramme de Venn de l'ensemble A est donné à la figure 1.

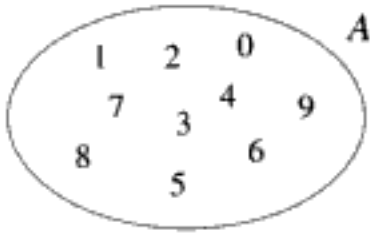


Fig. 1 Représentation à l'aide d'un diagramme de Venn de $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 9\}$.

Définition 2.1 ✗ *Un ensemble E est dit* **fini** *lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel. Dans ce cas, le nombre d'éléments est appelé le* **cardinal** *de l'ensemble. On le note* $\operatorname{card}(E)$.

✗ *Un ensemble qui n'est pas fini est dit* **infini**.

Exemple $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 9\}$ est fini de cardinal $\operatorname{card}(A) = 10$.

Définition 2.2 ✗ *Un ensemble est dit* **vide** *lorsqu'il ne contient aucun élément. On le note* $\emptyset$. *Par convention,*

$$\operatorname{card}(\emptyset) = 0.$$

✗ *On appelle* **singleton** *un ensemble qui ne contient qu'un seul élément. Son cardinal est* 1.

Copyrighted material

2.1.2 Partie, sous-ensemble

Définition 2.3 *Soient A et B deux ensembles. On dit que A est* **inclus** *dans B (ou que « A est contenu dans B » ou que « B contient A »), et on note $A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B. L'ensemble A est alors qualifié de* **partie** *ou de* **sous-ensemble** *de B.*

En d'autres termes, A et B désignant deux parties d'un ensemble E, A est inclus dans B si

$$\forall x \in E \quad \Big(x \in A \Longrightarrow x \in B \Big).$$

En utilisant les règles de négation d'une assertion quantifiée, on vérifie les équivalences logiques suivantes

$$\begin{aligned} A \not\subset B &\equiv \text{non}\big(A \subset B \big) \\ &\equiv \text{non}\big(\forall x \in E \ (x \in A \Longrightarrow x \in B) \big) \\ &\equiv \exists x \in E \ \text{non}\big(x \in A \Longrightarrow x \in B \big) \\ &\equiv \exists x \in E \ \big(x \in A \text{ et non}(x \in B) \big) \\ &\equiv \exists x \in E \ \big(x \in A \text{ et } x \notin B \big). \end{aligned}$$

Ainsi, A n'est pas inclus dans B s'il existe (au moins) un élément de A qui n'est pas un élément de B.

Exemples

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
2. $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ car $\dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}^*$ car $0 \in \mathbb{N}$ et $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Remarques

1. Par convention, l'ensemble $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.
2. L'inclusion est à prendre au sens large puisqu'un ensemble peut être inclus dans lui-même.
3. Si A et B sont deux ensembles finis et si $A \subset B$ alors $\text{card}\,(A) \leqslant \text{card}\,(B)$.
4. Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Définition 2.4 *On dit que deux ensembles E et F sont* **égaux** *(ou* **identiques***), et on note $E = F$, si tout élément de E est élément de F et si tout élément de F est élément de E. Autrement dit,*

$$E = F \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(E \subset F \ \text{ et } \ F \subset E \Big).$$

Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont **distincts** *et on note $E \neq F$.*

Copyrighted material

Exemple On considère les trois sous-ensembles finis de $\mathbb{R}$ suivants :

$$\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} & \text{(défini en compréhension)} \\ B = \{1, 2\} & \text{(défini en extension)} \\ C = \{1, 2, \sqrt{2}\} & \text{(défini en extension)} \end{cases}.$$

Alors $A = B$ et $B \neq C$. Bien entendu, $B \subset C$.

2.1.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 2.5 *Soit E un ensemble. Les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé* **ensemble des parties de** E *et noté $\mathcal{P}(E)$. Autrement dit, $A \in \mathcal{P}(E)$ signifie que $A \subset E$.*

Remarquons que les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des sous-ensembles de E et non pas des éléments de E. De plus, contrairement à l'ensemble E qui peut être vide, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ n'est, lui, jamais vide puisqu'il contient au moins les ensembles $\emptyset$ et E. Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$ alors

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\Big\}.$$

En comptant les éléments de $\mathcal{P}(E)$, on remarque que l'on a

$$\operatorname{card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^3 = 8.$$

Ce résultat se généralise.

Proposition 2.1 *Si E est un ensemble fini de cardinal n alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et*

$$\operatorname{card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n.$$

Démonstration Il suffit de dénombrer, pour p variant de 0 à n, le nombre de manières de choisir (sans ordre, ni remise d'après la définition d'un ensemble, voir page 23) p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E. On dénombre 1 ensemble à 0 élément (c'est l'ensemble $\emptyset$), n ensembles à 1 élément (ce sont les singletons), C_n^2 ensembles à 2 éléments, C_n^3 ensembles à 3 éléments, $\ldots$, $C_n^n = 1$ ensemble à n éléments, où, pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, C_n^p est l'entier naturel défini par

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}.$$

On en déduit

$$\operatorname{card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p.$$

Copyrighted material

Il reste à vérifier que $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$. Utilisons la formule[1] du binôme de Newton : pour tout réel a, pour tout réel b et pour tout entier naturel n,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}.$$

En prenant $a = b = 1$, on obtient $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$. □

2.1.4 Opérations sur les ensembles

Définition 2.6 *Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. L'**union** des deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble constitué par les éléments de E appartenant à A ou à B, c'est-à-dire :*

$$A \cup B \overset{déf.}{=} \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Il est évident que A et B sont des sous-ensembles de $A \cup B$, c'est-à-dire que

$$A \subset (A \cup B) \quad \text{et} \quad B \subset (A \cup B).$$

De plus, si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$. On vérifie que

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cup A = A \quad \text{et} \quad A \cup E = E.$$

L'union possède les propriétés suivantes : soient A, B, C trois sous-ensembles de E :

- l'union est commutative, $A \cup B = B \cup A$;
- l'union est associative, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Définition 2.7 *Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. L'**intersection** des deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble constitué par les éléments de E appartenant à A et à B. Autrement dit*

$$A \cap B \overset{déf.}{=} \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

*Si $A \cap B = \emptyset$ alors les deux ensembles A et B sont dits **disjoints**.*

L'intersection de A et B est à la fois un sous-ensemble de A et un sous-ensemble de B, c'est-à-dire

$$(A \cap B) \subset A \quad \text{et} \quad (A \cap B) \subset B.$$

[1] Elle est donnée et démontrée dans le cas général en page 72.

Copyrighted material

De plus, si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$. On vérifie également que

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A \quad \text{et} \quad A \cap E = A.$$

L'intersection possède les propriétés suivantes : soient A, B, C trois sous-ensembles de E :

- l'intersection est commutative, $A \cap B = B \cap A$;
- l'intersection est associative, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

À l'instar des connecteurs logiques « et », « ou », l'intersection et l'union vérifie les deux propriétés suivantes :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

ce que l'on visualise aisément en représentant les diagrammes de Venn. On dit que l'intersection (respectivement l'union) est distributive par rapport à l'union (respectivement l'intersection). D'où l'importance des parenthèses.

Fig. 2 Représentation, en grisé, de l'ensemble $A \cup B$ (à gauche) et de l'ensemble $A \cap B$ (à droite).

Définition 2.8 *Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. La* ***différence*** *des ensembles A et B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble constitué par les éléments de A qui n'appartiennent pas à B, c'est-à-dire :*

$$A \setminus B \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

L'ensemble $A \setminus B$ est donc par définition un sous-ensemble de A. L'ensemble $B \setminus A$ est, lui, un sous-ensemble de B (voir fig. 3). Il est donc clair que

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

Copyrighted material

Définition 2.9 *Soit A une partie de l'ensemble E. On appelle* **complémentaire de A dans E** *le sous-ensemble de E, noté $\complement_E(A)$, constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, c'est-à-dire :*

$$\complement_E(A) \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid x \notin A\} = E \setminus A.$$

Exemple Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 9\}$. On a $\complement_{\mathbb{N}}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 9\}$. L'ensemble A est aussi un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ mais on a

$$\complement_{\mathbb{Z}}(A) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 9 \text{ ou } x < 0\} \neq \complement_{\mathbb{N}}(A).$$

Il est évident que : $\complement_E(\emptyset) = E$ et $\complement_E(E) = \emptyset$. De plus, on a

$$\complement_E(\complement_E(A)) = A, \quad A \cap \complement_E(A) = \emptyset \text{ et } A \cup \complement_E(A) = E.$$

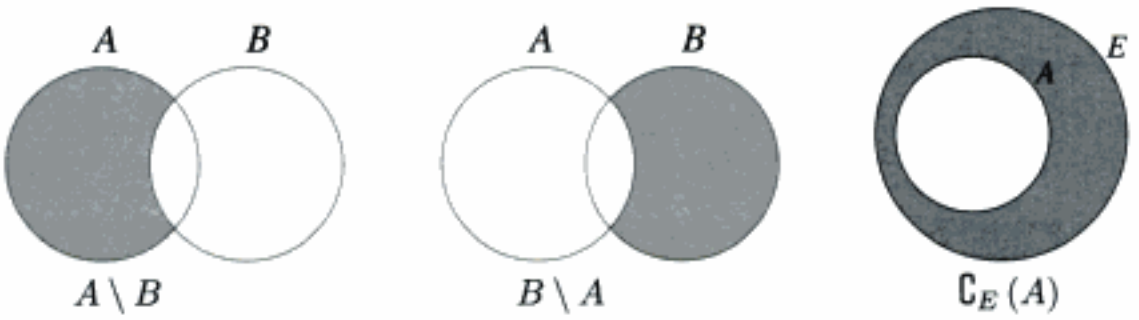


Fig. 3 Représentation, en grisé, des ensembles $A \setminus B$ (à gauche), $B \setminus A$ (au centre) et $\complement_E(A)$ (à droite).

Rappelons que lorsque deux ensembles finis A et B sont disjoints (c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \emptyset$), compter les éléments de l'union revient à compter les éléments de A, à compter ceux de B et à en faire la somme, ce qu'on écrit

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) \quad \text{si} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Lorsque $A \cap B \neq \emptyset$, cette manière de procéder conduit à compter deux fois les éléments appartenant à l'intersection de ces deux ensembles. Ainsi, pour connaître le cardinal de l'union, il ne faut pas oublier de retrancher à la somme des cardinaux le cardinal de l'intersection. On a donc le résultat suivant :

Proposition 2.2 *Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. On a*

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

On en déduit le résultat suivant.

Copyrighted material

Corollaire 2.1 *Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. Si $A \subset B$ et* $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$ *alors $A = B$.*

Démonstration Le cardinal de l'ensemble $A \cup (B \setminus A)$ vérifie d'après la proposition 2.2 :

$$\operatorname{card}(A \cup (B \setminus A)) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B \setminus A) - \operatorname{card}(A \cap (B \setminus A)).$$

Or $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Donc $\operatorname{card}(A \cap (B \setminus A)) = 0$. Par hypothèse $A \subset B$, ce qui implique que $A \cup (B \setminus A) = B$. Ainsi,

$$\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B \setminus A).$$

L'hypothèse $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$ implique que $\operatorname{card}(B \setminus A) = 0$, c'est-à-dire que : $B \setminus A = \emptyset$. On a alors nécessairement $A = B$. □

Si E est un ensemble fini alors, pour toute partie A de E, on a

$$\operatorname{card}(\complement_E(A)) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A).$$

On se convainc facilement des résultats suivants à l'aide des diagrammes de Venn.

Proposition 2.3 (Lois de Morgan pour les ensembles) *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a les relations suivantes appelées* ***lois de Morgan*** *:*

$$\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B),$$

$$\complement_E(A \cap B) = \complement_E(A) \cup \complement_E(B).$$

Exercice 1 *Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Donner une écriture simplifiée de :*

1. $(A \cup (A \cap B)) \cap B$.
2. $(A \cap B) \cup (A \cap \complement_E(B))$.
3. $\complement_E(A \cup B) \cap (C \cup \complement_E(A))$.
4. $((A \cup B) \cap (B \cap C)) \cup (A \cup C)$.
5. $(A \cup B) \cap ((B \cap C) \cup (A \cup C))$.

Copyrighted material

2.1.5 Produit cartésien

Définition 2.10 *Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles non vides.*

✗ *On appelle* **produit cartésien** *des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, constitué des n-***uplets** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. En d'autres termes,*

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \overset{déf.}{=} \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\big|\, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\big\}.$$

En particulier, un 2-uplet est appelé un **couple** *et un 3-uplet un* **triplet.**

✗ *Deux n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)$ sont* **égaux** *(ou* **identiques***) si*

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad x_i = x'_i.$$

On écrit alors $(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n)$.

On convient de la notation suivante

$$\prod_{i=1}^{n} E_i \overset{not.}{=} E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$E^n \overset{not.}{=} \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}.$$

Il ne faut pas confondre un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, qui est une liste (ordonnée) d'éléments non nécessairement distincts, avec l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ce sont deux objets mathématiques de nature différente puisque

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i \quad \text{et} \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big).$$

Un n-uplet se note avec des parenthèses et un ensemble avec des accolades. Par exemple, considérons un élément x d'un ensemble E et un élément y d'un ensemble F. On a

$$(x, y) \in E \times F \quad \text{et} \quad \{x, y\} \in \mathcal{P}(E \cup F).$$

Il est important de noter que lorsqu'on écrit (x, y), l'ordre des éléments est pris en compte, alors que l'ordre n'a aucune importance pour l'ensemble $\{x, y\}$. Par exemple,

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

En revanche, les deux couples (x, y) et (y, x) ne sont en général pas égaux. D'ailleurs si $E \neq F$, ils n'appartiennent pas au même ensemble produit puisque

$$(x, y) \in E \times F \quad \text{et} \quad (y, x) \in F \times E.$$

Copyrighted material

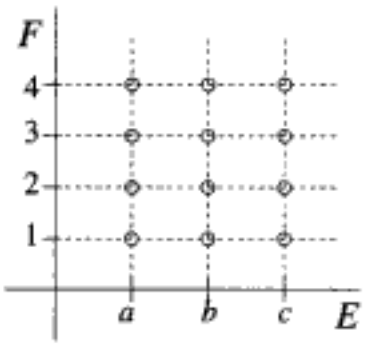


Fig. 4 Diagramme cartésien représentant l'ensemble produit $E \times F$ pour $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Les éléments de $E \times F$ sont représentés par des disques « ∘ ».

Enfin, dans un couple, deux éléments peuvent être égaux si les deux ensembles E et F ont des éléments en commun. Ainsi, si $z \in E \cap F$ alors on peut considérer le couple $(z, z) \in E \times F$. Par contre, on a $\{z, z\} = \{z\}$.

Exemples

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
2. Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. On a

$$\begin{aligned} E \times F \;=\; \Big\{ & (a,1),(a,2),(a,3),(a,4), \\ & (b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,1),(c,2),(c,3),(c,4) \Big\}. \end{aligned}$$

Le produit cartésien $E \times F$ est représenté sur la figure 4 sous une forme appelée ***diagramme cartésien***. Il contient 3×4 couples, autrement dit

$$\operatorname{card}(E \times F) = 12.$$

Le diagramme cartésien permet de compter tous les couples de $E \times F$ selon un balayage horizontal ou un balayage vertical.

- Utiliser un balayage horizontal revient à écrire

$$E \times F = \big(E \times \{1\}\big) \cup \big(E \times \{2\}\big) \cup \big(E \times \{3\}\big) \cup \big(E \times \{4\}\big)$$

  avec $E \times \{j\} = \big\{(a, j), (b, j), (c, j)\big\}$ et $\operatorname{card}\big(E \times \{j\}\big) = 3 \; \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Utiliser un balayage vertical revient à écrire

$$E \times F = \big(\{a\} \times F\big) \cup \big(\{b\} \times F\big) \cup \big(\{c\} \times F\big)$$

  avec $\{\ell\} \times F = \big\{(\ell, 1), (\ell, 2), (\ell, 3), (\ell, 4)\big\}$ et $\operatorname{card}\big(\{\ell\} \times F\big) = 4 \; \forall \ell \in \{a, b, c\}$.

Copyrighted material

C'est exactement cette manière de procéder que nous généralisons dans la démonstration suivante pour compter les éléments d'un produit cartésien.[2]

Proposition 2.4 *Soient E et F deux ensembles finis. On a*

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F).$$

Démonstration Désignons par n le cardinal de E et par m celui de F. On remarque que :

$$E \times F = \bigcup_{f \in F} (E \times \{f\}) \quad \text{avec} \quad (E \times \{f\}) \cap (E \times \{f'\}) = \emptyset \ \text{ si } \ f \neq f'.$$

On dit que l'on a utilisé un balayage horizontal. En utilisant la proposition 2.2 on en déduit

$$\operatorname{card}(E \times F) = \sum_{f \in F} \operatorname{card}(E \times \{f\}) = \underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ fois}} = m \times n,$$

c'est-à-dire, $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$; ce qui termine la démonstration. □

2.2 Relation, fonction, application

2.2.1 Relation

Définition 2.11 *Soient E et F deux ensembles.*

✗ *On appelle* **relation** *(on dit aussi* **correspondance***) $\mathcal{R}$ de E vers F tout triplet*

$$(E, \Gamma, F)$$

où Γ est une partie du produit cartésien $E \times F$. L'ensemble E s'appelle **l'ensemble de départ** *de $\mathcal{R}$, l'ensemble F s'appelle* **l'ensemble d'arrivée** *de $\mathcal{R}$ et le sous-ensemble Γ de $E \times F$ s'appelle le* **graphe** *de $\mathcal{R}$.*

✗ *Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x est en relation avec y par la relation $\mathcal{R}$, ce que l'on note*

$$x \mathcal{R} y.$$

L'élément y est appelé **image** *de x par $\mathcal{R}$ et l'élément x est appelé* **antécédent** *de y par $\mathcal{R}$.*

[2] La propriété de la proposition 2.4 se résume ainsi : le cardinal du produit est égal au produit des cardinaux. C'est là l'origine du mot « produit » dans produit cartésien.

Copyrighted material

Exemple Considérons les ensembles $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ et

$$\Gamma = \big\{(a,1), (a,2), (a,3), (b,3), (c,1), (c,3)\big\}.$$

On vérifie que Γ est un sous-ensemble de $E \times F$. Le triplet (E, Γ, F) définit donc une relation $\mathcal{R}$. On a

$$a\mathcal{R}1, \quad a\mathcal{R}2, \quad a\mathcal{R}3, \quad b\mathcal{R}3, \quad c\mathcal{R}1 \text{ et } c\mathcal{R}3.$$

On peut représenter cette relation (voir fig. 5) :

- soit à l'aide d'un ***diagramme sagittal*** dans lequel une flèche va de $x \in E$ vers $y \in F$ si $x\mathcal{R}y$,
- soit à l'aide d'un ***diagramme cartésien***.

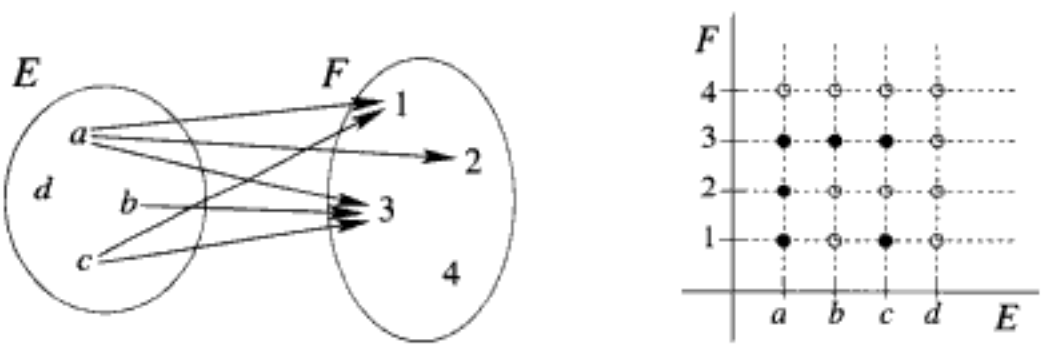


Fig. 5 Diagramme sagittal (dessin de gauche) et diagramme cartésien (dessin de droite) représentant la même relation $\mathcal{R} = (E, \Gamma, F)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\Gamma = \big\{(a,1), (a,2), (a,3), (b,3), (c,1), (c,3)\big\}$. Dans le diagramme cartésien, parmi les éléments de $E \times F$, ceux appartenant au graphe Γ sont représentés par des disques noirs « • ».

Remarque Comme l'illustre l'exemple précédent, dans une relation, un élément de l'ensemble de départ peut être en relation :

- soit avec plusieurs éléments de l'ensemble d'arrivée (par exemple l'élément a est lié à 1, à 2 et à 3),
- soit avec un seul élément de l'ensemble d'arrivée (par exemple l'élément b n'est lié qu'à 3),
- soit avec aucun élément de l'ensemble d'arrivée (par exemple l'élément d n'est lié à aucun élément de F).

Copyrighted material

2.2.2 Fonction

Définition 2.12 *Soient E et F deux ensembles. Une relation f d'ensemble de départ E, d'ensemble d'arrivée F et de graphe Γ est appelée une* **fonction de E vers F** *si tout élément de E est en relation avec* **au plus** *un élément de F (c'est-à-dire avec un élément ou avec aucun élément). On note alors*

$$f : E \longrightarrow F \quad ou \quad E \xrightarrow{f} F.$$

Soit $(x, y) \in \Gamma$. Pour signifier que y est en relation avec x par la fonction f, on écrit $y = f(x)$.

Remarques

1. Pour une fonction, nous abandonnons donc la notation xfy au profit de la notation $y = f(x)$.

2. Si y est en relation avec x par la fonction f alors y n'est plus **une** image de x mais **l'**image puisque, si elle existe, l'image est forcément unique.

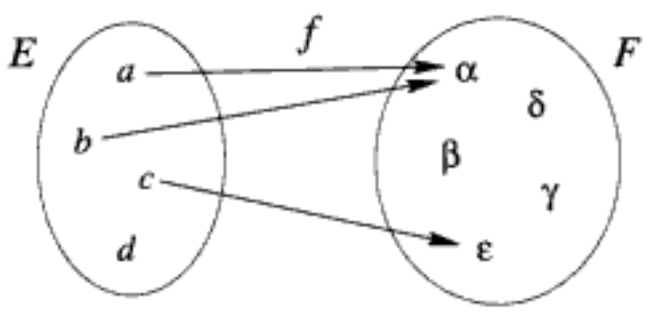


Fig. 6 Diagramme sagittal de la relation $f = (E, \Gamma, F)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \delta\}$ et $\Gamma = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (c, \varepsilon)\}$.

Exemples

1. La relation définie à la figure 6 est une fonction puisque de tout élément appartenant à l'ensemble de départ E, il ne part au plus qu'une seule flèche. On peut donc écrire :

$$f(a) = \alpha = f(b) \qquad \text{et} \qquad f(c) = \varepsilon.$$

Remarquons que d n'a pas d'image par f.

2. La relation $f = (\mathbb{R}, \Gamma, \mathbb{R})$ où $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1/(x-2)\}$ est une fonction que l'on note :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-2} \end{array} \quad \text{ou} \quad f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{x-2} \in \mathbb{R}.$$

Copyrighted material

Le réel 2 n'a pas d'image par f.

Remarque Soit f une fonction de E vers F. Si l'image d'un élément x de E par f existe, celle-ci est forcément unique. En revanche, si l'antécédent d'un élément y de F existe, alors il n'est pas forcément unique. Considérons par exemple la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$. L'antécédent de -1 par f n'existe pas et l'antécédent de 4 par f n'est pas unique puisque $f(-2) = f(2) = 4$. Les réels 2 et -2 sont deux antécédents de 4 par f.

Définition 2.13 *Soient E, F deux ensembles et f une fonction de E vers F. On appelle* **ensemble de définition** *(ou* **domaine de définition***) de la fonction f, et on note $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des éléments de E ayant une image par f. En d'autres termes :*

$$\mathcal{D}_f \overset{déf.}{=} \{x \in E \mid \exists y \in F \ y = f(x)\}.$$

Le domaine de définition est un sous-ensemble de l'ensemble de départ.

Exemples

1. Reprenons l'exemple de la fonction $f : \{a, b, c, d\} \longrightarrow \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \delta\}$ définie par $f(a) = \alpha = f(b)$ et $f(c) = \varepsilon$ (voir la fig. 6). On a $\mathcal{D}_f = \{a, b, c\}$.
2. Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1/(x-2) \in \mathbb{R}$. On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
3. Soit la fonction $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$. On a $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

2.2.3 Application

Définition 2.14 *Soient E et F deux ensembles. Une fonction f de E vers F est appelée une* **application** *si son domaine de définition est E, c'est-à-dire si*

$$\mathcal{D}_f = E.$$

L'ensemble des applications de E vers F est noté F^E ou $\mathcal{A}(E, F)$.[3]

Exemple Considérons les deux applications de la figure 7. La fonction f n'est pas une application car l'élément $d \in E$ n'a pas d'image par f, autrement dit car $\mathcal{D}_f = \{a, b, c\}$ est strictement inclus dans E :

$$\mathcal{D}_f = \{a, b, c\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_f \neq E.$$

En revanche la fonction g est une application puisque tout élément de l'ensemble de départ E possède une image par g, autrement dit puisque $\mathcal{D}_g = E$.

[3] Dans la notation F^E, l'exposant correspond à l'ensemble de départ.

Copyrighted material

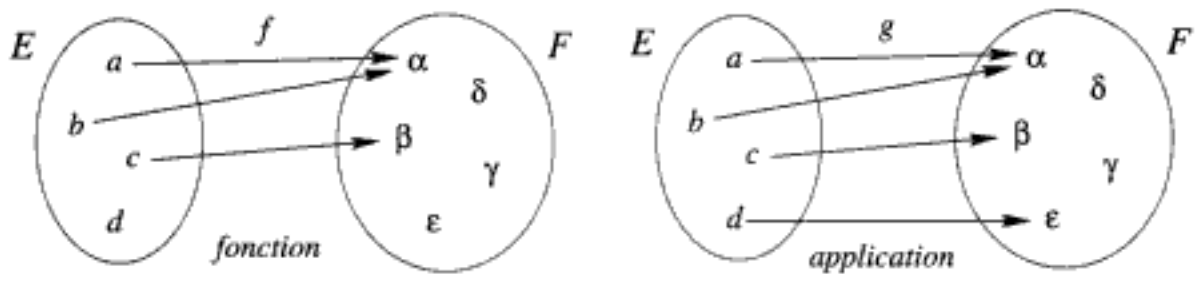


Fig. 7 Diagrammes sagittals représentant une fonction $f : E \longrightarrow F$ (dessin de gauche) et une application $g : E \longrightarrow F$ (dessin de droite) avec $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma, \varepsilon\}$.

Définition 2.15 *Soient f et g deux applications de E vers F. On dit que les applications f et g sont* **égales**, *et on note $f = g$, si :*

$$\forall x \in E \quad f(x) = g(x).$$

Définition 2.16 *Soient E, F deux ensembles et f une application de E vers F. On appelle* **image d'un sous-ensemble A de E par f** *le sous-ensemble de F, noté $f(A)$, défini par*

$$f(A) \overset{déf.}{=} \{f(x) \mid x \in A\}.$$

En particulier, on appelle **image de f**, *et on note $f(E)$, l'image de E par f. Autrement dit,*

$$f(E) \overset{déf.}{=} \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Étant donnés une application $f : E \longrightarrow F$ et un sous-ensemble A de E, on vérifie facilement que l'image de A par f est un sous-ensemble de $f(E)$, qui est lui-même un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée F. En d'autres termes (voir la fig. 8),

$$A \subset E \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subset f(E) \subset F.$$

Exemples

1. Soit l'application $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$. On a $f(\mathbb{R} \setminus \{2\}) = \mathbb{R}^*$.

2. Soit l'application $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$. On a $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Copyrighted material

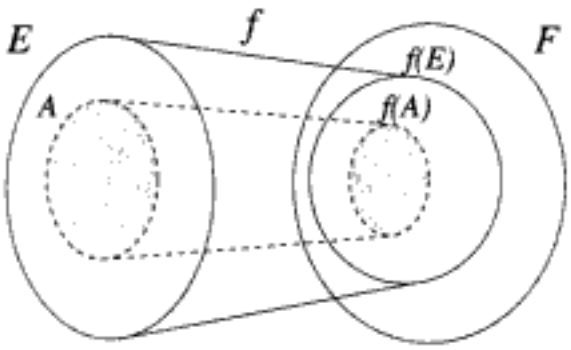


Fig. 8 Illustration de la propriété : étant donnée une application f de E vers F, si $A \subset E$ alors $f(A) \subset f(E) \subset F$.

Définition 2.17 *Soit E un ensemble. L'application de E vers E qui à x associe x se note* id_E *et s'appelle l'**identité de** E. On a*

$$\mathrm{id}_E : x \in E \longrightarrow x \in E.$$

Résolution d'une équation : généralités

On désigne par E et F deux ensembles. On considère l'équation (E) suivante

$$\text{(E)} \quad f(x) = b$$

où $f : E \longrightarrow F$ est une application, x un élément de l'ensemble de départ E et b un élément de l'ensemble d'arrivée F. Résoudre l'équation (E), c'est trouver tous les éléments x appartenant à E qui vérifient cette équation et on dit que les ***données*** du problème sont l'application $f : E \longrightarrow F$ et le second membre $b \in F$; l'***inconnue*** du problème est $x \in E$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E). Cet ensemble est constitué des éléments de E qui ont pour image l'élément $b \in F$ par f. Autrement dit,

$$\mathcal{S} \overset{déf.}{=} \{x \in E \mid f(x) = b\}.$$

Etant donnés l'application $f : E \longrightarrow F$ et le second membre $b \in F$, la résolution d'une telle équation peut conduire aux cas suivants. Il peut arriver que l'équation (E) n'admette pas de solution (on a alors $\mathcal{S} = \emptyset$). On dit que l'équation (E) est ***impossible***. Cela arrive lorsque b n'appartient pas à l'image de f. Autrement dit

$$\mathcal{S} = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad b \notin f(E).$$

Dans le cas contraire ($b \in f(E)$), l'équation (E) est dite ***possible***. En effet, $b \in f(E)$ signifie qu'il existe au moins un élément $\tilde{x} \in E$ tel que $f(\tilde{x}) = b$. Deux cas peuvent alors se produire :

Copyrighted material

- il se peut que $\tilde{x}$ soit l'unique solution. Trouver $\tilde{x}$, c'est résoudre complètement l'équation (E) ;
- il se peut qu'il en existe d'autres. Trouver une solution $\tilde{x}$, c'est résoudre partiellement l'équation (E).

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à x associe x^2. On vérifie que

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+.$$

- Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution car $-4 \notin f(\mathbb{R})$. On a

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

- Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 0$ possède une solution puisque $0 \in f(\mathbb{R})$. On a

$$\mathcal{S} = \{0\}.$$

- Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = 4$ possède une solution puisque $4 \in f(\mathbb{R})$. On a

$$\mathcal{S} = \{-2, 2\}.$$

Remarque Une mauvaise rédaction due à une erreur de raisonnement peut conduire à écrire des absurdités, comme en témoigne l'énoncé suivant. Lisez-le attentivement. À première vue, le raisonnement suivi semble correct et apparemment sans faille. Ce n'est bien sûr qu'une illusion car, tel un couperet, le résultat final « $1 = -2$ » est là pour indiquer qu'une erreur a de toute évidence été commise. Sauriez-vous indiquer à quel endroit se trouve l'erreur dans le raisonnement ? (la réponse est donnée en fin d'énoncé)
Considérons dans $\mathbb{R}$ *l'équation suivante*

$$x^2 = x - 1. \tag{1}$$

Puisque 0 *ne vérifie pas cette équation, divisons par* x *membre à membre. Après réarrangement des termes, nous obtenons*

$$-\frac{1}{x} = x - 1. \tag{2}$$

En regroupant les deux égalités (1) et (2), nous en déduisons la troisième égalité

$$x^2 = -\frac{1}{x}. \tag{3}$$

Finalement, puisque x *est non nul, nous multiplions par* x *l'égalité (3) pour obtenir l'équation*

$$x^3 = -1 \tag{4}$$

Copyrighted material

dont -1 est de toute évidence une solution. Injectons cette solution dans l'égalité (1). Nous obtenons finalemant que

$$1 = -2.$$

SOLUTION Notons $\mathcal{S}_1$ (respectivement $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$) l'ensemble des solutions de l'équation (1) (resp. des équations (2), (3) et (4)). Toute solution de l'équation (1) est solution de l'équation (2), et inversement (il n'y a pas d'erreur dans l'énoncé à ce niveau-là). On a ainsi l'équivalence

$$\text{« } x \in \mathcal{S}_1 \iff x \in \mathcal{S}_2 \text{ ».}$$

De même, toute solution de l'équation (3) est solution de l'équation (4), et inversement (il n'y a là non plus pas d'erreur dans l'énoncé). On a l'équivalence

$$\text{« } x \in \mathcal{S}_3 \iff x \in \mathcal{S}_4 \text{ ».}$$

Intéressons-nous maintenant au passage de l'équation (2) à l'équation (3). Si x est solution de (2) alors x vérifie les équations $-1/x = x - 1$ et $x^2 = x - 1$. Donc $x^2 = -1/x$ et $x \in \mathcal{S}_3$. On a l'implication

$$\text{« } x \in \mathcal{S}_2 \implies x \in \mathcal{S}_3 \text{ ».}$$

Par contre, la réciproque est fausse : $\mathcal{S}_3$ n'est pas inclus dans $\mathcal{S}_2$ puisqu'il est clair que $-1 \in \mathcal{S}_3$ mais $-1 \notin \mathcal{S}_2$. Autrement dit, toute solution de (3) n'est pas solution de (2). L'erreur s'est donc produite à ce niveau-là de l'énoncé. Elle vient du fait que cette implication a été traitée comme une équivalence. Moralité, une rédaction rigoureuse est nécessaire.

Application composée

Définition 2.18 *Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle* **application composée** *de f et g l'application de E vers G, notée $g \circ f : E \longrightarrow G$, définie par :*

$$\forall x \in E \quad (g \circ f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} g(f(x)).$$

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On a les inclusions (illustrées sur la fig. 9) :

$$(g \circ f)(E) \subset g(F) \subset G.$$

Remarques

1. Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont deux applications alors l'application composée $g \circ f$ a bien un sens : c'est une application de E vers G et on note de façon symbolique

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \quad \text{et} \quad E \xrightarrow{g \circ f} G.$$

Copyrighted material

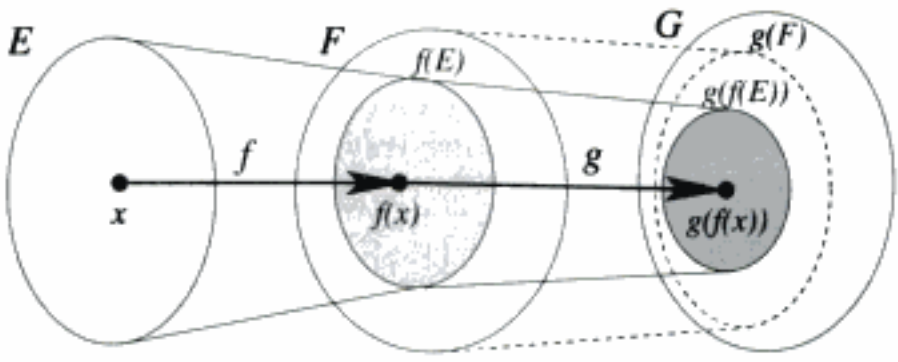


Fig. 9 Illustration de la propriété : $(g \circ f)(E) \subset g(F) \subset G$.

En revanche, l'application composée $f \circ g$ n'est pas définie sauf si $g(F) \subset E$. On dit que la composition n'est pas commutative.

2. Soient E, F, G et H des ensembles. On vérifie que pour toutes applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$, on a

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\,.$$

On dit que la composition est associative.

3. Soit f une application de l'ensemble E dans lui-même. L'application composée $f \circ f$ est elle-même une application de E dans E. On la note f^2. Plus généralement, l'application obtenue en composant k fois ($k \in \mathbb{N}^*$) l'application f avec elle-même est encore une application de E dans lui-même. On la note

$$f^k \overset{not.}{=} \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$$

et par convention on a : $f^0 = \mathrm{id}_E$.

2.2.4 Injection, surjection, bijection

Définition 2.19 *Soient E et F deux ensembles. Une application f de E vers F est une* **injection** *(ou est une application* **injective***) si tout élément de F admet* **au plus** *un antécédent par f (c'est-à-dire un ou aucun). Cela se traduit par :*

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad \Big(f(x) = f(x') \implies x = x' \Big).$$

Par contraposition, une application $f : E \longrightarrow F$ est injective si

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad \Big(x \neq x' \implies f(x) \neq f(x') \Big),$$

Copyrighted material

c'est-à-dire si deux éléments (de E) distincts ont nécessairement des images distinctes.

Par conséquent, l'application $f : E \longrightarrow F$ est ***non injective*** s'il existe deux éléments (de E) distincts qui ont même image. D'après les règles de négation, la proposition « f n'est pas injective » se traduit par :

$$\exists\,(x, x') \in E^2 \quad \Big(x \neq x' \ \text{ et } \ f(x) = f(x') \Big).$$

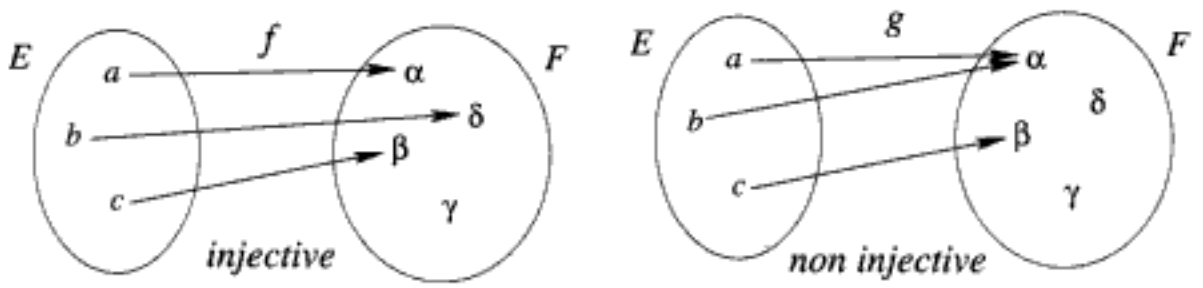


Fig. 10 Diagrammes sagittals de l'application $f : E \longrightarrow F$ (dessin de gauche) et de l'application $g : E \longrightarrow F$ (dessin de droite), avec $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$.

Exemple Considérons les deux applications de la figure 10. L'application f est injective. En revanche, l'application g n'est pas injective puisqu'il existe deux éléments disctincts de l'ensemble de départ (à savoir les éléments a et b) qui ont même image par g : $g(a) = g(b) = \alpha$.

Définition 2.20 *Soient E et F deux ensembles. Une application f de E vers F est une* **surjection** *(ou est une application* **surjective***) si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet* **au moins** *un antécédent par f (c'est-à-dire un ou plusieurs). Cela se traduit par :*

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

Il est immédiat de vérifier qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f de E dans F soit surjective est que l'on ait

$$f(E) = F,$$

c'est-à-dire que l'on ait $f(E) \subset F$ et $F \subset f(E)$. Remarquons que l'inclusion $f(E) \subset F$ est automatiquement vérifiée puisque l'image de f est un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée. Ainsi, pour montrer qu'une application f de E vers F est surjective, il est suffisant de vérifier l'inclusion

$$F \subset f(E).$$

Copyrighted material

Une application $f : E \longrightarrow F$ est ***non surjective*** si, et seulement si,

$$f(E) \subset F \qquad \text{et} \qquad f(E) \neq F,$$

autrement dit, si, et seulement si, $f(E)$ est ***strictement inclus*** dans F.

Exemple Considérons les deux applications de la figure 11. L'application f est surjective car

$$f\big(\{a,b,c,d\}\big) = \{\alpha,\beta,\delta\} = F.$$

En revanche, l'application g n'est pas surjective puisqu'il existe un élément de l'ensemble d'arrivée (à savoir δ) qui ne possède pas d'antécédent par g. Autrement dit, l'application g n'est pas surjective car

$$g\big(\{a,b,c,d\}\big) = \{\alpha,\beta\} \neq \{\alpha,\beta,\delta\}.$$

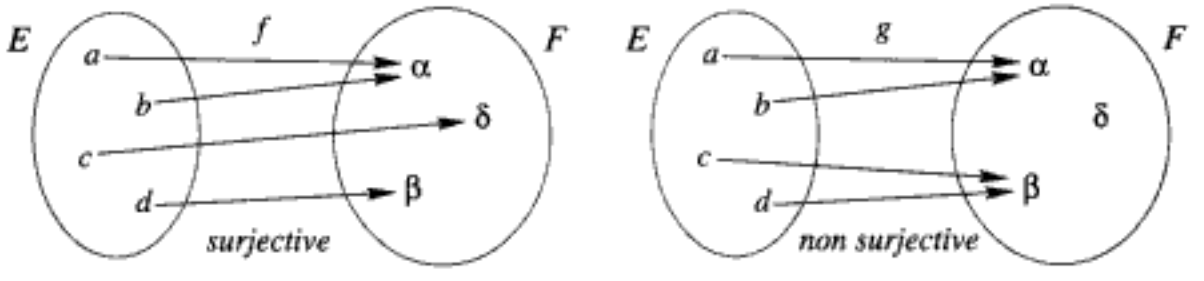


Fig. 11 Diagrammes sagittals de l'application $f : E \longrightarrow F$ (dessin de gauche) et de l'application $g : E \longrightarrow F$ (dessin de droite) avec $E = \{a,b,c,d\}$ et $F = \{\alpha,\beta,\delta\}$.

Remarque Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G. On a les propriétés suivantes.

- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. En effet, considérons x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Appliquons g à cette égalité. On a

  $$g(f(x)) = g(f(x')).$$

  On en déduit $x = x'$ puisque $g \circ f$ est injective.

- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. Soit z un élément de G. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe (au moins) un élément x appartenant à E tel que

  $$g(f(x)) = z.$$

  Il existe donc (au moins) un élément y appartenant à F tel que $g(y) = z$. Il suffit en effet de prendre $y = f(x)$.

Copyrighted material

Définition 2.21 *Soient E et F deux ensembles. Une application f de E vers F est une* **bijection** *(ou une application* **bijective**[4]*) si elle est à la fois surjective et injective. En d'autres termes, $f : E \longrightarrow F$ est bijective si tout élément de F admet un unique antécédent par f :*

$$\forall y \in F \quad \exists ! \, x \in E \quad y = f(x).$$

S'il existe une bijection entre E et F, alors on dit que les deux ensembles E et F sont **équipotents** *(ou qu'***ils ont la même puissance***).*

Pour qu'une application ne soit pas bijective, il suffit qu'elle ne soit pas injective ou qu'elle ne soit pas surjective.

La propriété de bijectivité de $f : E \longrightarrow F$ signifie en particulier qu'à tout élément y de F on peut associer un unique élément x de E. Ceci nous amène à la définition suivante.

Définition 2.22 *Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. L'application notée*

$$f^{-1} : F \longrightarrow E$$

qui à y appartenant à F lui associe l'unique élément x appartenant à F tel que $y = f(x)$ est appelée **application réciproque de f** *(ou* **bijection réciproque de** *f). Autrement dit, l'application f^{-1} est définie pour tout $y \in F$ par :*

$$f^{-1}(y) = x \quad si \quad y = f(x).$$

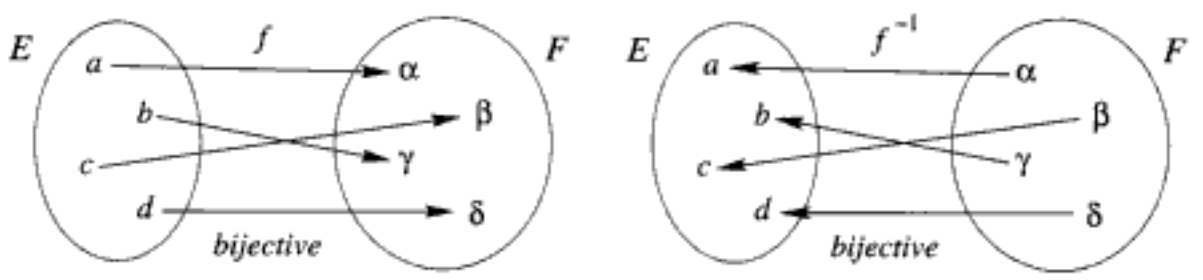


Fig. 12 Diagramme sagittal de l'application $f : E \longrightarrow F$ (dessin de gauche) et diagramme sagittal de son application réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ (dessin de droite) avec $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

[4] On parle aussi de ***correspondance biunivoque*** entre les éléments de E et ceux de F.

Copyrighted material

Exemples

1. L'application représentée sur le dessin de gauche de la figure 12 est bijective. Son application réciproque est représentée sur le dessin de droite de cete même figure. C'est aussi une application bijective.

2. L'application $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Sa bijection réciproque est l'application

$$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+.$$

3. L'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x) \in \mathbb{R}_+^*$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est l'application

$$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}.$$

On a les propriétés suivantes.

Proposition 2.5 *Soit f une application de E vers F.*

✗ *Si f est bijective alors son application réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est elle-même bijective et elle vérifie*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F.$$

✗ *S'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que*

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Démonstration ⊵ La propriété de bijectivité de l'application f^{-1} et la propriété $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ sont immédiates. Montrons la propriété $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit x un élément de E et y son image par f. On a

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.$$

On a ainsi vérifié que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in E$, donc que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$. Enfin, montrons la propriété $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$. Soit y un élément de F et x son image par f^{-1}. On a

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

On a ainsi vérifié que $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in F$, donc que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

⊵ Supposons qu'il existe une application g de F dans E telle que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F.$$

Copyrighted material

Rappelons que l'application identité est bijective. Elle est donc à la fois surjective et injective. De $g \circ f = \mathrm{id}_E$ on déduit que $g \circ f$ est injective et donc que f est injective. De $f \circ g = \mathrm{id}_E$ on déduit que $g \circ f$ est surjective et donc que f est surjective. L'application f est donc bijective et g est nécessairement son application réciproque. □

Exercice 2 *Pour chacune des fonctions $f : E \longmapsto F$ proposées dans la colonne de gauche, indiquer dans les colonnes correspondantes le domaine de définition $\mathcal{D}_f$, s'il s'agit d'une application, son image $f(E)$ si f est une application, et, le cas échéant, si l'application est injective, surjective, bijective.*

Fonction $f : E \longmapsto F$	$\mathcal{D}_f$	*Appl.*	$f(E)$	*Inj., surj., bij.*
$x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$				
$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$				
$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}^*$				
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & si\ x = 2 \\ 1/x-2 & sinon \end{cases} \end{array}$				
$x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$				
$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$				
$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$				
$x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$				
$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$				
$x \in]1, +\infty[\longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}_+^*$				
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$				
$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$				

Remarque Supposons que l'on ait déjà montré qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective. Si on trouve une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ (respectivement telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$) alors on a forcément

$$g = f^{-1}.$$

Cela s'obtient en composant à droite l'égalité $g \circ f = \mathrm{id}_E$ (resp. à gauche l'égalité $f \circ g = \mathrm{id}_F$) par f^{-1}.

Copyrighted material

Proposition 2.6 *Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G. On a les propriétés suivantes.*

1. *Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration 1. Supposons les deux applications f et g injectives, et montrons que l'application composée $g \circ f : E \longrightarrow F$ est, elle-aussi, injective. Autrement dit, montrons que

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad \Big((g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x' \Big).$$

Considérons x et x' deux éléments de E tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, c'est-à-dire tels que

$$g(f(x)) = g(f(x')).$$

Puisque g est injective, il vient

$$f(x) = f(x').$$

De même, puisque f est injective, on en déduit $x = x'$.

2. Supposons maintenant les deux applications f et g surjectives, et montrons que l'application composée $g \circ f$ est, elle-aussi, surjective. En d'autres termes, montrons que :

$$\forall z \in G \quad \exists x \in E \quad (g \circ f)(x) = z.$$

Soit z un élément de G. La propriété de surjectivité de g nous assure l'existence d'(au moins) un élément y appartenant à F tel que $g(y) = z$. De même, la propriété de surjectivité de f nous assure l'existence d'(au moins) un élément x appartenant à E tel que $f(x) = y$. Par conséquent, il existe (au moins) un élément $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$, c'est-à-dire tel que

$$(g \circ f)(x) = z,$$

ce qui termine la démonstration.

3. On déduit de ce qui précède que si les deux applications f et g sont à la fois injectives et surjectives alors l'application composée $g \circ f$ est, elle-aussi, à la fois injective et surjective. On est donc assuré de l'existence des applications $f^{-1} : F \longrightarrow E$, $g^{-1} : G \longrightarrow F$ et $(g \circ f)^{-1} : G \longrightarrow E$. De plus, on vérifie

$$\begin{array}{rcll} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) & = & f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f & \text{car } \circ \text{ est associative} \\ & = & f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f & \text{car } g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_F \\ & = & f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E. & \end{array}$$

On en déduit directement que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Il est inutile de vérifier l'égalité $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_G$. □

Copyrighted material

Exercice 3 *Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*
1 - Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.
2 - Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.

Remarque Si E et F sont deux ensembles finis et si f est une application de E vers F, on a alors les implications suivantes :

1. si f est surjective alors $\text{card}(E) \geqslant \text{card}(F)$;
2. si f est injective alors $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$;
3. si f est bijective alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

Il est à noter que ce n'est pas tant ces implications qui nous intéressent le plus, mais plutôt leurs contraposées. Par exemple, si E et F sont deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) < \text{card}(F)$, alors on peut en déduire, en utilisant la contraposée de la première implication, qu'il n'existe pas d'application de E vers F qui soit surjective.

Permutation, transposition

Définition 2.23 ✗ *Soit n un entier naturel non nul. On appelle* **permutation** *de $\{1, 2, \ldots, n\}$ toute application bijective σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans lui-même.*

✗ *Soient $n \geqslant 2$ et i, j deux éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$. La permutation $\tau_{i,j}$ définie par*

$$\tau_{i,j}(i) = j, \quad \tau_{i,j}(j) = i \qquad \text{et} \quad \tau_{i,j}(k) = k \ \text{ si } \ k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$$

est appelée **transposition**. *On dit qu'elle échange i et j et laisse invariants les éléments de $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$.*

Il y a $n!$ bijections de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans lui-même. Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{card}(\mathfrak{S}_n) = n!$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Par commodité, une permutation $i \longmapsto \sigma(i)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est notée :

$$\sigma \overset{not.}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

où les éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ sont disposés en ligne et où l'image d'un élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est placée juste au-dessous de cet élément. Par exemple, la permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ qui à 1 associe 4, à 2 associe 3, à 3 associe 1 et à 4 associe 2, est notée

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Copyrighted material

Pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $n \geqslant 2$, on vérifie que

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \Big(\tau_{i,j}(k) = \tau_{j,i}(k) \qquad \text{et} \qquad (\tau_{i,j} \circ \tau_{i,j})(k) = k \Big),$$

c'est-à-dire que $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$ (échanger i et j revient à échanger j et i) et $\tau_{i,j}^{-1} = \tau_{i,j}$ (échanger deux fois revient à ne rien faire).

Exemples

1. On a $\mathfrak{S}_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ avec $\sigma_1 = \mathrm{id}_{\{1,2\}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $\sigma_2 = \tau_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. On a $\mathfrak{S}_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ avec

$$\sigma_1 = \mathrm{id}_{\{1,2,3\}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \tau_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3 = \tau_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_4 = \tau_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_5 = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_6 = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Résolution d'une équation : compléments

Reprenons la discussion sur la résolution d'une équation abordée au paragraphe 2.2.3. Soient E et F deux ensembles, on désire résoudre l'équation (E) suivante

$$(\mathrm{E}) \quad f(x) = b$$

où l'application $f : E \longrightarrow F$ et l'élément $b \in F$ sont les données du problème. Que se passe-t-il si l'application f est injective, surjective ou bijective ?

- Si l'application f est *surjective* alors tout élément b de F appartient à $f(E)$. L'équation (E) admet alors (au moins) une solution pour n'importe quel élément b appartenant à F. Autrement dit,

$$\forall b \in F \quad \mathcal{S} \neq \emptyset.$$

  Cette solution n'est d'ailleurs peut-être pas unique.

- Si f est *injective* alors l'équation (E) admet une solution unique à la condition que b appartienne à $f(E)$, c'est-à-dire :

$$b \in f(E) \implies \mathrm{card}(\mathcal{S}) = 1.$$

- Si maintenant f est *bijective* alors l'équation (E) admet une solution pour n'importe quel b appartenant à F (puisque f et surjective) et cette solution est unique (puisque f est injective), autrement dit,

$$\forall b \in F \quad \exists ! \, x \in E \quad f(x) = b,$$

  ou encore, $\forall b \in F \ \mathrm{card}(\mathcal{S}) = 1$.

Copyrighted material

En résumé,

- la propriété de surjectivité de f nous assure l'existence d'une solution mais pas son unicité ;
- la propriété d'injectivité de f nous assure que si une solution existe alors elle est unique ;
- enfin, la propriété de bijectivité de f nous assure à la fois l'existence d'une solution et son unicité.

2.2.5 Puissance du dénombrable, puissance du continu

Revenons un instant sur la définition de cardinal d'un ensemble. D'après la définition 2.1, un ensemble E est fini lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel.[5] Dans ce cas, ce nombre est appelé cardinal de l'ensemble, et il est noté $\text{card}(E)$. Sa détermination suppose que l'on sache compter les éléments de E. L'opération de comptage des éléments d'un ensemble fini est assez intuitive. En pratique, elle revient à établir une correspondance biunivoque[6] entre tous les éléments de E et ceux d'un ensemble fini d'entiers naturels. Autrement dit, elle revient à exhiber un entier n non nul et une bijection

$$\{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow E$$

et à conclure que $\text{card}(E) = n$. Il est alors clair que tout ensemble F équipotent à E est fini et de même cardinal que E : ils ont le même nombre d'éléments. Dans le langage courant, on dit que E et F sont de « même taille ». On peut alors reformuler la définition d'un ensemble infini. C'est un ensemble qui ne peut pas être mis en bijection avec un ensemble fini d'entiers naturels.

La notion de bijection est un outil rigoureux pour l'étude des ensembles infinis.

Définition 2.24 *On dit qu'un ensemble infini E est* ***dénombrable*** *(ou qu'il possède la* ***puissance du dénombrable****) lorsqu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E.*

Exemples

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs est dénombrable puisqu'on peut expliciter (au moins) une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. C'est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

[5] Rappelons qu'un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

[6] ce qui permet de ne pas confondre deux éléments distincts et de n'en oublier aucun lors du comptage.

Copyrighted material

On a par exemple les correspondances suivantes

$$\begin{array}{rcr} 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & -1 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & -2 \\ 4 & \longmapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 5 & \longmapsto & -3 \\ 6 & \longmapsto & 3 \\ 7 & \longmapsto & -4 \\ 8 & \longmapsto & 4 \\ & \ldots & \end{array}$$

2. Le produit cartésien $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. En effet, il suffit de considérer l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \frac{(p+q) \times (p+q+1)}{2} + q \in \mathbb{N}.$$

C'est une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$. Par exemple, on a les correspondances

$$\begin{array}{rcr} (0,0) & \longmapsto & 0 \\ (1,0) & \longmapsto & 1 \\ (0,1) & \longmapsto & 2 \\ (2,0) & \longmapsto & 3 \\ (1,1) & \longmapsto & 4 \\ (0,2) & \longmapsto & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} (3,0) & \longmapsto & 6 \\ (2,1) & \longmapsto & 7 \\ (1,2) & \longmapsto & 8 \\ (0,3) & \longmapsto & 9 \\ (4,0) & \longmapsto & 10 \\ & \ldots & \end{array}$$

On peut montrer que toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable, que l'union de deux ensembles dénombrables est dénombrable et que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une conséquence de ces propriétés est que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est lui-aussi dénombrable. Les trois ensembles fondamentaux $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont donc des ensembles infinis de « même taille ».

La notion de bijection permet de distinguer d'autres types d'infinis, dont le plus classique est la puissance du continu.

Définition 2.25 *On dit qu'un ensemble infini E possède la* ***puissance du continu*** *lorsqu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}$ et E.*

On peut montrer que $\mathbb{R}$ est équipotent à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$. On peut aussi montrer qu'un ensemble ne peut pas être équipotent à l'ensemble de ses parties (théorème fondamental de Cantor). Ces deux résultats sont admis. Cela met en évidence une hiérarchie des infinis, et en ce sens, on dit que la puissance du continu est strictement supérieure à celle du dénombrable, ce que l'on résume en écrivant

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

où le symbole $\aleph_0$ désigne la puissance du dénombrable et $\aleph_1$ celle du continu.[7] En utilisant le langage courant, on peut dire que l'ensemble infini $\mathbb{R}$ est « de taille strictement supérieure » à celle des ensembles infinis $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

[7] Le symbole $\aleph$ (on dit aleph) est la première lettre de l'alphabet hébreu. Rappelons que pour tout ensemble fini E ayant n éléments, le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est égal à 2^n. Par analogie avec le cas fini, le symbole $\aleph_1$ désignant la puissance du continu est parfois noté $2^{\aleph_0}$ puisque $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Copyrighted material

CANTOR, Georg Ferdinand (1845, Saint-Pétersbourg - 1918, Halle, Allemagne).

Professeur de mathématiques à l'Université de Halle, il fut un des principaux fondateurs de la théorie des ensembles. C'est en constatant (avec son ami mathématicien Richard Dedekind) qu'il existait une hiérarchie dans les ensembles infinis, que Cantor fut amené à introduire de nouveaux nombres, les ordinaux *transfinis*, et à définir une arithmétique sur ces nombres. Ses résultats, révolutionnaires pour l'époque, bouleversèrent les fondements des mathématiques, jusqu'à s'attirer les inimitiés d'autres grands savants comme le mathématicien allemand Leopold Kronecker qui l'empêcha de publier. Souffrant de dépression et de schizophrénie, il se désintéressa progressivement des mathématiques pour se consacrer, sur la fin de sa vie, à l'histoire et à la littérature anglaise.

Exemples

1. Tout intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un élément et non vide, est équipotent à $\mathbb{R}$. C'est le cas, par exemple, de l'intervalle $]-1,7[$ puisque l'application

$$x \in]-1,7[\longmapsto \tan\Big(\frac{\pi(x-3)}{8}\Big) \in \mathbb{R}$$

définit une bijection entre l'intervalle $]-1,7[$ et $\mathbb{R}$.

2. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels n'est pas dénombrable. Utilisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que l'ensemble infini $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ soit dénombrable. Alors, l'union de deux ensembles dénombrables étant dénombrable, l'ensemble $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ serait aussi dénombrable, ce qui est absurde puisque $\mathbb{R}$ possède la puissance du continu.

3. On peut montrer que le produit cartésien de deux ensembles équipotents à $\mathbb{R}$ possède la puissance du continu. Ainsi, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes possède la puissance du continu. Les deux ensembles infinis $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont donc « de même taille ».

Remarque Il existe une bijection entre l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et le sous-ensemble constitué des entiers naturels pairs. De même, il existe une bijection entre l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et l'intervalle $]a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Plus généralement, on peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit infini est qu'il existe une bijection entre E et une de ses parties, distincte de E.

2.2.6 Restriction et prolongement d'une application

Rappelons qu'une application est un triplet constitué d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée, et d'un graphe, ce dernier nous indiquant le mode opé-

Copyrighted material

ratoire de l'application. Changer l'ensemble de départ et/ou l'ensemble d'arrivée revient à définir une nouvelle application. Intéressons-nous dans un premier temps à l'espace de départ.

Définition 2.26 *Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.*

✗ *Soit A un sous-ensemble de l'ensemble de départ E. On appelle* **restriction de f à A** *l'application de A vers F, notée $f\big|_A : A \longrightarrow F$, définie par :*

$$\forall x \in A \quad f\big|_A(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(x).$$

✗ *Soit E' un ensemble tel que $E \subset E'$. On appelle* **prolongement de f à E'** *toute application $g : E' \longrightarrow F$ telle que :*

$$\forall x \in E \quad g(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(x).$$

Autrement dit, l'application $g : E' \longrightarrow F$ est un prolongement de l'application $f : E \longrightarrow F$ à E' si

$$g\big|_E = f.$$

Remarque Étant donnés une application $f : E \longrightarrow F$ et un ensemble E' tel que $E \subset E'$, on n'a pas en général l'unicité du prolongement de f à E'. Par exemple, l'application

$$f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$$

admet une infinité de prolongements à $\mathbb{R}$. Ce sont les applications $g_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que :

$$g_\alpha(0) = \alpha \quad \text{et} \quad g_\alpha(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^*.$$

En particulier, le prolongement correspondant à la valeur $\alpha = 1$ est qualifié de prolongement par continuité en 0 de f car[8] $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Intéressons-nous à présent à l'espace d'arrivée.

Définition 2.27 *Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit B un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée F telle que $f(E) \subset B$. On appelle* **application à valeurs dans B induite par f** *l'application notée $f\big|^B : E \longrightarrow B$ et définie par*

$$\forall x \in E \quad f\big|^B(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(x).$$

[8] voir la définition 13.6 donnée en page 592.

Copyrighted material

Exemple L'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x) \in \mathbb{R}$ est injective mais elle n'est pas surjective puisque son image, l'ensemble $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, est strictement incluse dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. Elle n'est donc pas bijective. En revanche, l'application

$$f\big|^{\mathbb{R}_+^*} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(x) \in \mathbb{R}_+^*$$

est bijective. Son application réciproque est l'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

Remarque Soit une application $f : E \longrightarrow F$ *a priori* ni injective, ni surjective. Intéressons-nous en particulier à l'application

$$f\big|^{f(E)} : E \longrightarrow f(E).$$

Nous l'avons appelée « application à valeurs dans $f(E)$ induite par f ».

- Par construction, $f\big|^{f(E)}$ est surjective. Cela signifie qu'il est toujours possible, à partir d'une application f quelconque, de construire une application surjective. Il suffit de restreindre l'ensemble d'arrivée à l'image de f.
- Si de plus f est injective alors $f\big|^{f(E)}$ est bijective.

Exemple Considérons les applications f, g, h et ϕ suivantes :

$$x \in \mathbb{R} \overset{f}{\longmapsto} \sin x \in \mathbb{R}, \qquad x \in [-\pi/2, \pi/2] \overset{g}{\longmapsto} \sin x \in \mathbb{R},$$
$$x \in \mathbb{R} \overset{h}{\longmapsto} \sin x \in [-1, 1], \quad x \in [-\pi/2, \pi/2] \overset{\phi}{\longmapsto} \sin x \in [-1, 1].$$

Ces quatre applications sont différentes (bien que leur mode opératoire soit le même) puisque leurs ensembles de départ ou d'arrivée sont différents. Remarquons que l'application f n'est ni injective, ni surjective. On peut dire que g est la restriction de f à $[-\pi/2, \pi/2]$ ou que f est un prolongement de g à $\mathbb{R}$. On écrit

$$g = f\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}.$$

L'application g est injective mais non surjective. Puisque $f(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$, on peut dire que h est l'application à valeurs dans $[-1, 1]$ induite par f et on écrit

$$h = f\big|^{[-1,1]}.$$

Il est à noter que l'application h est surjective. Elle n'est en revanche pas injective. Enfin, on peut écrire

$$\phi = h\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}, \quad \phi = g\big|^{[-1,1]} \quad \text{et} \quad \phi = f\big|^{[-1,1]}_{[-\pi/2,\pi/2]}.$$

Remarquons que l'application ϕ est à la fois injective et surjective. Elle est donc bijective.

Copyrighted material

2.2.7 Relation d'équivalence sur un ensemble

Définition 2.28 *Soit E un ensemble non vide. Une relation $\mathcal{R}$ de E dans lui-même est appelée une* **relation d'équivalence** *sur E si elle vérifie les trois conditions suivantes :*

- $\mathcal{R}$ *est* **réflexive** *:* $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$;
- $\mathcal{R}$ *est* **symétrique** *:* $\forall (x,y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$;
- $\mathcal{R}$ *est* **transitive** *:* $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

Autrement dit, le fait qu'une relation $\mathcal{R}$ soit une relation d'équivalence sur E, signifie que :

- tout élément x de E est en relation avec lui-même par $\mathcal{R}$;
- si un élément x de E est en relation avec un élément y de E par $\mathcal{R}$, alors y est en relation avec x par $\mathcal{R}$;
- si un élément x de E est en relation avec un élément y de E et si y est en relation avec un élément z de E alors x est en relation avec z par $\mathcal{R}$.

Définition 2.29 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.*

✗ *Pour tout $x \in E$, on appelle* **classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$** *l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$ défini par*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \overset{déf.}{=} \big\{y \in E \mid x\mathcal{R}y\big\}.$$

L'élément x est appelé **représentant** *de l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$.*

✗ *On appelle* **ensemble quotient** *de E par $\mathcal{R}$, et on note $E/\mathcal{R}$, l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$. Autrement dit,*

$$E/\mathcal{R} \overset{déf.}{=} \big\{\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \mid x \in E\big\}.$$

Un ensemble quotient est donc un ensemble d'ensembles. On a $E/\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E)$.

Remarque Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. En utilisant les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité de $\mathcal{R}$, on montre que pour tous x, y appartenant à E on a l'équivalence

$$x\mathcal{R}y \iff \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y).$$

Par conséquent, tout élément appartenant à $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$ peut être pris comme représentant de $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$.

Copyrighted material

Exemples

1. Dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des droites d'un plan affine, la relation de parallélisme est une relation d'équivalence. Pour toute droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$, la classe d'équivalence modulo la relation de parallélisme est appelée la direction de $\mathcal{D}$.

2. Soient n un entier non nul et p, q deux éléments de $\mathbb{Z}$. On dit que p est congru à q modulo n, et on note $p \equiv q\ [n]$, si n divise $q - p$, c'est-à-dire si

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad q - p = k \times n.$$

On vérifie facilement que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. La classe d'équivalence de $p \in \mathbb{Z}$, notée $\widehat{p}$, s'écrit

$$\widehat{p} = \{\ldots, p-2n, p-n, p, p+n, p+2n, \ldots\} = \{p + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

L'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n, noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est donné par

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}.$$

C'est un sous-ensemble fini de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Il contient n éléments.

2.3 Structures algébriques élémentaires

2.3.1 Loi de composition interne

Définition 2.30 *Soit E un ensemble.*

✗ *On appelle* ***loi de composition interne sur*** *E une application de $E \times E$ dans E. Si $\top$ désigne cette application, alors l'image du couple $(x, y) \in E \times E$ par $\top$ s'écrit $x \top y$.*

✗ *On appelle* **ensemble structuré**[9] *tout couple $(E, \top)$ où E est un ensemble et $\top$ une loi de composition interne sur E.*

Exemples

1. $(\mathbb{N}, +)$ et $(\mathbb{N}, \times)$ sont des ensembles structurés.

2. Soit E un ensemble. $(\mathcal{P}(E), \cup)$ et $(\mathcal{P}(E), \cap)$ sont des ensembles structurés.

3. Soit $\top$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{Q}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \quad x \top y = \frac{x + y}{2}.$$

Le couple $(\mathbb{Q}, \top)$ est un ensemble structuré. En revanche, $\top$ ne définit pas une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$ puisque $1 \top 2 = 3/2$ et $3/2 \notin \mathbb{N}$.

4. Soit E un ensemble. La composition d'applications $\circ$ définit une loi de composition interne sur $\mathcal{A}(E, E)$ puisque la composition de deux applications de E dans E est encore une application de E dans E.

[9] On dit aussi un ***magma***.

Copyrighted material

Extension à $\mathcal{A}(X,E)$ d'une loi définie sur E

Soit X un ensemble et $(E,\top)$ un ensemble structuré. On peut munir l'ensemble $\mathcal{A}(X,E)$ d'une loi de composition interne notée $\dot{\top}$. Cette dernière associe aux applications $f : X \longrightarrow E$ et $g : X \longrightarrow E$ l'application $f\dot{\top}g : X \longrightarrow E$ définie par :

$$\forall x \in X \quad (f\dot{\top}g)(x) \overset{déf.}{=} f(x)\top g(x).$$

Le couple $(\mathcal{A}(X,E),\dot{\top})$ est un ensemble structuré. On dit que la loi $\dot{\top}$ ainsi définie sur $\mathcal{A}(X,E)$ est une ***extension à*** $\mathcal{A}(X,E)$ de la loi $\top$ définie sur E.

Exemple En notant $+$ et $\times$ l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$, à partir des applications $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit les applications $f\dot{+}g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f\dot{\times}g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in X \quad \begin{cases} (f\dot{+}g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (f\dot{\times}g)(x) &= f(x)\times g(x) \end{cases}.$$

Les couples $(\mathcal{A}(X,\mathbb{R}),\dot{+})$ et $(\mathcal{A}(X,\mathbb{R}),\dot{\times})$ sont des ensembles structurés.

ATTENTION Il ne faut pas confondre les deux lois $\dot{\top}$ et $\top$. La loi $\dot{\top}$ opère sur les applications de X dans E alors que la loi $\top$ opère sur les éléments de E. En pratique, on omet souvent d'écrire le point au dessus de la loi $\top$.

Définition 2.31 *Soit $(E,\top)$ un ensemble structuré.*

✗ *La loi $\top$ est dite* ***associative*** *si pour tous $x,y,z \in E$,*

$$(x\top y)\top z = x\top(y\top z).$$

✗ *La loi $\top$ est dite* ***commutative*** *si pour tous $x,y \in E$, $x\top y = y\top x$.*

Exemples

1. L'addition et la multiplication sont associatives et commutatives dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

2. La loi définie sur $\mathbb{Q}$ par $x\top y = \dfrac{x+y}{2}$ n'est pas associative car

$$\Big((-1)\top 0\Big)\top 1 = 1/4 \qquad \text{et} \qquad (-1)\top\Big(0\top 1\Big) = -1/4.$$

Elle est en revanche commutative.

3. Soit E un ensemble. La loi $\circ$ est associative dans $\mathcal{A}(E,E)$. Par contre, elle n'est pas commutative.

Copyrighted material

4. Soit X un ensemble. Les deux lois $+$ et $\times$ définies sur l'ensemble $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ sont associatives et commutatives (car l'addition et la multiplication le sont dans $\mathbb{R}$).

Définition 2.32 *Soit $(E,\top)$ un ensemble structuré.*

✗ *Un élément $e \in E$ est dit* **neutre** *pour la loi $\top$ si pour tout $x \in E$,*

$$e \top x = x \quad et \quad x \top e = x.$$

✗ *Si $(E,\top)$ possède un élément neutre e alors un élément x de E est dit* ***symétrisable*** *pour la loi $\top$ s'il existe un élément $x' \in E$ tel que*

$$x \top x' = e \quad et \quad x' \top x = e.$$

L'élément x' est alors appelé ***élément symétrique*** *de x pour la loi $\top$.*

Exemples

1. Considérons un ensemble E. L'ensemble structuré $(\mathcal{P}(E),\cup)$ admet pour élément neutre l'ensemble $\emptyset$ puisque

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad \emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A.$$

L'ensemble structuré $(\mathcal{P}(E),\cap)$ admet pour élément neutre l'ensemble E puisque

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad E \cap A = A \cap E = A$$

2. Soit E un ensemble non vide. L'ensemble structuré $(\mathcal{A}(E,E),\circ)$ admet pour élément neutre l'application identité id_E puisque

$$\forall f \in \mathcal{A}(E,E) \quad \mathrm{id}_E \circ f = f \circ \mathrm{id}_E = f.$$

Pour qu'une application f de E dans E soit symétrisable pour la loi $\circ$ il faut qu'il existe une application $f' : E \longrightarrow E$ vérifiant

$$f' \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f' = \mathrm{id}_E,$$

et si cette application f' existe, f est bijective et f' est l'application réciproque de f. Supposons l'ensemble E non réduit à un seul élément. Il existe au moins une application de E dans E qui ne soit pas bijective, par exemple l'application constante $x \in E \longmapsto e \in E$ où e est un élément de E. Par conséquent, cette application n'est pas symétrisable pour la loi $\circ$.

3. Soit X un ensemble non vide. L'élément neutre de $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ pour l'addition $+$ est l'application constante

$$x \in X \longmapsto 0 \in \mathbb{R},$$

et celui de $\mathcal{A}(X,\mathbb{R})$ pour la multiplication $\times$ est l'application constante

$$x \in X \longmapsto 1 \in \mathbb{R}.$$

Copyrighted material

Toute application f de X dans $\mathbb{R}$ possède un symétrique pour l'addition. C'est l'application $x \in X \longmapsto -f(x) \in \mathbb{R}$, notée $-f$, puisque

$$\forall x \in X \quad (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0.$$

En revanche, une application f de X dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x_0) = 0$ pour un certain $x_0 \in X$ ne possède pas de symétrique pour la multiplication.

Proposition 2.7 *Soit $(E, \top)$ un ensemble structuré. Si l'élément neutre de E pour la loi $\top$ existe, alors il est unique.*

Démonstration La méthode consiste à supposer qu'il existe deux éléments neutres e et e' pour la loi $\top$, et à montrer que ces deux éléments sont nécessairement égaux. Puisque e est élément neutre pour $\top$, on a à la fois $e \top x = x$ et $x \top e = x$ pour tout $x \in E$. En particulier, on peut prendre $x = e'$. On obtient

$$e \top e' = e' \quad \text{et} \quad e' \top e = e'.$$

Écrivons maintenant que e' est élément neutre pour $\top$. Pour tout $x \in E$, $e' \top x = x$ et $x \top e' = x$. En prenant cette fois-ci $x = e$, on obtient

$$e' \top e = e \quad \text{et} \quad e \top e' = e.$$

En regroupant les résultats, on en déduit, par transitivité, que $e = e'$. L'unicité de l'élément neutre est démontrée. □

Proposition 2.8 *Soit $(E, \top)$ un ensemble structuré pour lequel la loi $\top$ est associative et admet un élément neutre.*

✗ *Si $x \in E$ est symétrisable, alors son symétrique est unique.*

✗ *Si $x \in E$ et $y \in E$ sont symétrisables alors $x \top y$ est symétrisable et son symétrique $(x \top y)'$ est donné par*

$$(x \top y)' = y' \top x'$$

où x' désigne le symétrique de x et y' désigne le symétrique de y.

Démonstration Notons e l'élément neutre de E pour la loi $\top$.

⊵ Montrons que si $x \in E$ est symétrisable, alors son symétrique est unique. On suppose que l'élément symétrisable x possède deux symétriques x' et x'' pour la loi $\top$. On a

$$x' \top x = x \top x' = e \qquad \text{et} \qquad x'' \top x = x \top x'' = e.$$

La loi $\top$ étant associative, nous pouvons calculer $x'' \top x \top x'$ des deux manières suivantes :

$$(x'' \top x) \top x' = e \top x' = x',$$

Copyrighted material

$$x''\top(x\top x') = x''\top e = x''.$$

L'associativité de la loi $\top$ nous assure l'égalité de $(x''\top x)\top x'$ et $x''\top(x\top x')$, et par conséquent celle des deux éléments x' et x''. L'unicité du symétrique est démontrée.

$\trianglerighteq$ Montrons à présent que si $x \in E$ et $y \in E$ sont symétrisables alors $x\top y$ est symétrisable. Soient x' le symétrique de x et y' celui de y. On a

$$\begin{aligned}(y'\top x')\top(x\top y) &= y'\top(x'\top x)\top y \quad \text{car } \top \text{ est associative}\\ &= y'\top e\top y \quad \text{car } x'\top x = e\\ &= y'\top y = e.\end{aligned}$$

On vérifie de la même manière que $(x\top y)\top(y'\top x') = e$. L'élément $x\top y$ est donc symétrisable pour la loi $\top$ et son symétrique est l'élément $y'\top x'$. □

Définition 2.33 ✗ *Soient $(E, \top)$ et $(F, \perp)$ deux ensembles structurés. On appelle* **morphisme** *ou* **homomorphisme** *(d'ensembles structurés) de $(E, \top)$ dans $(F, \perp)$ toute application $f : E \longrightarrow F$ telle que :*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x\top y) = f(x) \perp f(y).$$

Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective alors on dit que f est un **isomorphisme** *de $(E, \top)$ dans $(F, \perp)$.*

✗ *On appelle* **endomorphisme** *d'ensemble structuré $(E, \top)$ un morphisme de $(E, \top)$ dans lui-même. Un endomorphisme de $(E, \top)$ bijectif est qualifié d'***automorphisme** *de $(E, \top)$.*

Exemples

1. L'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = 2^n$, est un morphisme de $(\mathbb{N}, +)$ dans $(\mathbb{N}, \times)$ puisque

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad 2^{n+m} = 2^n \times 2^m.$$

2. Pour tout ensemble structuré $(E, \top)$, l'application identité $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$ qui à tout élément x de E lui associe lui-même est un automorphisme de $(E, \top)$.

Remarque On peut vérifier que la bijection réciproque d'un isomorphisme f de $(E, \top)$ dans $(F, \perp)$ est un morphisme de $(F, \perp)$ dans $(E, \top)$. Considérons par exemple l'application logarithme néperien $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Il est clair que c'est un morphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. En effet,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y).$$

De plus, ce morphisme est bijectif. C'est donc un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. Sa bijection réciproque est l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. qui est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Copyrighted material

2.3.2 Structure de groupe

Les trois structures algébriques que nous présentons maintenant (à savoir les structures de groupe, d'anneau et de corps) sont fondamentales. Commençons par la définition d'un groupe.

Définition 2.34 ✗ *Un ensemble structuré $(G, \top)$ est un* ***groupe*** *si :*

1. la loi $\top$ est associative :

$$\forall (x, y, z) \in G^3 \quad (x \top y) \top z = x \top (y \top z),$$

2. il existe un élément neutre dans $(G, \top)$:

$$\exists e \in G \quad \forall x \in G \quad e \top x = x \top e = x,$$

3. tout élément de $(G, \top)$ est symétrisable :

$$\forall x \in G \quad \exists x' \in G \quad x \top x' = x' \top x = e.$$

On dit aussi que l'ensemble G possède une structure de groupe pour la loi $\top$.

✗ *On dit que le groupe est commutatif*[10] *si la loi $\top$ est commutative :*

$$\forall (x, y) \in G^2 \quad x \top y = y \top x.$$

Remarques

1. Si $(G, \top)$ est un groupe alors l'ensemble G n'est jamais vide puisqu'il contient au moins l'élément neutre e.

2. Par abus de langage, on dit souvent « le groupe G » au lieu de « le groupe $(G, \top)$ » lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la loi $\top$

Dans de nombreux exemples de groupes commutatifs, la loi est notée additivement $(+)$. Nous utilisons aussi souvent la notation multiplicative $(\times)$ sans pour autant la réserver pour des groupes obligatoirement commutatifs. On particularise alors les notations introduites comme suit.

Notation additive

- la loi $+$ est une loi interne sur G : $\forall (x, y) \in G^2 \quad x + y \in G$,
- la loi $+$ est associative : $\forall (x, y, z) \in G^3 \quad (x + y) + z = x + (y + z)$,
- existence d'un élément neutre appelé ***élément zéro*** et noté 0_G :

$$\exists 0_G \in G \quad \forall x \in G \quad 0_G + x = x + 0_G = x,$$

- tout élément x possède un symétrique appelé ***opposé*** et noté $-x$:

$$\forall x \in G \quad \exists (-x) \in G \quad x + (-x) = (-x) + x = 0_G,$$

[10] On dit aussi ***abélien***.

Copyrighted material

– le groupe $(G,+)$ est commutatif si $x+y=y+x$ pour tout $(x,y)\in G^2$.

Lorsque la loi est additive, on note souvent $x-y$ au lieu de $x+(-y)$.

Notation multiplicative

– la loi $\times$ est une loi interne sur G : $\forall (x,y)\in G^2 \quad x\times y\in G$,

– la loi $\times$ est associative : $\forall (x,y,z)\in G^3 \quad (x\times y)\times z = x\times (y\times z)$,

– existence d'un élément neutre appelé ***élément unité*** et noté 1_G :

$$\exists\, 1_G\in G \quad \forall x\in G \quad 1_G\times x = x\times 1_G = x,$$

– tout élément x possède un symétrique appelé ***inverse*** et noté x^{-1} :

$$\forall x\in G \quad \exists\, x^{-1}\in G \quad x\times x^{-1} = x^{-1}\times x = 1_G,$$

– le groupe $(G,\times)$ est commutatif si $x\times y = y\times x$ pour tout $(x,y)\in G^2$.

Lorsque la loi est multiplicative, on note souvent xy au lieu de $x\times y$.

Exemples

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ muni de l'addition $+$ n'est pas un groupe car, excepté l'élément 0, un élément de $\mathbb{N}$ ne possède pas d'opposé. En revanche, les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ munis de l'addition usuelle $+$ sont des groupes commutatifs.

2. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni de la multiplication $\times$ n'est pas un groupe car 1 et -1 sont les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}$. Par contre, les ensembles $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ munis de la multiplication usuelle $\times$ sont des groupes.

3. Les ensembles $\mathbb{Q}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ munis de la multiplication usuelle $\times$ sont des groupes.

4. Soit E un ensemble. Rappelons que $\emptyset$ est l'élément neutre de $\mathcal{P}(E)$ pour l'union. Muni de la loi $\cup$, $\mathcal{P}(E)$ n'est pas un groupe car si A est non vide alors il n'existe pas de partie A' de E telle que

$$A\cup A' = \emptyset.$$

Rappelons que E est l'élément neutre de $\mathcal{P}(E)$ pour l'intersection. Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ muni de la loi $\cap$ n'est pas un groupe car si $A\subset E$ et $A\neq E$ alors il n'existe pas de partie A' de E telle que

$$A\cap A' = E.$$

5. Soit E un ensemble non vide non réduit à un seul élément. La loi $\circ$ est associative dans $\mathcal{A}(E,E)$ et possède pour élément neutre l'application id_E. En revanche, une application de E dans E n'est pas nécessairement bijective. On n'est donc pas assuré de l'existence d'un symétrique pour la loi $\circ$ pour tout élément de $\mathcal{A}(E,E)$. En conclusion, l'ensemble structuré $(\mathcal{A}(E,E),\circ)$ n'est pas un groupe.

Copyrighted material

6. Soit X un ensemble quelconque et $(E, \top)$ un groupe. L'ensemble $\mathcal{A}(X, E)$ muni de la loi interne notée $\dot{\top}$ définie pour toutes applications $f, g : X \longrightarrow E$ par

$$\forall x \in X \quad (f \dot{\top} g)(x) = f(x) \top g(x)$$

possède une structure de groupe. Cette dernière se déduit de la structure de groupe définie sur E. Si de plus la loi $\top$ est commutative dans E alors le groupe $(\mathcal{A}(X, E), \dot{\top})$ est aussi commutatif. Par exemple, $(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif. En revanche, $(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), \times)$ n'est pas un groupe.[11]

Exercice 4 *Soient $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\star$ la loi définie par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \star y \overset{déf.}{=} x \times y + (x^2 - 1) \times (y^2 - 1)$$

où on a noté $x^2 = x \times x$ et $y^2 = y \times y$, $+$ et $\times$ désignant les opérations usuelles sur $\mathbb{R}$.

1 - Vérifier que $\star$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$.

2 - La loi $\star$ est-elle associative ? commutative ? Vérifier que $\mathbb{R}$ possède un élément neutre pour la loi $\star$. Cette loi confère-t-elle à $\mathbb{R}$ une structure de groupe ?

3 - Calculer le(s) symétrique(s) de l'élément 2 pour la loi $\star$.

4 - Résoudre les équations algébriques suivantes :

$$2 \star x = 2 \qquad et \qquad 2 \star x = 5.$$

2.3.3 Structure d'anneau

Il est possible de munir un groupe $(E, \top)$ d'une seconde loi de composition interne. Si cette seconde loi possède de « bonnes » propriétés calculatoires, on obtient une structure algébrique appelée anneau. Notons $*$ cette seconde loi de composition interne. Le triplet $(E, \top, *)$ est encore appelé ensemble structuré.

Définition 2.35 *Étant données deux lois de composition interne $\top$ et $*$ définies sur un ensemble E, on dit que la loi $*$ est* **distributive à gauche** *par rapport à la loi $\top$ si*

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z).$$

On dit que la loi $*$ est **distributive à droite** *par rapport à la loi $\top$ si*

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (y \top z) * x = (y * x) \top (z * x).$$

La loi $*$ est dite **distributive** *par rapport à $\top$ si elle est distributive à la fois à gauche et à droite par rapport à $\top$.*

---

[11] car il y a absence d'inverse pour les applications qui s'annulent en au moins un élément de X.

Copyrighted material

Exemples

1. Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ la multiplication $\times$ est distributive par rapport à l'addition $+$.

2. Soit E un ensemble. Dans $\mathcal{P}(E)$ chacune des lois $\cup$ et $\cap$ est distributive par rapport à l'autre.

3. Soit X un ensemble. Munissons l'ensemble $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ des deux lois $+$ et $\times$ définies au paragraphe 2.3.1 page 57. La loi $\times$ est distributive par rapport à l'addition puisque pour toutes applications $f, g, h : X \longmapsto \mathbb{R}$,

$$\forall x \in X \quad \begin{cases} f(x) \times \big(g(x) + h(x)\big) &= \big(f(x) \times g(x)\big) + \big(f(x) \times h(x)\big) \\ \big(g(x) + h(x)\big) \times f(x) &= \big(g(x) \times f(x)\big) + \big(h(x) \times f(x)\big) \end{cases}$$

On est maintenant en mesure d'énoncer la définition d'un anneau.

Définition 2.36 ✗ *Un ensemble structuré $(A, \top, *)$ est un* **anneau** *si :*

1. l'ensemble structuré $(A, \top)$ est un groupe commutatif,

2. la loi $*$ est associative,

3. la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\top$,

4. l'ensemble A admet un élément neutre[12] *pour la loi $*$.*

On dit aussi que A possède une structure d'anneau pour les lois $\top$ et $*$.

✗ *Si de plus la loi $*$ est commutative alors on dit que l'anneau $(A, \top, *)$ est commutatif.*

Notation additive et notation multiplicative

Par souci de simplification, nous abandonnons les notations $\top$ et $*$ des deux lois internes définies sur A au profit des notations additive $(+)$ et multiplicative $(\times)$. On particularise les notations comme suit :

- l'ensemble structuré $(A, +)$ est un groupe commutatif :

$$\begin{aligned} &\forall (x, y, z) \in A^3 \quad (x + y) + z = x + (y + z), \\ &\exists 0_A \in A \quad \forall x \in A \quad 0_A + x = x + 0_A = x, \\ &\forall x \in A \quad \exists (-x) \in A \quad x + (-x) = (-x) + x = 0_A, \\ &\forall (x, y) \in A^2 \quad x + y = y + x, \end{aligned}$$

- la loi $\times$ est associative : $\forall (x, y, z) \in A^3 \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$,

[12] Dans certains manuels de mathématiques, l'existence d'un élément neutre pour la seconde loi $*$ n'est pas imposée dans la définition, un anneau possédant un élément neutre pour $*$ étant alors qualifié d'***unifère***.

Copyrighted material

- la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$:

$$\forall (x,y,z) \in A^3 \quad \begin{cases} x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z) \\ (y+z) \times x = (y \times x) + (z \times x) \end{cases},$$

- existence d'un élément unité : $\exists\, 1_A \in A \quad \forall x \in A \quad 1_A \times x = x \times 1_A = x$,
- l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif si $x \times y = y \times x$ pour tout $(x,y) \in A^2$.

Un anneau possède ainsi deux éléments neutres.

- Le premier, noté 0_A, correspond à la loi $+$. On l'appelle ***zéro de l'anneau***.
- Le second, noté 1_A, correspond à la loi $\times$. On l'appelle ***unité de l'anneau***.

Exemples

1. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni des lois $+$ et $\times$ possède une structure d'anneau commutatif. De même, les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis des lois $+$ et $\times$ sont des anneaux commutatifs.

2. Soit E un ensemble. $\big(\mathcal{P}(E), \cup, \cap\big)$ n'est pas un anneau.

3. Soit X un ensemble. L'ensemble $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ muni des deux lois $+$ et $\times$ définies au paragraphe 2.3.1, page 57, possède une structure d'anneau commutatif. L'élément zéro (respectivement l'élément unité) de $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ est l'application $x \in X \longmapsto 0 \in \mathbb{R}$ (resp. l'application $x \in X \longmapsto 1 \in \mathbb{R}$).

4. Soit n un entier naturel non nul. Considérons l'ensemble fini[13]

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \big\{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\big\}.$$

On note $+$ et $\times$ l'addition et la multiplication usuelles sur $\mathbb{Z}$. On vérifie facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous p, p', q, q' appartenant à $\mathbb{Z}$, on a

$$p \equiv p'\ [n] \ \text{ et } \ q \equiv q'\ [n] \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} p+q \equiv p'+q'\ [n] \\ p \times q \equiv p' \times q'\ [n] \end{cases}.$$

Cela signifie que si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$ alors les classes d'équivalence $\widehat{p+q}$ et $\widehat{p \times q}$ ne dépendent que des classes d'équivalence $\widehat{p}$ et $\widehat{q}$ et non du choix de p dans la classe d'équivalence $\widehat{p}$ et de q dans la classe d'équivalence $\widehat{q}$.[14] Cela nous permet de définir deux lois de composition interne, notées $\widehat{+}$ et $\widehat{\times}$ et appelées respectivement addition et multiplication sur l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en posant pour tous $\widehat{p}, \widehat{q}$ appartenant à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$\widehat{p} \,\widehat{+}\, \widehat{q} \overset{\text{déf.}}{=} \widehat{p+q} \qquad \text{et} \qquad \widehat{p} \,\widehat{\times}\, \widehat{q} \overset{\text{déf.}}{=} \widehat{p \times q}.$$

Écrivons par d'exemple les tables d'addition et de multiplication dans les trois ensembles quotients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

---

[13] C'est l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n, voir en page 56.

[14] ce qu'on exprime en disant que les opérations $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{Z}$ sont compatibles avec la relation de congruence modulo n.

Copyrighted material

– Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$, elles s'écrivent

$\widehat{+}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{0}$

$\widehat{\times}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$

– Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$, elles s'écrivent

$\widehat{+}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$

$\widehat{\times}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

– Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}\}$, elles s'écrivent

$\widehat{+}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{3}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$

$\widehat{\times}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$
$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{3}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

On montre sans difficulté que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni des deux lois $\widehat{+}$ et $\widehat{\times}$ possède une structure d'anneau commutatif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le zéro (respectivement l'unité) de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ est la classe d'équivalence $\widehat{0}$ (resp. la classe d'équivalence $\widehat{1}$) car pour tout $\widehat{p} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$\widehat{0} \,\widehat{+}\, \widehat{p} = \widehat{p} \qquad \text{et} \qquad \widehat{1} \,\widehat{\times}\, \widehat{p} = \widehat{p}.$$

Remarquons que les classes d'équivalence $\widehat{0}$ et $\widehat{1}$ sont distinctes dès lors que $n \geqslant 2$.

Règles de calcul dans un anneau

Proposition 2.9 *Soit $(A, +, \times)$ un anneau.*

✗ $\forall x \in A \quad 0_A \times x = 0_A$ *et* $x \times 0_A = 0_A$. *(0_A est dit* **absorbant** *pour $\times$)*

✗ $\forall (x, y) \in A^2 \quad (-x) \times y = -(x \times y) = x \times (-y)$.

✗ $\forall x \in A \quad (-1_A) \times x = -x$.

✗ $\forall (x, y) \in A^2 \quad (-x) \times (-y) = x \times y$.

✗ $\forall (x, y, z) \in A^3 \quad x \times (y - z) = x \times y - x \times z$ *et* $(y - z) \times x = y \times x - z \times x$.

Copyrighted material

Démonstration Montrons uniquement les deux premières propriétés, les trois dernières se déduisant directement des deux premières.

$\trianglerighteq$ Soit $x \in A$. Montrons que $0_A = 0_A \times x$. Pour tout $y \in A$,

$$y \times x = (0_A + y) \times x = 0_A \times x + y \times x,$$

c'est-à-dire $y \times x = 0_A \times x + y \times x$. En additionnant l'élément $-(y \times x)$ (c'est le symétrique de l'élément $y \times x$ pour la loi $+$) à droite et à gauche dans cette dernière égalité, on a

$$\underbrace{y \times x + (-(y \times x))}_{=0_A} = 0_A \times x + \underbrace{y \times x + (-(y \times x))}_{=0_A} \iff 0_A = 0_A \times x.$$

On démontrerait de la même manière que $0_A = x \times 0_A$.

$\trianglerighteq$ Soient x et y deux éléments de A. Montrons que $(-x) \times y = -(x \times y)$. En utilisant la propriété précédente, on a

$$x \times y + (-x) \times y = \big(x + (-x)\big) \times y = 0_A \times y = 0_A,$$

c'est-à-dire

$$x \times y + (-x) \times y = 0_A. \tag{5}$$

L'élément xy admettant l'élément $-(x \times y)$ pour symétrique par rapport à la loi $+$, on a aussi

$$x \times y + (-(x \times y)) = 0_A. \tag{6}$$

Par unicité du symétrique, on déduit de (5) et (6) que $(-x) \times y = -(x \times y)$. La démonstration de l'égalité $x \times (-y) = -(x \times y)$ s'effectue suivant le même modèle. Sa rédaction est laissée en exercice. □

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Il est à noter que si l'ensemble A n'est pas réduit à 0_A alors les éléments 0_A et 1_A sont nécessairement distincts.[15]

Notations et conventions

Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nécessairement commutatif. Pour tout entier naturel n non nul et pour tout élément x de A, on note nx (respectivement x^n) l'élément de A qui est égal à la somme des n termes égaux à x (resp. au produit des n termes égaux à x) :

$$nx \overset{not.}{=} \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ termes}} \quad \text{et} \quad x^n \overset{not.}{=} \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ termes}}.$$

[15] Cela se montre facilement en utilisant un raisonnement par contraposition. Supposons 0_A et 1_A égaux et montrons que $A = \{0_A\}$. Soit x un élément de A. Puisque 1_A est l'élément neutre pour la loi $\times$, on a $1_A \times x = x$. Or, par hypothèse, $1_A = 0_A$. Ainsi, $1_A \times x = 0_A \times x = 0_A$ car 0_A est absorbant pour la loi $\times$ (voir la proposition 2.9). On a ainsi $x = 0_A$.

Copyrighted material

En particulier, en prenant $n = 1$, on a

$$\forall x \in A \quad \Big(1x = x \quad \text{et} \quad x^1 = x \Big).$$

On convient que

$$\forall x \in A \quad \Big(0x = 0_A \quad \text{et} \quad x^0 = 1_A \Big).$$

Remarque Tout élément d'un anneau admet un opposé. Ainsi, pour tout $x \in A$ et pour tout entier n négatif, on note nx l'élément de A qui est égal à la somme de $-n$ termes égaux à l'opposé de x :

$$nx \overset{not.}{=} (-n)(-x) = \underbrace{(-x) + (-x) + \ldots + (-x)}_{-n \text{ termes}}.$$

Par exemple, si $n = -3$ alors

$$-3x = (-x) + (-x) + (-x).$$

D'après la définition d'un anneau, un élément de A n'admet pas nécessairement d'inverse. Toutefois, si un élément x de A est inversible, alors, pour tout entier n négatif, on note x^n l'élément de A qui est égal au produit de $-n$ termes égaux à l'inverse de x :

$$x^n \overset{not.}{=} \left(x^{-1}\right)^{-n} = \underbrace{x^{-1} \times x^{-1} \times \ldots \times x^{-1}}_{-n \text{ termes}}.$$

Par exemple, si $n = -4$ et si x est inversible, alors

$$x^{-4} = x^{-1} \times x^{-1} \times x^{-1} \times x^{-1}.$$

Propriétés

Il est aisé de montrer les propriétés suivantes :

- $\forall x \in A \quad \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \quad (n + m)x = nx + mx$,
- $\forall x \in A \quad \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \quad (nm)x = n(mx)$,
- $\forall x \in A \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad x^n \times x^m = x^{n+m}$,
- $\forall x \in A \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad (x^n)^m = x^{nm}$.

En particulier, si l'élément x est inversible, alors les deux dernières propriétés sont vraies pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.

ATTENTION Si x et y désignent deux éléments quelconques d'un anneau non commutatif, alors, *a priori*, $(x \times y)^2$ et $x^2 \times y^2$ ne sont pas égaux. En effet, la multiplication n'étant pas commutative,

$$(x \times y)^2 = (x \times y) \times (x \times y) \neq (x \times x) \times (y \times y) = x^2 \times y^2,$$

et plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 2$, $(x \times y)^n \neq x^n \times y^n$. Bien évidemment, si $x \times y = y \times x$, alors $(x \times y)^n = x^n \times y^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Copyrighted material

De même, on montre sans difficulté les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in A \quad n(-x) = (-n)x = -(nx)$,
- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall (x,y) \in A^2 \quad n(x+y) = nx + ny$ et $n(x-y) = nx - ny$,
- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall (x,y) \in A^2 \quad n(x \times y) = (nx) \times y = x \times (ny)$,
- $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in A \quad nx = (n1_A) \times x = x \times (n1_A)$.

Définition 2.37 *Soient $(A,+,\times)$ un anneau non nécessairement commutatif et 0_A le zéro de l'anneau. Un élément a de A est dit* **nilpotent** *si*

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad a^n = 0_A.$$

Exercice 5 *Soit $(A,+,\times)$ un anneau non nécessairement commutatif. Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in A \quad 1_A - x^n = (1_A - x) \times (1_A + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}).$$

En déduire que si a est élément nilpotent alors $1_A - a$ est inversible.

Définition 2.38 *Soient $(A,+,\times)$ un anneau non nécessairement commutatif et x un élément de A différent de 0_A le zéro de l'anneau.*

✗ *On dit que x est un* **diviseur de zéro à gauche** *dans A s'il existe $y \in A$, $y \neq 0_A$, tel que*

$$x \times y = 0_A.$$

On dit que x est un **diviseur de zéro à droite** *dans A s'il existe $z \in A$, $z \neq 0_A$, tel que*

$$z \times x = 0_A.$$

On dit que x est un **diviseur de zéro** *dans A s'il est un diviseur de zéro à gauche ou à droite dans A.*[16]

✗ *On dit que l'anneau $(A,+,\times)$ est* **intègre** *si $A \neq \{0_A\}$ et s'il n'admet aucun diviseur de zéro.*

En d'autres termes, un anneau $(A,+,\times)$ est intègre si $A \neq \{0_A\}$ et si

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \Big(x \times y = 0_A \implies (x = 0_A \text{ ou } y = 0_A) \Big),$$

ou encore, par contraposée, si

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \Big((x \neq 0_A \text{ et } y \neq 0_A) \implies x \times y \neq 0_A \Big).$$

[16] Bien entendu, si l'anneau est commutatif, la notion de diviseur de zéro à gauche est confondue avec celle de diviseur de zéro à droite.

Copyrighted material

Exemples

1. Dans l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni des deux lois $+$ et $\times$ définies au paragraphe 2.3.1, page 57, les deux applications

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sont des diviseurs de zéro dans $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ puisqu'elles sont non nulles et vérifient $f \times g = 0$. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \times g)(x) = \begin{cases} 0 \times x = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} \times 0 = 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

2. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni des lois usuelles $+$ et $\times$ est un anneau commutatif intègre.

3. Les deux anneaux commutatifs $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ et $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ sont intègres. Cela se vérifie directement à partir des tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ données en page 65.

4. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ n'est pas intègre puisque $\widehat{2} \,\widehat{\times}\, \widehat{2} = \widehat{0}$ et $\widehat{2} \neq \widehat{0}$. La classe d'équivalence $\widehat{2}$ est donc un diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

5. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis des lois usuelles $+$ et $\times$ sont des anneaux commutatifs intègres.

Remarque Soit $(A,+,\times)$ un anneau non nécessairement commutatif. Il est clair qu'un élément nilpotent a non nul de A est diviseur de zéro.

Proposition 2.10 *Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Tout diviseur de zéro dans A est nécessairement non inversible.*

Démonstration Cela se montre facilement en raisonnant par l'absurde. Supposons que l'élément x de A soit à la fois diviseur de zéro à gauche et inversible. Il existe alors un élément $y \in A$ non nul tel que $x \times y = 0_A$. En multipliant à gauche cette égalité par x^{-1} (qui existe car x est inversible), on obtient

$$x^{-1} \times (x \times y) = x^{-1} \times 0_A.$$

On en déduit $y = 0_A$ puisque

$$x^{-1} \times (x \times y) = (x^{-1} \times x) \times y = 1_A \times y = y$$

et puisque $x^{-1} \times 0_A = 0_A$ (0_A est absorbant pour la loi $\times$, voir la proposition 2.9), ce qui est contraire à nos hypothèses. La démonstration dans le cas où x est diviseur de zéro à droite s'effectue suivant le même principe. Elle est laissée en exercice. □

Copyrighted material

Formule du Binôme de Newton dans un anneau

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier p compris entre 0 et n, on définit l'entier C_n^p appelé ***coefficient binomial***, de la manière suivante

$$C_n^p \overset{déf.}{=} \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

où on rappelle qu'il est convenu que

$$0! = 1.$$

Proposition 2.11 *Le coefficient binomial vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$C_n^0 = 1, \quad C_n^n = 1, \quad C_n^1 = n.$$
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$,*
$$C_n^{n-p} = C_n^p.$$
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$,*
$$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p.$$

Cette dernière formule est appelée ***formule du triangle de Pascal.***

Démonstration Les deux premières propriétés sont évidentes d'après la définition des coefficients binomiaux. Vérifions la troisième. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On a

$$\begin{aligned} C_n^{p-1} + C_n^p &= \frac{n!}{(p-1)! \times (n+1-p)!} + \frac{n!}{p! \times (n-p)!} \\ &= \frac{n! \times p}{p! \times (n+1-p)!} + \frac{n! \times (n+1-p)}{p! \times (n+1-p)!} \\ &= \frac{n! \times p + n! \times (n+1-p)}{p! \times (n+1-p)!} = \frac{(n+1)!}{p! \times (n+1-p)!} = C_{n+1}^p. \end{aligned}$$

□

On range les coefficients binomiaux dans le tableau suivant, appelé ***triangle de Pascal***, en plaçant à la n-ième ligne et à la p-ième colonne le coefficient C_n^p. En pratique, on procède comme suit :

- on commence par remplir la colonne correspondant à $p = 0$ par des 1 (puisque $C_n^0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et la diagonale par des 1 (puisque $C_n^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$),

Copyrighted material

– puis on complète ligne par ligne le tableau en partant de la deuxième ligne en remarquant que les coefficients de la $(n+1)$-ième ligne s'obtiennent à partir de ceux de la n-ième ligne puisque

$$C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p \quad \text{pour tout } p \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

On obtient :

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

Pour chacune des lignes, il est à noter la symétrie des coefficients due à la propriété :

$$C_n^{n-p} = C_n^p \quad \text{pour tout } p \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Rappelons que dans un anneau $(A, +, \times)$, contrairement à la première loi $+$ qui est commutative, la deuxième loi $\times$, elle, ne l'est pas nécessairement. Bien évidemment, rien ne s'oppose à ce qu'il existe des éléments de A qui commutent entre eux.[17] Dans ce cas, on peut appliquer la formule du binôme de Newton donnée dans la proposition suivante.

Proposition 2.12 (Formule du binôme de Newton) *Soient $(A, +, \times)$ un anneau, a et b deux éléments de A qui commutent pour la loi $\times$ (c'est-à-dire tels que $a \times b = b \times a$) et n un entier naturel. Alors*

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (a^p \times b^{n-p}) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (a^{n-p} \times b^p)$$

où C_n^p est le coefficient binomial.

Démonstration ≥ Raisonnons par récurrence. La propriété est vraie pour $n = 0$ puisque nous avons convenu que $a^0 = 1_A$ pour tout $a \in A$ et que, par conséquent, $(a+b)^0 = 1_A$ et $C_0^0(a^0 \times b^0) = 1(1_A \times 1_A) = 1_A$. Elle est vraie pour $n = 1$ puisque $(a+b)^1 = a + b$ et

$$C_1^0(a^0 \times b^1) + C_1^1(a^1 \times b^0) = 1(1_A \times b) + 1(a \times 1_A) = 1a + 1b = a + b.$$

Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire montrons que pour tout $(a, b) \in A^2$ tel que $a \times b = b \times a$,

[17] Remarquer que l'élément unité 1_A commute avec n'importe quel élément de l'anneau.

Copyrighted material

on a

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^{p}(a^p \times b^{n+1-p}).$$

Puisque $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b)$, d'après l'hypothèse de récurrence et en utilisant la propriété de distributivité de la loi $\times$ par rapport à la loi $+$, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \left(\sum_{p=0}^{n} C_n^p(a^p \times b^{n-p})\right) \times (a+b)\\ &= \sum_{p=0}^{n}\Big(C_n^p(a^p \times b^{n-p}) \times a\Big) + \sum_{p=0}^{n}\Big(C_n^p(a^p \times b^{n-p}) \times b\Big)\end{aligned}$$

De $a \times b = b \times a$ on déduit que $a^p \times b^q \times a = a^{p+1} \times b^q$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p(a^{p+1} \times b^{n-p}) + \sum_{p=0}^{n} C_n^p(a^p \times b^{n+1-p})\\ &= \sum_{p'=1}^{n+1} C_n^{p'-1}(a^{p'} \times b^{n+1-p'}) + \sum_{p=0}^{n} C_n^p(a^p \times b^{n+1-p})\end{aligned}$$

où on a effectué le changement d'indice $p' = p+1$ dans la première somme. On obtient

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(C_n^{p-1} + C_n^p\right)(a^p \times b^{p+1-p}) + b^{n+1}.$$

Puisque $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$, que $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$ et qu'il a été convenu que $b^0 = 1_A = a^0$, on obtient

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p(a^p \times b^{n+1-p}) + b^{n+1}\\ &= C_{n+1}^0(a^{n+1} \times b^0) + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p(a^p \times b^{n+1-p}) + C_{n+1}^{n+1}(a^0 \times b^{n+1})\\ &= \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p(a^p \times b^{n+1-p}).\end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

$\trianglerighteq$ Effectuons le changement d'indice $\ell = n - p$ dans $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p(a^p \times b^{n-p})$. On a

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p(a^p \times b^{n-p}) = \sum_{\ell=0}^{n} \underbrace{C_n^{n-\ell}}_{=C_n^\ell}(a^{n-\ell} \times b^\ell) = \sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell(a^{n-\ell} \times b^\ell).$$

Copyrighted material

L'indice ℓ étant muet, on peut le remplacer par n'importe quel indice, par exemple p. On obtient ainsi

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p (a^p \times b^{n-p}) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (a^{n-p} \times b^p),$$

ce qui termine la démonstration. □

2.3.4 Structure de corps

Dans un anneau, un élément ne possède pas nécessairement de symétrique par rapport à la deuxième loi (ou d'inverse puisque la deuxième loi est notée multiplicativement). Il est à noter que l'élément zéro est absorbant. Il ne peut donc pas être inversible.

Considérons par d'exemple l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}\}$ muni des lois $\widehat{+}$ et $\widehat{\times}$. Il est immédiat d'après les tables de multiplication que les classes d'équivalence $\widehat{1}$ et $\widehat{3}$ possèdent des inverses et

$$\widehat{1}^{-1} = \widehat{1} \quad \text{et} \quad \widehat{3}^{-1} = \widehat{3}$$

où $\widehat{1}^{-1}$ et $\widehat{3}^{-1}$ désignent les inverses respectifs de $\widehat{1}$ et $\widehat{3}$ pour la loi $\widehat{\times}$. En revanche, la classe d'équivalence $\widehat{2}$ ne possède pas d'inverse puisque

$$\forall \widehat{p} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \widehat{2} \,\widehat{\times}\, \widehat{p} \neq \widehat{1}.$$

D'après la proposition 2.10, nous pourrions conclure directement à la non-inversibilité de $\widehat{2}$ car $\widehat{2}$ est diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Cette remarque motive la définition d'un corps.

Définition 2.39 ✗ *Un ensemble K muni d'une loi additive $+$ et d'une loi multiplicative $\times$ est un* **corps** *si :*

1. *$(K, +, \times)$ est un anneau,*
2. *tout élément de $K \setminus \{0_K\}$ admet un inverse pour la loi $\times$ dans K.*

✗ *Si de plus la loi $\times$ est commutative, on dit que le corps $(K, +, \times)$ est commutatif.*

Un corps est donc un anneau dont tous les éléments sont inversibles, à l'exception de l'élément nul. Nous devons le concept formel de corps au mathématicien allemand Heinrich Weber (1842-1913).

Remarques

1. Si x et y désignent deux éléments d'un corps commutatif $(K, +, \times)$ avec y non nul, alors on écrit souvent

$$x \times y^{-1} = y^{-1} \times x = \frac{x}{y}.$$

Copyrighted material

2. Si $(K, +, \times)$ est un corps alors l'ensemble $K \setminus \{0_K\}$ que l'on note aussi K^*, muni de la loi $\times$ possède aussi une structure de groupe. $(K^*, \times)$ est appelé ***groupe multiplicatif du corps***.

3. Il est clair que tout corps est un anneau intègre puisque dans un corps tout élément (non nul) est inversible. La réciproque est bien évidemment fausse. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{Z}$, sous-entendu muni des deux lois usuelles $+$ et $\times$, est un anneau commutatif intègre mais ce n'est pas un corps.

Par la suite, nous noterons un corps par la lettre $\mathbb{K}$, première lettre du mot allemand *körper* qui signifie « corps » (au sens de l'objet). Il est à noter que les anglo-saxons utilisent le mot anglais *field* qui signifie « champ ». La notation $\mathbb{K}$ sous-entend la donnée d'un ensemble K muni des deux lois de composition interne $+$ et $\times$.

Exemples

1. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ (sous-entendu munis de l'addition et de la multiplication) sont des corps commutatifs.

2. Les deux ensembles structurés $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ et $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ sont deux corps commutatifs. On dit qu'ils sont finis car ils contiennent un nombre fini d'éléments. Il est à noter que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ est le corps fini de référence en informatique correspondant à l'arithmétique binaire. Plus généralement, on peut montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ soit un corps est que l'entier naturel n est un nombre premier. Ainsi, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ n'est pas un corps.

3. Considérons le sous-ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \overset{déf.}{=} \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

Il est clair que l'addition et la multiplication entre réels définissent deux lois internes sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. En effet, pour tous $x = a+b\sqrt{2}$, $x' = a'+b'\sqrt{2}$ appartenant à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,

$$x + x' = (a + a') + (b + b')\sqrt{2}$$

$$x \times x' = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2},$$

d'où $x+x'$ et $x \times x'$ appartiennent à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. On se convainc sans difficulté que l'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ muni des deux lois $+$ et $\times$ possède une structure d'anneau commutatif, l'élément zéro étant le nombre 0 et l'élément unité le nombre 1. Est-ce un corps ? Pour répondre à cette question, considérons un élément non nul $x = a + b\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et cherchons s'il existe un élément $x' = a' + b'\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ vérifiant

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) \times \left(a' + b'\sqrt{2}\right) = 1,$$

c'est-à-dire vérifiant

$$(aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2} = 1,$$

Copyrighted material

ou encore, de manière équivalente, vérifiant le système de deux équations à deux inconnues (a' et b') suivant :[18]

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases}.$$

On obtient une équation ne portant que sur l'inconnue a' en multipliant la première équation par a, la seconde par $2b$ et en additionnant le tout. De même, on obtient une équation ne portant que sur l'inconnue b' en multipliant la première équation par b, la seconde par $-a$ et en additionnant le tout. Ces équations sont

$$(a^2 - 2b^2) \times a' = a \qquad \text{et} \qquad (2b^2 - a^2) \times b' = b.$$

Puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $x \neq 0$, on a $a^2 - 2b^2 \neq 0$ et on déduit des deux égalités précédentes que le système (S) admet pour solution

$$a' = \frac{a}{a^2 - 2b^2} \qquad \text{et} \qquad b' = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}.$$

Tout élément non nul de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ possède un inverse. L'ensemble structuré $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est donc un corps commutatif.

Morphisme d'anneaux, morphisme de corps

Définition 2.40 *Soient $(A, +_A, \times_A)$ et $(A', +_{A'}, \times_{A'})$ deux anneaux d'éléments unités respectifs 1_A et $1_{A'}$. Une application $f : A \longrightarrow A'$ est appelée* **morphisme d'anneaux** *de $(A, +_A, \times_A)$ dans $(A', +_{A'}, \times_{A'})$ si*

1. $\forall (x, y) \in A^2 \quad f(x +_A y) = f(x) +_{A'} f(y)$,
2. $\forall (x, y) \in A^2 \quad f(x \times_A y) = f(x) \times_{A'} f(y)$,
3. $f(1_A) = 1_{A'}$.

De plus, si f est bijective, alors on dit que f est un **isomorphisme d'anneaux** *ou on dit que $(A, +_A, \times_A)$ et $(A', +_{A'}, \times_{A'})$ sont* **isomorphes** *par f.*

✗ *En particulier, si $(A, +_A, \times_A)$ et $(A', +_{A'}, \times_{A'})$ sont des corps, alors l'application f est qualifiée de* **morphisme de corps**.

Commentons cette définition.

- La première propriété signifie que f est un morphisme de l'ensemble structuré $(A, +_A)$ dans l'ensemble structuré $(A', +_{A'})$. Plus précisément, puisque $(A, +_A)$ et $(A', +_{A'})$ sont des groupes (par définition d'un anneau), f est en fait un morphisme de groupes de $(A, +_A)$ dans $(A', +_{A'})$ et on peut en déduire (ceci fait l'objet de l'exercice 7 donné en fin de chapitre) que

$$f(0_A) = 0_{A'}$$

[18] Nous utilisons ici l'équivalence : $x + y\sqrt{2} = 1 \iff (\ x = 1 \ \text{ et } \ y = 0\ )$ où x et y désignent deux nombres rationnels. Nous avons démontré ce résultat au chapitre 1, p. 18.

Copyrighted material

où 0_A et $0_{A'}$ désignent les zéros respectifs de $(A, +_A, \times_A)$ et $(A', +_{A'}, \times_{A'})$. On dit alors que f transporte le zéro de l'anneau. On peut aussi en déduire que pour tout élément a de A,

$$f(-a) = -f(a)$$

et on dit que f transporte le symétrique pour la première loi. On montre aussi par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a \in A \quad f(na) = nf(a).$$

– La deuxième propriété de la définition 2.40 signifie que f est un morphisme de l'ensemble structuré $(A, \times_A)$ dans l'ensemble structuré $(A', \times_{A'})$. Ce n'est en revanche pas un morphisme de groupes de $(A, \times_A)$ dans $(A', \times_{A'})$. Par conséquent, l'égalité $f(1_A) = 1_{A'}$ ne se déduit pas de la deuxième propriété. Elle figure donc explicitement dans la définition d'un morphisme d'anneaux. En procédant comme dans l'exercice 7, on déduit facilement des propriétés 2 et 3 que si l'élement a de A est inversible, d'inverse a^{-1}, alors

$$f(a^{-1}) = \big(f(a)\big)^{-1}$$

et on dit que f transporte le symétrique pour la deuxième loi. On montre aussi par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a \in A \quad f(a^n) = \big(f(a)\big)^n.$$

2.4 Exercices de synthèse

Exercice 6 *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. La différence symétrique de A et B est l'ensemble, noté $A\Delta B$, défini par*

$$A\Delta B \overset{déf.}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1 - La différence symétrique de deux ensembles est-elle commutative ?

2 - Expliciter les ensembles suivants : $A\Delta\emptyset$, $A\Delta A$ et $A\Delta B$ si $A \subset B$.

3 - Expliciter l'ensemble $(A\Delta B) \cup \big(A\Delta\complement_E(B)\big)$.

Exercice 7 *1 - Soient $(E, \top)$ un ensemble structuré. Un élément a appartenant à E est dit simplifiable à gauche pour la loi $\top$ si*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad a \top x = a \top y \implies x = y.$$

Un élément $a \in E$ est dit simplifiable à droite pour la loi $\top$ si

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \top a = y \top a \implies x = y.$$

Copyrighted material

Montrer que si $(G, \top)$ *est un groupe alors tout élément de* G *est simplifiable à gauche et à droite pour la loi* $\top$.

2 - Soient $(G_1, \top)$ *et* $(G_2, \perp)$ *deux groupes et* f *un morphisme de* $(G_1, \top)$ *dans* $(G_2, \perp)$. *On note* e_1 *l'élément neutre de* $(G_1, \top)$ *et* e_2 *l'élément neutre de* $(G_2, \perp)$. *Montrer que*

$$\forall x \in G_1 \quad f(e_1) \perp f(x) = f(x) \perp f(e_1) = f(x).$$

Déduire des questions précédentes que (on dit que f *transporte l'élément neutre) :*

$$f(e_1) = e_2.$$

On note x' *le symétrique de* $x \in G_1$ *pour la loi* $\top$ *et* y' *le symétrique de* $f(x) \in G_2$ *pour la loi* $\perp$. *Montrer que (on dit que* f *transporte le symétrique) :*

$$f(x') = y'.$$

Exercice 8 *Soit* n *un entier naturel tel que* $n \geqslant 2$. *Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur* n, *que toute permutation* σ *de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *est décomposable d'au moins une manière en un produit de transpositions. Indication : considérer les deux cas :*

$$\sigma(n+1) = n+1 \qquad et \qquad \sigma(n+1) = j \quad avec \quad j \leqslant n.$$

2.5 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - $(A \cup (A \cap B)) \cap B = A \cap B$.

2 - $(A \cap B) \cup \left(A \cap \complement_E(B)\right) = A$

3 - $\complement_E(A \cup B) \cap \left(C \cup \complement_E(A)\right) = \complement_E(A \cup B)$.

4 - $((A \cup B) \cap (B \cap C)) \cup (A \cup C) = A \cup C$.

5 - $(A \cup B) \cap ((B \cap C) \cup (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 2

Fonction $f : E \longmapsto F$	$\mathcal{D}_f$	Appl.	$f(E)$	I., S., B.
$x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	non		
$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	oui	$\mathbb{R}^* \neq F$	Inj.
$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto \dfrac{1}{x-2} \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	oui	$\mathbb{R}^* = F$	Bij.
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 2 \\ 1/x - 2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$	$\mathbb{R}$	oui	$\mathbb{R} = F$	Bij.
$x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	oui	$\mathbb{R}_+ \neq F$	non
$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	oui	$\mathbb{R}_+ \neq F$	Inj.
$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	oui	$\mathbb{R}_+ = F$	Bij.
$x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	non		
$x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	oui	$\mathbb{R} = F$	Bij.
$x \in]1, +\infty[\longmapsto \ln(x) \in \mathbb{R}_+^*$	$]1, +\infty[$	oui	$\mathbb{R}_+^* = F$	Bij.

Fonction $f : E \longmapsto F$	$\mathcal{D}_f$	Appl.	$f(E)$	I., S., B.
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$	$\mathbb{R}$	oui	$\mathcal{C}(0,1) \neq F$	non
$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$	$[0, 2\pi[$	oui	$\mathcal{C}(0,1) \neq F$	Inj.

Nota Bene : $\mathcal{C}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Solution de l'exercice 3

1 - Supposons l'application composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ injective et l'application $f : E \longrightarrow F$ surjective, et déduisons-en que l'application $g : F \longrightarrow G$ est injective, c'est-à-dire que :

$$\forall (y, y') \in F^2 \quad g(y) = g(y') \implies y = y'.$$

Considérons y et y' deux éléments de F tels que $g(y) = g(y')$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ et il existe $x' \in E$ tel que $f(x') = y'$. On a par conséquent l'égalité

$$g(f(x)) = g(f(x')),$$

Copyrighted material

dont on déduit (puisque $g \circ f$ est injective) que

$$x = x'.$$

En composant par f dans cette dernière égalité, on obtient $f(x) = f(x')$, c'est-à-dire $y = y'$ puisque $f(x) = y$ et $f(x') = y'$; ce qui termine la démonstration.

2 - Supposons maintenant l'application composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ surjective et l'application $g : F \longrightarrow G$ injective et déduisons-en que l'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, c'est-à-dire que :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad f(x) = y.$$

Soit y un élément de F. Son image par g appartient à G (c'est-à-dire, $g(y) \in G$). Puisque $g \circ f$ est surjective,

$$\exists x \in E \quad g(f(x)) = g(y).$$

On en déduit alors

$$f(x) = y$$

car g est injective ; ce qui termine la démonstration.

Solution de l'exercice 4

1 - Évident car les deux opérations usuelles $+$ et $\times$ sont elles-mêmes des lois de composition interne sur $\mathbb{R}$.

2 - La loi $\star$ est non associative car

$$2 \star (3 \star 4) = 52533 \neq (2 \star 3) \star 4 = 13605.$$

La propriété de commutativité de $\star$ se déduit de celle des deux lois usuelles $+$ et $\times$. L'élément neutre est l'élément 1. Bien sûr, $\mathbb{R}$ ne possède pas une structure de groupe pour la loi $\star$ puisque la loi n'est pas associative.

3 - Notons 2^* un symétrique de l'élément 2 pour la loi $\star$. Il vérifie

$$2^* \star 2 = 1 = 2 \star 2^*.$$

L'élément 2 possède deux symétriques pour la loi $\star$, que sont

$$2_1^* = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad 2_2^* = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

4 - L'équation algébrique $2 \star x = 2$ admet pour solutions 1 et $-5/3$; l'équation algébrique $2 \star x = 5$ admet pour solutions $4/3$ et -2.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 5

C'est immédiat en développant le terme de gauche (un simple calcul algébrique). Remarquer que nous n'avons pas eu besoin de supposer que l'anneau soit commutatif pour établir ce résultat. De la même manière, on montre aussi que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in A \quad 1_A - x^n = (1_A + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) \times (1_A - x).$$

Montrons à présent que si l'élément a de A est nilpotent alors $1_A - a$ est inversible, c'est-à-dire que l'élément $1_A - a$ est symétrisable pour la loi $\times$. On recherche donc un élément de A, notons-le $(1_A - a)^{-1}$, tel que

$$(1_A - a) \times (1_A - a)^{-1} = 1_A \text{ et } (1_A - a)^{-1} \times (1_A - a) = 1_A.$$

Puisque a est nilpotent, il existe un entier N non nul tel que $a^N = 0_A$. L'égalité établie ci-avant permet alors d'écrire

$$1_A = (1_A - a) \times (1_A + a + a^2 + \ldots + a^{N-1}),$$
$$1_A = (1_A + a + a^2 + \ldots + a^{N-1}) \times (1_A - a).$$

Par conséquent, $(1_A - a)^{-1} = 1_A + a + a^2 + \ldots + a^{N-1}$.

Solution de l'exercice 6

1 - Elle est commutative car $\cup$ l'est.

2 - On remarque que $A \setminus B = A \cap \complement_E(B)$. Ainsi,

$$A \Delta B = \left(A \cap \complement_E(B)\right) \cup \left(B \cap \complement_E(A)\right).$$

On en déduit $A \Delta \emptyset = A$, $A \Delta A = \emptyset$ et si $A \subset B$ alors $A \Delta B = B \setminus A$.

3 - On a

$$\begin{aligned}
&(A \Delta B) \cup \left(A \Delta \complement_E(B)\right) \\
&= \Big(\left(A \cap \complement_E(B)\right) \cup \left(B \cap \complement_E(A)\right)\Big) \cup \Big(\left(A \cap B\right) \cup \left(\complement_E(B) \cap \complement_E(A)\right)\Big) \\
&= \Big(\left(A \cap \complement_E(B)\right) \cup \left(A \cap B\right)\Big) \cup \Big(\left(B \cap \complement_E(A)\right) \cup \left(\complement_E(B) \cap \complement_E(A)\right)\Big) \\
&= \Big(A \cap \left(\complement_E(B) \cup B\right)\Big) \cup \Big(\left(B \cup \complement_E(B)\right) \cap \complement_E(A)\Big).
\end{aligned}$$

Or $\complement_E(B) \cup B = B \cup \complement_E(B) = E$. Ainsi,

$$(A \Delta B) \cup \left(A \Delta \complement_E(B)\right) = \Big(A \cap E\Big) \cup \Big(E \cap \complement_E(A)\Big) = A \cup \complement_E(A) = E.$$

Solution de l'exercice 7

1 - Soit a un élément de G avec $(G, \top)$ un groupe. Montrons que a est un élément simplifiable à gauche et à droite, c'est-à-dire montrons que l'on a pour tous $x, y \in G$, d'une part l'implication $a \top x = a \top y \Longrightarrow x = y$, et d'autre part l'implication $x \top a = y \top a \Longrightarrow x = y$. Soit $a' \in G$ le symétrique de a pour la loi $\top$. On note $e \in G$ l'élément neutre pour cette même loi. Soient x et y deux éléments de G.

Copyrighted material

– Composons à gauche chaque membre de l'égalité $a \top x = a \top y$ par a'.

$$\begin{array}{rcl} a \top x = a \top y & \Longrightarrow & a' \top (a \top x) = a' \top (a \top y) \\ & \Longleftrightarrow & (a' \top a) \top x = (a' \top a) \top y \quad (\text{car } \top \text{ est associative}) \\ & \Longleftrightarrow & e \top x = e \top y \quad (\text{car } e \text{ est l'élément neutre}) \\ & \Longleftrightarrow & x = y. \end{array}$$

– De même, composons à droite chaque membre de l'égalité $x \top a = y \top a$ par a'.

$$\begin{array}{rcl} x \top a = y \top a & \Longrightarrow & (x \top a) \top a' = (y \top a) \top a' \\ & \Longrightarrow & x \top (a \top a') = y \top (a \top a') \quad (\text{car } \top \text{ est associative}) \\ & \Longleftrightarrow & x \top e = y \top e \quad (\text{car } e \text{ est l'élément neutre}) \\ & \Longleftrightarrow & x = y. \end{array}$$

2 - Puisque e_1 est l'élément neutre de $(G_1, \top)$, pour tout $x \in G_1$ on a à la fois $e_1 \top x = x$ et $x \top e_1 = x$. Il suffit alors de composer par f dans chacune de ces deux égalités. En effet, puisque f est un morphisme de $(G_1, \top)$ dans $(G_2, \perp)$, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_1 \top x = x & \Longrightarrow & f(e_1 \top x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(e_1) \perp f(x) = f(x) \\ x \top e_1 = x & \Longrightarrow & f(x \top e_1) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \perp f(e_1) = f(x) \end{array} \right.$$

c'est-à-dire $f(e_1) \perp f(x) = f(x) \perp f(e_1) = f(x)$ pour tout $x \in G_1$.

$\trianglerighteq$ En prenant $x = e_1$ dans une des deux égalités établies à la question précédente, on obtient

$$f(e_1) = f(e_1) \perp f(e_1).$$

Or, puisque e_2 est l'élément neutre de $(G_2, \perp)$, on a aussi

$$f(e_1) = f(e_1) \perp e_2.$$

En regroupant les deux expressions de $f(e_1)$, on obtient

$$f(e_1) \perp f(e_1) = f(e_1) \perp e_2 \implies f(e_1) = e_2$$

où on a simplifié à gauche par $f(e_1)$ (ce qu'on a le droit de faire puisque dans un groupe, tout élément est simplifiable).

$\trianglerighteq$ Puisque $x' \in G_1$ est le symétrique de x pour la loi $\top$, on a $x' \top x = e_1$ et en composant par f, on obtient l'égalité $f(x' \top x) = f(e_1)$ qui s'écrit aussi

$$f(x') \perp f(x) = e_2$$

où on a tenu compte que f est un morphisme de $(G_1, \top)$ dans $(G_2, \perp)$ et que l'image de e_1 par f est l'élément neutre e_2 (*cf.* question précédente). Puisque $y' \in G_2$ est le symétrique de $f(x)$ pour la loi $\perp$, on a aussi $y' \perp f(x) = e_2$. On obtient alors que

$$y' \perp f(x) = f(x') \perp f(x) \implies y' = f(x')$$

où on a simplifié par $f(x)$, ce qui termine la démonstration.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 8

Soit $n \geqslant 2$. Montrons que toute permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est un produit de transpositions. La démonstration s'effectue par récurrence sur n. Le cas $n = 2$ est immédiat. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$.

$\trianglerighteq$ On considère dans un premier temps le cas où σ laisse $n+1$ invariant, c'est-à-dire le cas où

$$\sigma(n+1) = n+1.$$

La restriction de σ à $\{1, 2, \ldots, n\}$, que l'on note $\sigma|_{\{1,2,\ldots,n\}}$, est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, elle s'écrit comme un produit de N transpositions de $\{1, 2, \ldots, n\}$, notées $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, ..., $\tau^{(N)}$, c'est-à-dire

$$\sigma|_{\{1,2,\ldots,n\}} = \tau^{(1)} \circ \tau^{(2)} \circ \ldots \circ \tau^{(N)}.$$

Les applications $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, ..., $\tau^{(N)}$, definies sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, s'étendent à $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ (on note $\widetilde{\tau^{(1)}}$, $\widetilde{\tau^{(2)}}$, ..., $\widetilde{\tau^{(N)}}$ les applications prolongées) en posant

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, N\} \quad \begin{cases} \widetilde{\tau^{(i)}}(n+1) = n+1 \\ \widetilde{\tau^{(i)}}(k) = \tau^{(i)}(k) \text{ si } k \in \{1, 2, \ldots, n\} \end{cases}$$

et on vérifie l'égalité

$$\sigma = \widetilde{\tau^{(1)}} \circ \widetilde{\tau^{(2)}} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau^{(N)}},$$

ce qui montre que la permutation σ s'écrit comme le produit de transpositions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n+1\}$.

$\trianglerighteq$ On considère maintenant le cas où σ ne laisse pas $n+1$ invariant, c'est-à-dire où

$$\sigma(n+1) = j \quad \text{avec} \quad j \leqslant n.$$

On désigne par $\tau_{j,n+1}$ la transposition de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ échangeant j et $n+1$. On vérifie que $\tau_{j,n+1} \circ \sigma$ laisse $n+1$ invariant, c'est-à-dire que

$$(\tau_{j,n+1} \circ \sigma)(n+1) = n+1.$$

On est alors ramené au cas précédent, ce qui permet d'écrire

$$\tau_{j,n+1} \circ \sigma = \widetilde{\tau^{(1)}} \circ \widetilde{\tau^{(2)}} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau^{(N)}}$$

où $\widetilde{\tau^{(1)}}, \widetilde{\tau^{(2)}}, \ldots, \widetilde{\tau^{(N)}}$ sont des transpositions de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. En composant à gauche par $\tau_{j,n+1}$, on obtient :

$$\sigma = \tau_{j,n+1} \circ \widetilde{\tau^{(1)}} \circ \widetilde{\tau^{(2)}} \circ \ldots \circ \widetilde{\tau^{(N)}}$$

puisque $\tau_{j,n+1} \circ \tau_{j,n+1} = \mathrm{id}_{\{1,2,\ldots,n+1\}}$; ce qui termine la démonstration.

Copyrighted material

Copyrighted material

Deuxième partie

Ensembles numériques fondamentaux

Copyrighted material

Copyrighted material

CHAPITRE 3

Le corps des réels

3.1 Généralités

On suppose connues les propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. On désigne par $+$ et $\times$ l'addition et la multiplication entre entiers.

3.1.1 Le corps des rationnels

La relation $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ définie sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \ \forall (m',n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \\ \big((m,n)\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}(m',n') \Longleftrightarrow m \times n' = n \times m'\big)$$

est une relation d'équivalence[1]. L'ensemble quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ est noté $\mathbb{Q}$ et est appelé ***ensemble des nombres rationnels***. Remarquons que l'on peut identifier $\mathbb{Z}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ via l'injection $m \in \mathbb{Z} \longmapsto (m,1) \in \mathbb{Q}$. On note $\frac{m}{n}$ ou m/n la classe d'équivalence d'un élément (m,n) de $\mathbb{Q}$ et plus simplement m la classe d'équivalence de $(m,1)$. Si $m/n \in \mathbb{Q}$, les éléments de la classe d'équivalence de m/n pour la relation $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ (c'est-à-dire les éléments (a,b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $a/b = m/n$) sont appelés les fractions qui représentent m/n. L'entier relatif a est appelé le numérateur et b le dénominateur de la fraction. On désigne aussi la fraction a/b comme le quotient de a par b. Il résulte de la définition de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ que

$$\forall d \in \mathbb{Z} \quad \frac{d \times a}{d \times b} = \frac{a}{b}.$$

Il est de coutume de prendre pour représentant d'une classe d'équivalence la fraction $(\varepsilon m)/n$ où $\varepsilon \in \{-1,1\}$ et m et n sont deux entiers naturels premiers entre eux (c'est-à-dire sans diviseur commun autre que 1).

[1] Voir la définition 2.28, p. 55.

Copyrighted material

On munit l'ensemble $\mathbb{Q}$ des 2 lois notées $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$ définies par

$$\frac{m}{n} +_{\mathbb{Q}} \frac{m'}{n'} = \frac{m \times n' + m' \times n}{n \times n'} \quad \text{pour tout } \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q};$$

$$\frac{m}{n} \times_{\mathbb{Q}} \frac{m'}{n'} = \frac{m \times m'}{n \times n'} \quad \text{pour tout } \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q}.$$

On vérifie que $\mathbb{Q}$ muni des lois $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$ est un corps commutatif, c'est-à-dire que l'on a les propriétés suivantes.

- La loi $+_{\mathbb{Q}}$ est associative : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \quad (x +_{\mathbb{Q}} y) +_{\mathbb{Q}} z = x +_{\mathbb{Q}} (y +_{\mathbb{Q}} z)$.
- La loi $+_{\mathbb{Q}}$ est commutative : $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad x +_{\mathbb{Q}} y = y +_{\mathbb{Q}} x$.
- La loi $+_{\mathbb{Q}}$ possède pour ***élément neutre*** l'élément[(2)] $(0,1)$ noté $0_{\mathbb{Q}}$. Cet élément vérifie : $\forall x \in \mathbb{Q} \quad x +_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} = x$.
- Tout élément $x = (m,n)$ de $\mathbb{Q}$ possède un ***symétrique*** dans $\mathbb{Q}$ pour la loi $+_{\mathbb{Q}}$. Il s'agit de l'élément[(2)] $(-m,n)$, noté $-x$, qui vérifie : $x +_{\mathbb{Q}} -x = 0_{\mathbb{Q}}$.

Autrement dit, $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}})$ est un groupe commutatif.

- La loi $\times_{\mathbb{Q}}$ est associative : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \quad (x \times_{\mathbb{Q}} y) \times_{\mathbb{Q}} z = x \times_{\mathbb{Q}} (y \times_{\mathbb{Q}} z)$.
- La loi $\times_{\mathbb{Q}}$ est commutative : $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad x \times_{\mathbb{Q}} y = y \times_{\mathbb{Q}} x$.
- La loi $\times_{\mathbb{Q}}$ possède pour ***élément neutre*** l'élément[(2)] $(1,1)$ noté $1_{\mathbb{Q}}$. Cet élément vérifie : $\forall x \in \mathbb{Q} \quad x \times_{\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}} = x$.
- Tout élément $x = (m,n)$ de $\mathbb{Q}$ différent de $0_{\mathbb{Q}}$ possède un ***symétrique*** dans $\mathbb{Q}$ pour la loi $\times_{\mathbb{Q}}$. Il s'agit de l'élément[(2)] (n,m) qui est noté x^{-1} et qui vérifie : $x \times_{\mathbb{Q}} x^{-1} = 1_{\mathbb{Q}}$.
- la loi $\times_{\mathbb{Q}}$ est distributive sur $+_{\mathbb{Q}}$:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \quad (x +_{\mathbb{Q}} y) \times_{\mathbb{Q}} z = (x \times_{\mathbb{Q}} z) +_{\mathbb{Q}} (y \times_{\mathbb{Q}} z).$$

On note $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble $\left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q}_+ \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$.

3.1.2 Relation d'ordre sur un ensemble

Définition 3.1 *Soit E un ensemble non vide. Une relation $\mathcal{R}$ de E dans E est appelée une* ***relation d'ordre*** *sur E si elle est :*

- ***réflexive*** *: $\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x$;*
- ***anti-symétrique*** *: $\forall (x,y) \in E^2 \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Longrightarrow x = y$;*
- ***transitive*** *: $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Longrightarrow x \mathcal{R} z$.*

(2) Dont un représentant de la classe d'équivalence est ; voir page 55.

Copyrighted material

Exemples

1. On vérifie que sur $\mathbb{Q}$ la relation $\leqslant$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q} \quad \left(x \leqslant y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}_+\right)$$

est une relation d'ordre. On écrit également $y \geqslant x$ au lieu de $x \leqslant y$.

2. Sur $\mathbb{Q}$ la relation $<$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q} \quad \left(x < y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}_+^*\right)$$

n'est pas une relation d'ordre (elle n'est ni réflexive, ni anti-symétrique). On écrit également $y > x$ au lieu de $x < y$.

3. Soit A un ensemble. La relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(A)$.

Définition 3.2 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Cette relation d'ordre est qualifiée de* **relation d'ordre total** *sur E si*

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \left(x \mathcal{R} y \;\; ou \;\; y \mathcal{R} x\right).$$

Proposition 3.1 *La relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$ a les propriétés suivantes :*

✗ *il s'agit d'une relation d'ordre* **total** *:*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \quad \left(x \leqslant y\right) \;\; ou \;\; \left(y \leqslant x\right);$$

✗ *elle est* **compatible** *avec les lois $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$:*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3 \quad \left(x \leqslant y \implies x +_{\mathbb{Q}} z \leqslant y +_{\mathbb{Q}} z\right)$$
$$et \quad \Big(\left(x \leqslant y \;\; et \;\; 0 \leqslant z\right) \implies x \times_{\mathbb{Q}} z \leqslant y \times_{\mathbb{Q}} z\Big).$$

On dit que le corps $(Q, +_{\mathbb{Q}}, \times_{\mathbb{Q}})$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$ est un corps ***totalement ordonné.***

Démonstration Elle est immédiate en revenant à la définition de la relation $\leqslant$.

□

3.1.3 Bornes supérieure et inférieure

Définition 3.3 *Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ et A un sous-ensemble non vide de E. On dit qu'un élément S de E est un* **majorant** *de A si*

$$\forall x \in A \quad x \leqslant S.$$

Si l'ensemble des majorants est non vide, on dit que l'ensemble A est **majoré.**

Copyrighted material

Si un élément M de A est un majorant de A, alors il est unique et est appelé ***élément maximal*** de A. On note $M = \max_E A$.

Définition 3.4 *Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ et A un sous-ensemble non vide de E. On dit qu'un élément s de E est un* ***minorant*** *de A si*

$$\forall x \in A \quad s \leqslant x.$$

Si l'ensemble des minorants est non vide, on dit que l'ensemble A est ***minoré***.

Si un élément m de A est un minorant de A, alors il est unique et est appelé ***élément minimal*** de A. On note $m = \min_E A$.

Un ensemble A qui est à la fois minoré et majoré est dit ***borné***.

Définition 3.5 *Soient E un ensemble muni d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ et A un sous-ensemble non vide de E.*

✗ *Si A est majoré, on appelle* **supremum** *ou* **borne supérieure** *de A le plus petit élément,* ***s'il existe****, de l'ensemble des majorants. On le note* $\sup_E A$.

✗ *Si A est minoré, on appelle* **infimum** *ou* **borne inférieure** *de A le plus grand élément,* ***s'il existe****, de l'ensemble des minorants. On le note* $\inf_E A$.

Exemples

1. Soient $E = \mathbb{Q}$ et $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x \text{ et } x \leqslant 2\}$.
L'ensemble des majorants $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 2\}$ possède pour plus petit élément 2 ; cet élément appartient à A. La borne supérieure de A est donc son élément maximal.

2. Soient $E = \mathbb{Q}$ et $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x \text{ et } x < 2\}$.
L'ensemble des majorants $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 2\}$ possède pour plus petit élément 2 ; cet élément n'appartient pas à A. L'ensemble A possède donc une borne supérieure mais pas d'élément maximal.

Remarque On prendra garde que l'élément maximal (resp. l'élément minimal) ou la borne supérieure (resp. la borne inférieure) d'un ensemble A dépend de l'ensemble E dont A est un sous-ensemble. Ainsi si $A = \{x \in E \mid 3x < 5\}$ on a

$$\sup_{\mathbb{Q}} A = \frac{5}{3} \qquad \text{et} \qquad \sup_{\mathbb{Z}} A = 1.$$

Dans $\mathbb{Q}$, la borne supérieure de A qui vaut $5/3$ n'est pas élément maximal de A. Dans $\mathbb{Z}$, la borne supérieure de A qui vaut 1 est également l'élément maximal de A. Par ailleurs, un ensemble majoré n'admet pas nécessairement de borne supérieure. L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ et } x^2 < 2\}$ est majoré (3 est un majorant) mais ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (nous l'établirons dans la section suivante).

Copyrighted material

3.1.4 Les insuffisances du corps des rationnels

Une première insuffisance

Il est aisé de vérifier que si r désigne un nombre rationnel, il n'existe pas nécessairement de nombre rationnel x tel que $x \times_{\mathbb{Q}} x = r$. Autrement dit l'équation $x^2 = r$ n'a pas forcément de solution dans $\mathbb{Q}$. C'est le cas par exemple de l'équation $x^2 = 2$. Si cette équation avait une solution dans $\mathbb{Q}_+$, alors il existerait $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec m et n sans diviseur commun autre que 1 tels que $m^2 = 2n^2$. Ceci impliquerait que m^2 est pair et par conséquent que m est pair (le produit de 2 nombres impairs est impair). Ainsi il existerait un entier naturel k non nul tel que $m = 2k$. On aurait alors $2n^2 = m^2 = 4k^2$ ce qui impliquerait que $n^2 = 2k^2$ et donc n serait pair. Ceci contredirait notre hypothèse que m et n sont sans diviseur commun autre que 1. Par ailleurs si l'équation avait une solution x dans $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_+$ alors le rationnel $-x$ qui appartiendrait à $\mathbb{Q}_+$ serait aussi solution. On vient de voir que c'est impossible. Ce raisonnement par l'absurde permet de conclure que l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Une seconde insuffisance

On peut par ailleurs démontrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ et } x^2 < 2\}$ ne possède ni élément maximal ni borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Pour le vérifier, raisonnons par l'absurde.

Soit f l'application de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{Q}_+^*$ définie par $f(x) = \dfrac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$. On montre aisément que

$$f(x)^2 - 2 = \frac{(x^2-2)^3}{(3x^2+2)^2} \tag{1}$$

$$\text{et} \qquad f(x) - x = \frac{2x(2-x^2)}{3x^2+2}. \tag{2}$$

▷ Supposons que A possède un élément maximal a. On a $a^2 < 2$ car $a \in A$. D'après la relation (1), $b = f(a)$ est élément de A (car $f(a)^2 - 2 < 0$) et d'après la relation (2), $b > a$ (car $f(a) - a > 0$). Il y a contradiction car $b \in A$ est strictement supérieur à l'élément maximal a. L'ensemble A ne possède donc pas d'élément maximal.
▷ Supposons maintenant que A possède une borne supérieure a. L'ensemble des majorants de A est $M = \{x \in \mathbb{Q}_+^* \mid x^2 \geqslant 2\}$. On a donc $a^2 \geqslant 2$. D'après la relation (1), $b = f(a)$ est élément de M (car $f(a)^2 - 2 \geqslant 0$) et d'après la relation (2), $b \leqslant a$ (car $f(a) - a \leqslant 0$). D'après la définition de la borne supérieure cela implique que $b = a$. On déduit de la relation (2) que $2 - a^2 = 0$. C'est impossible car nous avons montré que 2 n'est le carré d'aucun rationnel. L'ensemble A ne possède donc pas de borne supérieure.

Ainsi dans $\mathbb{Q}$ un ensemble borné ne possède pas nécessairement de borne supérieure (ou de borne inférieure). On peut montrer que le fait que l'équation $x^2 = r, r \in \mathbb{Q}$ n'admet pas nécessairement de solution dans $\mathbb{Q}$ est lié à cette

Copyrighted material

même insuffisance. Il est donc souhaitable de construire une extension de l'ensemble $\mathbb{Q}$ qui, en plus d'être un corps commutatif totalement ordonné, posséderait la propriété suivante : « tout sous-ensemble borné possède une borne supérieure et une borne inférieure ». L'ensemble des nombres réels répond à ce désir. Comme nous l'avons fait pour les nombres rationnels, il convient de construire avec précision l'ensemble des nombres réels et d'en étudier les propriétés.

Extension du corps des rationnels

La façon la plus simple de définir les nombres réels serait de dire qu'il s'agit de développements décimaux[3] illimités de la forme $x_0, x_1 x_2 \ldots$ comme $0,33333\ldots$ ou $\pi = 3,14159\ldots$. Autrement dit, un nombre réel serait définit comme une suite $(x_n)_n$ de chiffres, donc d'entiers naturels. Cela provoque un certain nombre de difficultés comme par exemple de connaître toutes les décimales de π ou encore d'expliquer pourquoi les développements $1,00\ldots$ et $0,99\ldots$ désignent le même nombre 1. D'autre part il serait délicat d'étendre à cet ensemble les lois somme et produit définies sur $\mathbb{Q}$. Si l'on essaie de généraliser aux développements décimaux illimités les règles d'addition et de multiplication des nombres décimaux, on se heurte au fait qu'il n'y a pas de « dernier chiffre à droite ».

Une méthode mathématiquement satisfaisante pour définir les nombres réels a été publiée en 1872 par Richard Dedekind[4]. Elle marque le début de « la modernité en mathématique, laquelle consiste à construire à l'aide de la logique et de la théorie des ensembles tous les objets mathématiques et à établir à partir de là leurs propriétés »[5]. Cette méthode relativement simple mais peu intuitive consiste à définir un réel comme une partie de l'ensemble $\mathbb{Q}$. Il existe d'autres méthodes pour construire l'ensemble des nombres réels, par exemple en utilisant les suites de Cauchy[6] dans $\mathbb{Q}$. D'ailleurs cette même année 1872 paraissent trois autres constructions du corps des nombres réels qui sont l'œuvre de Weierstrass, Cantor et Méray[7].

Pour une construction détaillée du corps des nombres réels et une présentation des différentes méthodes de construction, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage : *La planète* $\mathbb{R}$*, Voyage au pays des nombres réels*, R. Brouzet et H. Boualem, Collection UniverSciences (Dunod, 2002). Nous nous contenterons dans la section suivante de donner un aperçu de la méthode de Dedekind.

---

[3] On appelle nombre décimal un nombre rationnel qui est le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10. Par exemple 2/100 ou 3/50 sont des nombres décimaux, mais pas 1/3.

[4] DEDEKIND, Richard (1831, Braunschweig (Allemagne) - 1916, Braunschweig).

[5] R. Godement, Analyse mathématique, tome 1, Springer-Verlag, 2001.

[6] Voir le chapitre 5, page 191, pour la définition d'une suite de Cauchy.

[7] WEIERSTRASS, Karl (1815, Ostenfelde (Westphalie) - 1897, Berlin).
CANTOR, Georg (1845, Saint-Petersbourg - 1918, Halle (Allemagne)).
MÉRAY, Charles (1835, Chalon-sur-Saône - 1911, Dijon).

Copyrighted material

3.1.5 Le corps des réels

La méthode de Dedekind pour construire l'ensemble des réels consiste à définir les nombres réels en introduisant dans $\mathbb{Q}$ des ensembles particuliers appelés ***coupures***. On appelle coupure un sous-ensemble X de $\mathbb{Q}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- $\forall x \in X \quad \forall y \in \mathbb{Q} \setminus X \quad y < x$;
- X n'a pas de plus petit élément.

On définit alors un nombre réel comme étant une coupure. Intuitivement une coupure est l'ensemble de tous les nombres rationnels qui sont strictement supérieurs à un *nombre réel* donné et il n'y a aucune différence de nature entre un nombre réel et l'ensemble de tous les nombres rationnels qui lui sont supérieurs.

L'ensemble $\mathcal{D}$ des coupures de $\mathbb{Q}$ peut être muni d'une structure de corps totalement ordonné. La démonstration est aisée et n'utilise que des résultats de théorie des ensembles, mais elle est fastidieuse. On définit la relation d'ordre $\leqslant$ sur l'ensemble $\mathcal{D}$ par :

$$X \leqslant Y \text{ si } X \subset Y.$$

On définit la somme entre deux réels (coupures) de la manière suivante :

$$X + Y = \left\{ z \in \mathbb{Q} \;\middle|\; z = x +_{\mathbb{Q}} y \quad x \in X,\ y \in Y \right\}.$$

Le produit est un peu plus délicat à définir. Dans un premier temps si X et Y sont deux réels positifs (i.e. coupures incluses dans $\mathbb{Q}_+$) on définit

$$X \times Y = \left\{ z \in \mathbb{Q}_+ \;\middle|\; z = x \times_{\mathbb{Q}} y \quad x \in X,\ y \in Y \right\}.$$

Dans le cas où X et Y ne sont pas positifs, le produit précédent ne donne pas une coupure. Si X est un réel négatif et Y est un réel positif, le réel $-X$ qui est l'opposé de X pour l'addition est un réel positif, et on définit le produit $X \times Y$ par

$$X \times Y = -(-X) \times Y.$$

On procède de même dans les autres cas envisageables.

Il faut vérifier que l'ensemble $\mathcal{D}$ muni des lois $+$ et $\times$ et de la relation d'ordre $\leqslant$ est un corps totalement ordonné. Il faut également vérifier qu'il possède la propriété de la borne supérieure (i.e. : tout ensemble majoré dans $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure) qui faisait défaut à $\mathbb{Q}$. Enfin, il faut vérifier que le corps ainsi construit possède les propriétés attendues concernant les réels. Bien entendu, le seul intérêt de la construction de $\mathbb{R}$ est de prouver l'existence du corps des réels. La construction peut être ensuite *oubliée* au profit des propriétés de $\mathbb{R}$.

Nous admettrons donc, à défaut d'avoir mené à son terme la construction de l'ensemble des nombres réels, l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ et d'une relation d'ordre total qui prolongent celles définies sur $\mathbb{Q}$ et qui possède les propriétés suivantes.

Copyrighted material

Propriétés de la somme

- La loi + est associative : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x+y)+z = x+(y+z)$;
- la loi + est commutative : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x+y = y+x$;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ possède un élément neutre pour + qui est l'entier 0 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x+0 = x$;
- tout élément x de $\mathbb{R}$ possède un symétrique dans $\mathbb{R}$ pour la loi + appelé « opposé de x » et noté $-x$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists (-x) \in \mathbb{R} \quad x+(-x) = 0$.

Pour x et y réels, on note $x-y$ la somme de x avec l'opposé de y. On définit ainsi une loi de composition interne appelée soustraction qui n'est ni associative, ni commutative.

La commutativité et l'associativité de la loi + ont pour conséquence la possibilité de considérer des sommes de réels de la forme $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ sans se préoccuper de l'ordre des termes. On note une telle somme $\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Propriétés du produit

- la loi $\times$ est associative : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$;
- la loi $\times$ est commutative : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \times y = y \times x$;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ possède un élément neutre pour $\times$ qui est l'entier 1 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \times 1 = x$;
- tout élément x de $\mathbb{R}$ différent de 0 possède un symétrique dans $\mathbb{R}$ pour la loi $\times$ appelé « inverse de x » et noté x^{-1} :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \quad x \times x^{-1} = 1;$$

- la loi $\times$ est distributive sur + :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x+y) \times z = (x \times z) + (y \times z).$$

On note souvent le produit de deux réels x et y par juxtaposition xy plutôt que $x \times y$.

Pour x et y réels, $y \neq 0$, on note x/y le produit de x avec l'inverse de y. On définit ainsi une loi de composition interne appelée division qui n'est ni associative, ni commutative.

La commutativité et l'associativité de la loi $\times$ ont pour conséquence la possibilité de considérer des produits de réels de la forme $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$ sans se préoccuper de l'ordre des termes. On note un tel produit $\prod_{k=1}^{n} x_k$.

Pour tout réel x on définit la puissance n-ième de x (ou n désigne un entier naturel) par la relation de récurrence : $x^0 = 1, x^n = x \times x^{n-1}$. On a alors pour tout entier n non nul $1^n = 1$ et pour tout entier n non nul $0^n = 0$. Si x est un réel non nul, on note x^{-n} l'inverse du réel x^n.

Copyrighted material

Propriétés de la relation d'ordre

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$:

- elle est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant x$;
- elle est anti-symétrique : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Longrightarrow x = y$;
- elle est transitive : $\forall (x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$.

Cette relation d'ordre est compatible avec les lois + et $\times$,

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \big(x \leqslant y \implies x+z \leqslant y+z\big)$$
$$\text{et} \quad \Big(\big(x \leqslant y \text{ et } 0 \leqslant z\big) \implies x \times z \leqslant y \times z\Big).$$

On écrit aussi $x \geqslant y$ pour $y \leqslant x$. On définit la relation $<$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x < y \quad \text{si} \quad \big(x \leqslant y \text{ et } x \neq y\big).$$

Il ne s'agit pas d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (elle n'est ni réflexive, ni symétrique). On note aussi $y > x$ pour $x < y$.

On note,

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x\}$ l'ensemble des réels positifs ;

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$ l'ensemble des réels négatifs ;

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ l'ensemble des réels strictement positifs ;

$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ l'ensemble des réels strictement négatifs ;

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 0\}$ l'ensemble des réels non nuls.

Propriétés de la borne supérieure

Proposition 3.2 ✗ *Tout sous-ensemble A non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ; de plus, il existe un réel b tel que*

$$(\forall x \in A \quad x \leqslant b) \text{ et } (\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x_\epsilon \in A \quad b - \epsilon < x_\epsilon).$$

✗ *Tout sous-ensemble A non vide et minoré de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure ; de plus, il existe un réel a tel que*

$$(\forall x \in A \quad x \geqslant a) \text{ et } (\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x_\epsilon \in A \quad a + \epsilon > x_\epsilon).$$

Dans la caractérisation de la borne supérieure donnée à la proposition 3.2, la condition « $\forall x \in A \quad x \leqslant b$ » exprime le fait que b est un majorant de A. La condition « $\exists x_\epsilon \in A \quad b - \epsilon < x_\epsilon$ » exprime qu'il s'agit du plus petit : dès

Copyrighted material

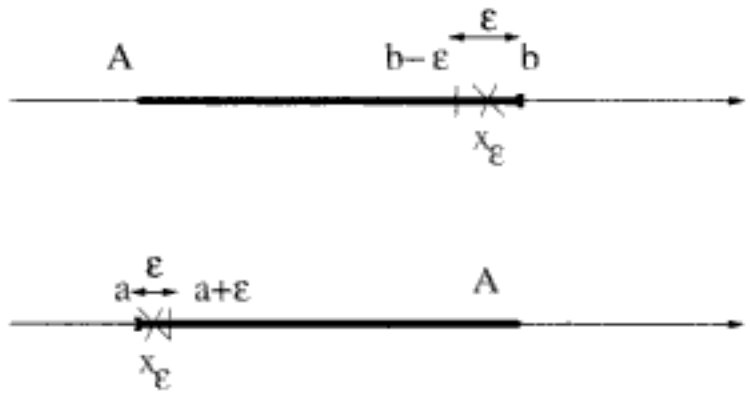


Fig. 1 Illustration de la situation décrite à la proposition 3.2.

que l'on veut retrancher une quantité ϵ aussi petite soit-elle à b, on trouve des éléments de A qui sont plus grand que $b-\epsilon$ (fig. 1). Le réel $b-\epsilon$ n'est donc pas un majorant de A. Dans la caractérisation de la borne inférieure, la condition « $\forall x \in A \quad x \geqslant a$ » exprime le fait que a est un minorant de A. La condition « $\exists x_\epsilon \in A \quad a+\epsilon > x_\epsilon$ » exprime qu'il s'agit du plus grand : dès que l'on veut ajouter une quantité ϵ aussi petite soit-elle à a, on trouve des éléments de A qui sont plus petits que $a+\epsilon$ (fig. 1). Le réel $a+\epsilon$ n'est donc pas un minorant de A.

Exemple Considérons l'ensemble $E = \left\{1/(1+x^2) \mid x \in \mathbb{R}_+^*, x \leqslant 1\right\}$. Sous l'hypothèse $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$0 < x \leqslant 1 \iff 0 < x^2 \leqslant 1 \iff 1 < 1+x^2 \leqslant 2$$
$$\iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} < 1.$$

On en déduit que l'ensemble E est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Il admet pour borne supérieure 1 mais n'admet pas d'élément maximal. Il admet pour borne inférieure $1/2$ qui est également son élément minimal.

Théorème 3.1 (Propriété d'Archimède)

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \qquad n\varepsilon > x.$$

Démonstration Soient ε et x deux réels strictement positifs fixés. L'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n\varepsilon \leqslant x\}$ est un sous-ensemble non vide ($0 \in E$) et majoré (par x) de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure b dans $\mathbb{R}$ (qui par définition est le plus petit des majorants de E). Puisque $b-1$ n'est pas un majorant de E, il existe $\widetilde{n} \in E$ tel que $\widetilde{n} > b-1$. On en déduit que $\widetilde{n}+1 > b$ et par conséquent que l'entier non nul $n_0 = \widetilde{n}+1$ n'appartient pas à E. On a donc $n_0\varepsilon > x$. La

Copyrighted material

propriété d'Archimède est démontrée : il existe un entier naturel non nul n_0 tel que $n_0\varepsilon > x$ □

Remarque On appelle nombre irrationnel un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et nombre algébrique un réel qui vérifie une équation algébrique à coefficients rationnels (c'est-à-dire de la forme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, avec $a_k \in \mathbb{Q}, k \in \{0, \ldots, n\}$). L'ensemble des nombres algébriques contient $\mathbb{Q}$ et est un ensemble dénombrable. Les autres réels sont qualifiés de transcendants. Par exemple $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel et un nombre algébrique (il est solution de l'équation algébrique $x^2 - 2 = 0$) alors que π est un nombre irrationnel et un nombre transcendant.

3.2 Propriétés des nombres réels

3.2.1 Propriétés calculatoires

L'objet de ce paragraphe est de rappeler les principales propriétés et formules calculatoires concernant les nombres réels.

1. $\forall (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \quad \big((x \leqslant y) \text{ et } (u \leqslant v)\big) \Longrightarrow x + u \leqslant y + v$

$$\big((x \leqslant y) \text{ et } (u < v)\big) \Longrightarrow x + u < y + v$$

$$\big((x \leqslant y) \text{ et } (u \geqslant 0)\big) \Longrightarrow x \times u \leqslant y \times u$$

$$\big((x \leqslant y) \text{ et } (u \leqslant 0)\big) \Longrightarrow x \times u \geqslant y \times u$$

2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \quad 0 < x \leqslant y \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$

$$x \leqslant y < 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} < 0$$

$$x < 0 < y \Longleftrightarrow \frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \qquad \big(x \leqslant y \Longleftrightarrow x^n \leqslant y^n\big)$

4. $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \big(x \leqslant 1 \text{ et } n \leqslant m \Longrightarrow x^n \geqslant x^m\big)$

$$\big(x \geqslant 1 \text{ et } n \leqslant m \Longrightarrow x^n \leqslant x^m\big)$$

La proposition suivante est un simple corollaire de la proposition 2.12, page 72, démontrée dans le cas général d'un anneau.

Copyrighted material

Proposition 3.3 (Formule du binôme de Newton[8]) *Soient x et y deux réels et n un entier naturel non nul. On a*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k \, y^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque On a aussi par commutativité de la somme

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^{n-k} \, y^k$$

et il peut être plus avantageux selon les situations d'utiliser l'une ou l'autre des deux expressions.

Proposition 3.4 *Soient x et y deux réels et n un entier naturel non nul. On a*

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \\ &= (x-y)\,(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}). \end{aligned}$$

Démonstration La formule peut se démontrer par calcul. On a

$$\begin{aligned} (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k - \sum_{\ell=1}^{n} x^{n-\ell} y^{\ell} \end{aligned}$$

(on a effectué le changement de variable $\ell = k+1$ dans la 2e somme)

$$= x^n - y^n,$$

les termes des deux sommes s'annulant deux à deux à l'exception des termes extrêmes. □

[8] L'Histoire ne nous a pas transmis le nom du collaborateur de Newton qui a établi cette formule. C'est la raison pour laquelle on a coutume d'appeler cette formule « la formule du binome de Newton ».

Copyrighted material

Proposition 3.5 *Pour tout entier naturel n non nul on a*[9]

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2},\\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Démonstration Soient u_0, r deux réels et n un entier naturel non nul. On considère pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n+1$ les réels u_k définis[10] par la relation $u_k = u_{k-1} + r$. Pour tout entier m, on désigne par S_m la quantité

$$S_m = \sum_{k=0}^{n} u_k^m.$$

D'après la formule du binôme de Newton on a pour tout $k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \leqslant n$,

$$(u_k + r)^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i \, r^i \, u_k^{m-i} = u_k^m + \sum_{i=1}^{m} C_m^i \, r^i \, u_k^{m-i}.$$

On en déduit en sommant ces relations pour k variant de 0 à n que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(u_k + r)^m &= \sum_{k=0}^{n}\left(u_k^m + \sum_{i=1}^{m} C_m^i \, r^i \, u_k^{m-i}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k^m + \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} C_m^i \, r^i \, u_k^{m-i}\right)\\ &= S_m + \sum_{i=1}^{m} C_m^i \, r^i \left(\sum_{k=0}^{n} u_k^{m-i}\right)\\ &= S_m + \sum_{i=1}^{m} C_m^i \, r^i \, S_{m-i}.\end{aligned}$$

---

[9] Un professeur de Gauss aurait donné l'exercice suivant à une classe un peu trop indisciplinée : « Messieurs, vous faites trop de bruit. Calculez-moi $1+2+3+\ldots+99+100$. Je ne veux entendre aucun bruit. »
Gauss le résolut immédiatement, en remarquant qu'en notant S cette somme, on a :

$$\begin{aligned}S &= 1+2+3+\ldots+100\\ S &= 100+99+\ldots+1\end{aligned}$$

et donc $2S = 101 + 101 + \ldots + 101 = 100 \times 101 = 10100$. La somme valait donc 5050.

[10] Autrement dit on considère une progression arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

Copyrighted material

Or $u_k + r = u_{k+1}$ de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k + r)^m = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}^m = \sum_{k=1}^{n+1} u_k^m = S_m - u_0^m + u_{n+1}^m.$$

En combinant ces deux relations on obtient que

$$u_{n+1}^m = u_0^m + \sum_{i=1}^{m} C_m^i \, r^i \, S_{m-i}. \tag{3}$$

Prenons $u_0 = 0$ et $r = 1$. On a alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $u_k = k$. La relation (3) s'écrit dans ce cas particulier

$$(n+1)^m = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \, S_{m-i}. \tag{4}$$

Prenons $m = 2$, on obtient

$$(n+1)^2 = 2S_1 + S_0.$$

Compte tenu du fait que $S_0 = (n+1)$ on établit que la somme des n premiers entiers vaut

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En prenant $m = 3$ dans la relation (4) on obtient

$$(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + S_0$$

d'où on déduit que la somme des carrés des n premiers entiers vaut

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En prenant $m = 4$ dans la relation (4) on obtient

$$(n+1)^4 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0$$

d'où on déduit que la somme des cubes des n premiers entiers vaut

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

On peut poursuivre selon le même principe pour obtenir l'expression de la somme des puissances m-ième des n premiers entiers. On obtient ainsi

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

□

Copyrighted material

Exercice 1 *Re-démontrer ces relations en utilisant un raisonnement par récurrence.*

Proposition 3.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz[11]) *Soit n un entier naturel non nul. Pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Démonstration Considérons l'application $T : \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2$. Pour tout réel λ, $T(\lambda) \geqslant 0$ (on a une somme de carrés). Or

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda^2 x_i^2 + 2\lambda x_i y_i + y_i^2\right) = \lambda^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=a} + 2\lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}_{=b} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{=c} \\ &= a\lambda^2 + 2b\lambda + c. \end{aligned}$$

La fonction polynomiale T étant positive sur $\mathbb{R}$, l'équation $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ ne peut avoir qu'une racine double ou deux racines complexes (mais il ne peut y avoir deux racines réelles distinctes, sans quoi T serait négative sur un intervalle de longueur non nulle). On a par conséquent un discriminant négatif pour le trinôme : $\Delta = 4b^2 - 4ac \leqslant 0$. Cela implique que

$$b^2 - ac = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leqslant 0.$$

On a ainsi prouvé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Exercice 2 *En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer l'inégalité de Minkowski[12] : pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

[11] Cauchy, Augustin (1789, Paris - 1857, Sceaux).
Schwarz, Hermann (1843, Hermsdorf (Silésie) - 1921, Berlin).
[12] Minkowski, Hermann (1864, Kaunas (Lituanie) - 1909, Göttingen (Allemagne)).

Copyrighted material

Remarque Si on désigne par x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(x_1, \ldots, x_n)$, par y le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(y_1, \ldots, y_n)$ et par $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz exprime le fait que $x \cdot y \leqslant \|x\| \times \|y\|$ et l'inégalité de Minkowski le fait que $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

3.2.2 La valeur absolue

Définition 3.6 *On appelle* **valeur absolue** *du réel x le réel positif noté $|x|$ défini par*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 3.7 *On a les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \max\{x, -x\}$ *et* $|-x| = |x|$;
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (|x| = 0 \iff x = 0)$;
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x \times y| = |x| \times |y|$;
4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x^n| = |x|^n$;
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|$ (***1re inégalité triangulaire***) ;
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ (***2e inégalité triangulaire***).

Démonstration ⊵ Les deux premières assertions sont des conséquences immédiates de la définition de la valeur absolue.

⊵ La démonstration de la troisième assertion est immédiate par disjonction des cas selon le signe de x et de y.

i) Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors d'une part $x \times y \geqslant 0$ et par conséquent $|x \times y| = x \times y$ et d'autre part $|x| = x, |y| = y$. La relation $|x \times y| = |x| \times |y|$ est donc établie dans ce cas.

ii) Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ alors d'une part $x \times y \leqslant 0$ et par conséquent $|x \times y| = -x \times y$ et d'autre part $|x| = x, |y| = -y$. La relation $|x \times y| = |x| \times |y|$ est donc établie dans ce cas.

iii) Si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors d'une part $x \times y \leqslant 0$ et par conséquent $|x \times y| = -x \times y$ et d'autre part $|x| = -x, |y| = y$. La relation $|x \times y| = |x| \times |y|$ est donc établie dans ce cas.

iv) Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ alors d'une part $x \times y \geqslant 0$ et par conséquent $|x \times y| = x \times y$ et d'autre part $|x| = -x, |y| = -y$. La relation $|x \times y| = |x| \times |y|$ est donc établie dans ce cas.

On a démontré que dans les 4 cas envisageables selon les signes de x et de y, la relation était vraie. Elle est donc toujours vraie.
La quatrième assertion peut se démontrer par récurrence en utilisant le résultat qui vient d'être établi ; elle est laissée en exercice.

Copyrighted material

$\trianglerighteq$ Pour démontrer la première inégalité triangulaire nous procédons à nouveau par disjonction des cas. Remarquons que l'on peut toujours supposer (il suffit de renommer les deux réels) que $x \leqslant y$.

i) Ou bien $0 \leqslant x \leqslant y$ et dans ce cas $|x+y| = x+y = |x|+|y|$. La relation est vraie.

ii) Ou bien $x \leqslant y \leqslant 0$ et dans ce cas $|x+y| = -(x+y) = -x+(-y) = |x|+|y|$. La relation est vraie.

iii) Ou bien $x \leqslant 0 \leqslant y$ avec $-x \geqslant y$ et

$$|x+y| = -(x+y) = (-x) - y = |x| - |y| \leqslant |x| + |y|.$$

La relation est vraie dans ce cas.

iv) Ou bien $x \leqslant 0 \leqslant y$ avec $-x \leqslant y$ et

$$|x+y| = x+y = -(-x)+y = -|x| + |y| \leqslant |x| + |y|.$$

La relation est vraie dans ce cas aussi.

Nous avons montré que dans les 4 cas envisageables, compte tenu de la commutativité de la somme, la relation était vraie. Elle est donc toujours vraie.

$\trianglerighteq$ Considérons deux réels quelconques que l'on désigne par x et y. On peut toujours supposer (quitte à inverser la lettre les désignant) que $|x| \geqslant |y|$. On a alors,

$$\big||x| - |y|\big| = |x| - |y| = |x - y + y| - |y|.$$

En utilisant la première inégalité triangulaire on obtient

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y| + |y| - |y| = |x-y|.$$

La seconde inégalité triangulaire est démontrée. □

Exercice 3 *Montrer, en utilisant une disjonction de cas, que pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\max\{x,y\} = \frac{1}{2}\big(x+y+|x-y|\big) \quad \textit{et} \quad \min\{x,y\} = \frac{1}{2}\big(x+y-|x-y|\big).$$

Définition 3.7 *On appelle* **distance usuelle** *sur* $\mathbb{R}$ *l'application*

$$\begin{array}{rccc} d & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & |x-y| \end{array}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$ *le réel* $d(x,y)$ *est appelé distance de* x *à* y.

Copyrighted material

Proposition 3.8 *La distance usuelle sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes :*

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big(d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y\big)$,
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad d(x,y) = d(y,x)$,
3. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Démonstration Les deux premières assertions résultent de manière immédiate des propriétés de la valeur absolue. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on obtient en utilisant la première inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x-z| = |x+(-y+y)-z| = |(x-y)+(y-z)| \\ &\leqslant |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

□

Remarque Plus généralement, on appelle ***distance*** sur un ensemble E toute application d vérifiant les 3 assertions de la proposition 3.8. L'ensemble E muni de cette application est alors qualifié d'espace métrique. Par exemple sur $\mathbb{C}$ l'application qui aux complexes z_1 et z_2 associe le module de $z_1 - z_2$ définit une distance.

3.2.3 Partie entière et racine n-ième

Proposition 3.9 (Partie entière) *Pour tout réel x, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \leqslant x < \alpha + 1$. L'entier relatif α est appelé* **partie entière** *de x et est noté $E(x)$ ou $[x]$.*

Démonstration $\trianglerighteq$ Soit x un réel positif et $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$. L'ensemble A est non vide ($0 \in A$) et il est majoré car d'après la propriété d'Archimède, il existe un entier N tel que $N > x$. L'ensemble A est donc un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, non vide et majoré ; il admet un unique élément maximal $\alpha \in \mathbb{Z}$. Cet élément maximal vérifie d'une part $\alpha \in A$ donc $\alpha \leqslant x$ et d'autre part $\alpha + 1 \notin A$ donc $\alpha + 1 > x$.

$\trianglerighteq$ Soit x un réel strictement négatif et $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > x\}$. L'ensemble B est non vide ($0 \in A$) et il est minoré car d'après la propriété d'Archimède, il existe un entier N tel que $N > -x$, autrement dit tel que $x > -N$. L'ensemble B est donc un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, non vide et minoré ; il admet un unique élément minimal $\beta \in \mathbb{Z}$. Cet élément minimal vérifie d'une part $\beta \in B$ donc $\beta > x$ et d'autre part $\beta - 1 \notin A$ donc $\beta - 1 \leqslant x$. Ainsi l'entier relatif $\alpha = \beta - 1$ vérifie $\alpha \leqslant x < \alpha + 1$. □

Exemple On a $E(\pi) = 3$, $E(-\pi) = -4$, $E(3) = 3$, $E(-4) = -4$.

Copyrighted material

On appelle fonction partie entière l'application $E : x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x)$. On vérifie aisément les propriétés suivantes concernant la fonction partie entière.

Proposition 3.10 *Soit x un nombre réel. On a*

1. $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$ *et* $x - 1 < E(x) \leqslant x$.
2. $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$.
3. $\forall n \in \mathbb{Z} \quad E(x+n) = E(x) + n$.

Proposition 3.11 (Racine n-ième d'un réel positif) *Soient a un réel positif et n un entier naturel non nul. Il existe un unique réel positif b tel que $b^n = a$. Ce réel est noté $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$ et est appelé* **racine n-ième**[13] *de a.*

Démonstration Nous verrons par la suite que ce résultat découle de manière évidente du fait que l'application $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Nous allons cependant en donner une démonstration directe qui utilise la notion de borne supérieure d'un ensemble. Remarquons que le résultat est évident pour $a = 0$, $a = 1$ et pour $n = 1$.

$\trianglerighteq$ Montrons tout d'abord que si le réel b existe, il est nécessairement unique. Pour cela supposons qu'il existe deux réels positifs b_1 et b_2 tels que $b_1^n = a$ et $b_2^n = a$. On a alors $b_1^n = b_2^n$ et, d'après la proposition 3.4,

$$b_1^n - b_2^n = (b_1 - b_2) \sum_{k=0}^{n-1} b_1^{n-1-k} b_2^k = 0.$$

Le produit est nul si et seulement si $b_1 - b_2 = 0$ ou si pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ on a $b_1^{n-1-k} b_2^k = 0$ (en effet puisque $b_1 \geqslant 0$ et $b_2 \geqslant 0$ on a une somme de termes positifs). Dans le premier cas cela implique que $b_1 = b_2$. Dans le deuxième cas cela implique que $b_1 = b_2 = 0$ (il suffit de considérer les valeurs $k = 0$ et $k = n - 1$). On en déduit que s'il existe, le réel b vérifiant $b^n = a$ est unique.

$\trianglerighteq$ Pour $a \in [1, +\infty[$, considérons l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid x^n \leqslant a\}$. L'ensemble E est non vide (par exemple $1 \in E$) et il est majoré par a (si $x \geqslant 1$ alors $x \leqslant x^n \leqslant a$ et si $0 < x < 1$ alors $x \leqslant a$ car $a \geqslant 1$). Il admet donc une borne supérieure[14] $b \in \mathbb{R}_+^*$, autrement dit,

$$\forall x \in E \quad x \leqslant b, \tag{5}$$

$$\text{et} \qquad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x_\epsilon \in E \quad b - \epsilon < x_\epsilon. \tag{6}$$

Trois cas sont alors envisageables : ou bien $b^n < a$, ou bien $b^n > a$, ou bien enfin $b^n = a$. Nous allons montrer que les deux premiers cas ne peuvent exister.

[13] On parle de racine carrée lorsque $n = 2$ et de racine cubique lorsque $n = 3$.

[14] Voir la proposition 3.2.

Copyrighted material

Le seul cas possible sera alors le cas où $b^n = a$. Nous aurons ainsi démontré l'existence d'une racine n-ième de a. Pour montrer que les deux premiers cas ne peuvent avoir lieu, raisonnons par l'absurde.

- Supposons que $b^n < a$ et considérons un réel $\alpha \in]0,1[$. Nous avons alors d'après la formule du binôme

$$\begin{aligned}(b+\alpha)^n - b^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, b^k \alpha^{n-k} - b^n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\, b^k \alpha^{n-k} \\ &\leqslant \alpha \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\, b^k \quad (\text{car } \alpha \in]0,1[\Longrightarrow \forall i \in \mathbb{N}^*\ \alpha^i \leqslant \alpha) \\ &< \alpha \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, b^k = \alpha\,(1+b)^n.\end{aligned}$$

On en déduit que si l'on choisit $\alpha \in]0,1[$ tel que $\alpha < \dfrac{a-b^n}{(1+b)^n}$ alors

$$(b+\alpha)^n - b^n < a - b^n$$

et par conséquent $(b+\alpha)^n < a$. C'est impossible car on aurait alors $b+\alpha$ qui serait un élément de E et qui serait strictement plus grand que la borne supérieure de cet ensemble. C'est en contradiction avec la condition (5). Le cas où $b^n < a$ est donc impossible.

- Supposons que $b^n > a$. On a alors d'après la proposition 3.4 : pour tout élément x de E

$$b^n - a \leqslant b^n - x^n = (b-x) \sum_{k=0}^{n-1} b^k x^{n-1-k}.$$

On a $0 < x^n \leqslant a < b^n$ donc $(x/b)^n < 1$ et par conséquent $0 < x/b < 1$. Cela implique que l'on a aussi $0 < x < b$ et donc $0 < x^k < b^k$ pour tout entier k non nul. On obtient en utilisant ces résultats

$$b^n - a \leqslant (b-x) \sum_{k=0}^{n-1} b^k b^{n-1-k} = (b-x) \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1} \leqslant (b-x)\, n\, b^{n-1}.$$

Autrement dit, pour tout $x \in A$ on a : $b - x \geqslant \dfrac{b^n - a}{n\, b^{n-1}}$. Prenons $\varepsilon = \dfrac{b^n - a}{n\, b^{n-1}}$. On peut affirmer d'après ce qui précède que

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad b - x \geqslant \varepsilon.$$

On obtient dans ce cas une contradiction avec la condition (6). Le cas où $b^n > a$ est donc également impossible. Le seul cas possible est le cas où $b^n = a$ et nous en déduisons l'existence d'une racine n-ième de a.

Copyrighted material

$\trianglerighteq$ Pour terminer la démonstration, il faut considérer le cas où $a \in]0,1[$. Posons $\alpha = 1/a$; on a $\alpha \in]1,+\infty[$. D'après ce qui précède on peut en déduire qu'il existe un unique réel $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\beta^n = \alpha$. Or

$$\beta^n = \alpha \iff \beta^n = \frac{1}{a} \iff \frac{1}{\beta^n} = a \iff \left(\frac{1}{\beta}\right)^n = a.$$

On en déduit donc qu'il existe un unique réel $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b^n = a$. □

Exercice 4 *En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier n non nul $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{2/n}$.*

Exercice 5 *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que* $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

3.2.4 Propriétés fondamentales

La proposition suivante sera utilisée à de nombreuses reprises dans la suite du cours. Elle indique que pour montrer qu'un réel est nul, il suffit de montrer qu'on peut le rendre, en valeur absolue, plus petit que n'importe quel réel strictement positif fixé.

Proposition 3.12 *Soit x un réel.*

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad |x| \leqslant \varepsilon\right) \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Démonstration Raisonnons par l'absurde[15]. Supposons l'assertion fausse, c'est-à-dire supposons que[16]

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad |x| \leqslant \varepsilon\right) \text{ et } x \neq 0.$$

Puisque x est non nul, le réel $\eta = |x|/2$ est strictement positif et vérifie $|x| > \eta$. Cela contredit l'hypothèse : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad |x| \leqslant \varepsilon$. On en déduit que l'assertion énoncée dans la proposition est vraie. □

Définition 3.8 *On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est* ***dense*** *dans $\mathbb{R}$ si*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left(x < y \implies \exists a \in A \quad x < a < y\right).$$

---

[15] Cette proposition peut également être démontrée en utilisant un raisonnement par contraposée, voir l'exemple donné à la section 1.4.2, p. 17.

[16] Voir le chapitre 1 pour les règles de négation d'une assertion définie à l'aide de quantificateurs.

Copyrighted material

Remarques

1. A est dense dans $\mathbb{R}$ signifie qu'entre 2 réels distincts il y a toujours (au moins) un élément de A.

2. La négation de cette assertion est

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x < y) \quad \text{et} \quad \big(\forall a \in A \quad (x \geqslant a \text{ ou } y \leqslant a)\big).$$

Exemple $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$: si l'on prend $x = \pi$ et $y = 7/2$ alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$ ou bien $m \leqslant x$ ou bien $m \geqslant \pi$.

Proposition 3.13 $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On applique la propriété d'Archimède en prenant $\varepsilon = y - x$ (on a bien $\varepsilon > 0$) :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_\alpha \in \mathbb{N}^* \qquad n_\alpha (y - x) > \alpha.$$

Si l'on choisit de prendre $\alpha = 1$, on obtient l'existence d'un entier $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_1(y-x) > 1$. On a alors $y - x > \dfrac{1}{n_1}$ c'est-à-dire $y > \dfrac{n_1 x + 1}{n_1}$.

Posons $a = \dfrac{E(n_1 x) + 1}{n_1}$; il est clair que $a \in \mathbb{Q}$. En utilisant les propriétés de la partie entière, voir la proposition 3.10, on obtient

$$a > \frac{(n_1 x - 1) + 1}{n_1} = x \quad \text{et} \quad a \leqslant \frac{n_1 x + 1}{n_1} = x + \frac{1}{n_1} < y.$$

On a ainsi montré que pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, il existe un rationnel a vérifiant $x < a < y$ ce qui permet de conclure que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

Remarque On peut montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels est lui aussi dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.14 *Soient* $(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y$, *et* A *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$. *Si* A *est dense dans* $\mathbb{R}$ *alors il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* A, *strictement monotone*[17], *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x < a_n < y.$$

[17] Voir la définition 5.5, p. 181.

Copyrighted material

Démonstration On raisonne par récurrence. D'après la définition de la densité, il existe $a_0 \in A$ tel que $x < a_0 < y$. Supposons que pour un entier k fixé, il existe $a_k \in A$ tel que $x < a_k < y$. Comme A est dense dans $\mathbb{R}$ et que y et a_k sont deux réels, il existe $a_{k+1} \in A$ tel que $a_k < a_{k+1} < y$. On a ainsi prouvé l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x < a_n < y$. Sur le même principe, il est aisé de construire une suite strictement décroissante en privilégiant cette fois-ci x et a_k. □

Proposition 3.15 *Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.*

Démonstration Supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$: pour tout réels x, y avec $x < y$, il existe un élément a de A tel que $x < a < y$. Par conséquent, pour tout entier n non nul, on peut trouver un élément a_n de A vérifiant $x < a_n < x + 1/n$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers x (d'après le théorème d'encadrement, p. 179). □

3.3 Topologie de la droite réelle

3.3.1 Intervalles

Définition 3.9 *On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que*

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad (\alpha \in I \quad et \quad \beta \in I \quad et \quad \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta) \Longrightarrow \gamma \in I.$$

Autrement dit, un intervalle est un ensemble où tout réel compris entre deux réels de l'ensemble appartient à l'ensemble.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On définit les intervalles d'extrémités a et b suivants,

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \ \text{ et } \ x \leqslant b\}, \text{ appelé intervalle fermé } [a,b], \\ ]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \ \text{ et } \ x < b\}, \text{ appelé intervalle ouvert }]a,b[, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \ \text{ et } \ x < b\}, \\ ]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \ \text{ et } \ x \leqslant b\}. \end{aligned}$$

On appelle ***centre*** de chacun de ces intervalles le réel $x = \dfrac{a+b}{2}$.

On définit aussi les intervalles non bornés suivants,

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}, \quad]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

$$]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \quad]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}.$$

Copyrighted material

3.3.2 Ensemble ouvert et ensemble fermé

Définition 3.10 *On dit que le sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un* **voisinage** *du réel x_0 si $\mathcal{V}$ contient un intervalle ouvert de centre*[18] *x_0. Autrement dit, $\mathcal{V}$ est un voisinage de x_0 si*

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left(x_0 = \frac{a+b}{2} \quad et \quad]a,b[\subset \mathcal{V}\right).$$

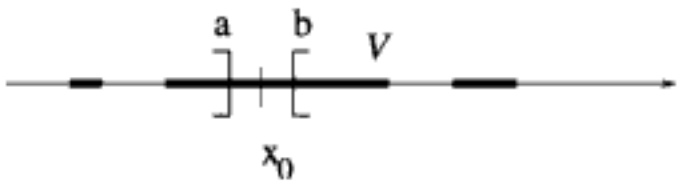


Fig. 2 Illustration de la situation décrite à la définition 3.10.

Exemples

1. $]-1,1]$ et $[-1,1/2]$ sont des voisinages de 0.
2. $]0,1]$, $[0,1]$ et $[2,3]$ ne sont pas des voisinages de 0.
3. $\{1\} \cup]2,3[$ n'est pas un voisinage de 1 mais c'est un voisinage de 5/2.

Définition 3.11 ✗ *Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ non vide de $\mathbb{R}$ est qualifié d'***ensemble ouvert** *si pour tout élément x de $\mathcal{O}$ il existe un intervalle ouvert de centre x contenu dans $\mathcal{O}$. Autrement dit, un ensemble est ouvert s'il est voisinage de chacun de ses points.*

✗ *Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ est appelée* **ensemble fermé** *si son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.*

Exemples

1. Tout intervalle ouvert $I =]a,b[$ $(a < b)$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, soit $x \in I$ et $d = \min\{(x-a)/2, (b-x)/2\}$. L'intervalle ouvert $]x-d, x+d[$ est inclus dans I et de centre x.
2. $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert, ni fermé dans $\mathbb{R}$.
3. Pour tout réel a, l'intervalle $]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Son complémentaire $]-\infty, a]$ est donc un fermé de $\mathbb{R}$.

[18] On peut également définir un voisinage de x_0 de la manière suivante : le sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un voisinage du réel x_0 si $\mathcal{V}$ contient un intervalle ouvert *contenant* x_0.

Copyrighted material

Remarques

1. On convient que les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont à la fois des ensembles ouverts et des ensembles fermés de $\mathbb{R}$. Ce sont les seuls à posséder cette propriété.

2. Un ensemble peut n'être ni ouvert ni fermé (c'est le cas par exemple de l'intervalle $]-3,3]$). Contrairement à son sens dans le langage courant, fermé n'est pas le contraire d'ouvert.

3. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est fermé et borné est qualifié d'ensemble compact.

Proposition 3.16 (Union et intersection d'ouverts ou de fermés)
✗ *L'union d'un nombre quelconque*[19] *d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. L'intersection d'un nombre* ***fini*** *d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

✗ *L'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles fermés est un ensemble fermé. L'union d'un nombre* ***fini*** *d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

Démonstration Ce résultat est admis. La seconde partie de la proposition concernant les ensembles fermés s'obtient à partir de la première partie de la proposition en utilisant les lois de Morgan, voir la proposition 2.3, page 30. □

Exemples

1. Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'intervalle fermé $[a,b]$ est un ensemble ouvert puisqu'il est la réunion des intervalles ouverts $]-\infty,a[$ et $]b,+\infty[$. On en déduit qu'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

2. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ car leur complémentaire dans $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts.

3.3.3 Intérieur et adhérence d'un ensemble

Définition 3.12 *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel. On dit que x_0 est un* ***point intérieur*** *à A si A est un voisinage de x_0. L'ensemble des points intérieurs à A est noté $\mathring{A}$ et est appelé* ***intérieur*** *de A.*

Exemples

1. 0 est intérieur à $]-1,1]$ mais n'est pas intérieur à $]0,1]$ ni à $[0,1]$.

2. L'intérieur de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble vide.

[19] Fini, dénombrable ou infini non dénombrable.

Copyrighted material

Remarques

1. L'intérieur d'un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. On a donc $\overset{\circ}{A} \subset A$.

2. L'intérieur d'un intervalle d'extrémités a et b est l'ouvert $]a, b[$.

Définition 3.13 *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel.*

✗ *On dit que x_0 est un* ***point adhérent*** *à A si tout intervalle ouvert de centre x_0 contient au moins un élément de A. L'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$ et est appelé* **adhérence** *de A.*

✗ *On dit que x_0 est un* ***point d'accumulation*** *de A si tout intervalle ouvert de centre x_0 contient au moins un élément de A autre que x_0.*

De manière équivalente, x_0 est un point adhérent à A si tout voisinage de x_0 contient au moins un élément de A et x_0 est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x_0 contient au moins un élément de A autre que x_0.

Exemples

1. Soit $A =]1, 2] \cup \{3\}$. Le réel 1 est un point d'accumulation de A et un point adhérent de A. Le réel 1 n'appartient pas à A. Le réel 2 est un point d'accumulation de A et un point adhérent de A. Le réel 2 appartient à A. Le réel 3 est un point adhérent mais pas un point d'accumulation. Le réel 3 appartient à A. Le réel 0 est un point d'accumulation de A et un point adhérent de A. Il appartient à A.

2. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, tout réel est un point d'accumulation de $\mathbb{Q}$.

Remarques

1. Un point d'accumulation de A est un point adhérent de A mais la réciproque est fausse.

2. Un point adhérent à l'ensemble A qui n'est pas un point d'accumulation est appelé un ***point isolé***.

3. L'adhérence de A est le plus petit ensemble fermé contenant A. On a donc $A \subset \overline{A}$.

4. Si A est un ensemble borné dans $\mathbb{R}$, $M = \sup_{\mathbb{R}}(A)$ et $m = \inf_{\mathbb{R}}(A)$ sont deux points d'adhérence de A.

3.3.4 La droite numérique achevée

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'a ni plus grand, ni plus petit élément. On lui adjoint 2 éléments notés $+\infty$ et $-\infty$ de façon à construire l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$. On a donc $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre total définie sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Copyrighted material

On prolonge partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ la structure algébrique de $\mathbb{R}$ en posant

$$\begin{aligned} x+(+\infty) &= +\infty \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \neq -\infty, \\ x+(-\infty) &= -\infty \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \neq +\infty, \\ x\times(+\infty) &= +\infty \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ x > 0, \\ x\times(-\infty) &= -\infty \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ x > 0, \end{aligned}$$

mais il n'est pas possible de définir

$$(+\infty)+(-\infty), \qquad 0\times(+\infty), \qquad 0\times(-\infty),$$

de manière à ce que $\overline{\mathbb{R}}$ devienne un anneau[20].

Définition 3.14 *On appelle* **voisinage de** $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) tout sous-ensemble de* $\overline{\mathbb{R}}$ *contenant un intervalle de* $\overline{\mathbb{R}}$ *de la forme* $]a,+\infty]$ *(resp.* $[-\infty,a[$*) où*

$$]a,+\infty] =]a,+\infty[\cup \{+\infty\} \qquad \textit{(resp.}\ [-\infty,a[=]-\infty,a[\cup \{-\infty\}\textit{).}$$

Si A est un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$, on dit que $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à A dans $\overline{\mathbb{R}}$ si tout voisinage de x_0 contient au moins un point de A.

3.4 Quelques notions sur la représentation des réels en machine

3.4.1 Quelques calculs déroutants

On cherche à calculer $P = 9x^4 - y^4 + 2y^2$ pour $x = 10864$ et $y = 18817$. On dispose de plusieurs façons pour effectuer ce calcul à l'aide d'une calculatrice.

1. On peut calculer $9\times(10864)^4 - (18817)^4 + 2\times(18817)^2$.
2. Une autre façon de procéder est de ranger les valeurs 10864 et 18817 dans 2 registres X et Y et de calculer : $9X^4 - Y^4 + 2Y^2$.
3. On peut également ranger les valeurs $9\times(10864)^4$, $(18817)^4$ et $2\times(18817)^2$ dans 3 registres A, B et C et calculer $A-B+C$ (ou $A+C-B$, $C-B+A$, $-B+C+A$).

On pourra comparer les résultats fournis par différentes calculatrices[21]. À titre d'exemple la Casio FX 4000 indique 1158978 alors que la Casio FX 8500 indique 58978 pour le premier calcul. Pour le deuxième calcul on obtient respectivement 1158978 et 58978 alors que pour le troisième calcul on obtient selon l'ordre

[20] On retrouve là les difficultés intervenant dans le calcul des limites.

[21] On effectuera ces calculs en arithmétique numérique et non pas en arithmétique formelle si cette dernière existe sur la calculatrice. En arithmétique formelle on a une représentation exacte des entiers quelle que soit leur taille ce qui permet d'obtenir le résultat « exact ». Toutefois cela se traduit par un temps de calcul beaucoup plus long ce qui peut être rédhibitoire pour l'exécution d'algorithmes de taille importante.

Copyrighted material

d'appel des registres 8158978, 8000000, 9000000 et 9000000 pour la FX 4000 et 58978, 1000000, 1000000 et 1000000 pour la FX 8500.

On peut vérifier par ailleurs que $P = (3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2) + 2y^2$ et calculer P en utilisant cette relation. On obtient en utilisant cette relation 1 pour résultat en utilisant la FX 4000 ou la FX 8500. Ce dernier résultat est la « vraie » valeur de P.

Quelques notions sur la représentation des réels en machine et sur la manière dont sont effectuées les opérations arithmétiques en machine sont indispensables pour comprendre pourquoi l'on obtient ces résultats surprenants et décider de la « bonne » valeur.

3.4.2 Représentation des nombres réels en machine

La méthode de représentation des nombres réels qui est détaillée dans ce qui suit est valable aussi bien pour les calculatrices que pour les ordinateurs dans la mesure où on a recours au calcul numérique et non pas au calcul formel.

Un réel est représenté en machine sous deux formes.

En écriture à virgule fixe : dans ce cas le réel est représenté sur 10 caractères dont la virgule et avec éventuellement le signe − en plus. Sous cette forme, le plus grand réel représentable est 9999999999 et le plus petit réel représentable est 0.00000001.

En écriture à virgule flottante : dans ce cas le réel est représenté sous la forme

$$x = \pm m\ \beta^n \qquad \text{où} \quad \begin{cases} m & \text{est la mantisse,} \\ \beta & \text{est la base,} \\ n & \text{est l'exposant.} \end{cases}$$

La base par défaut est la base 10 et β est alors noté E. La convention consistant à avoir le premier chiffre à gauche de la virgule non nul est souvent adoptée dans l'écriture à virgule flottante sur calculatrice.

À titre d'exemple, sur la FX 8500, les résultats de calculs supérieurs à 10^{10} ou inférieurs à 10^{-2} sont affichés en virgule flottante. Pour l'affichage en virgule flottante, la mantisse est composée de 10 chiffres plus la virgule. L'exposant est composé de 2 chiffres plus un éventuel signe. Le plus grand nombre représentable en machine est $M = 9.999999999\ 10^{99}$. Le plus petit nombre représentable est $m = 1.000000000\ 10^{-99}$.

3.4.3 Opérations sur les nombres réels

Pour les réels en écriture à virgule fixe (de même que pour les entiers), les opérations sont effectuées de « manière naturelle ». Le résultat est éventuellement tronqué s'il a plus de 10 chiffres. De même il peut être éventuellement affiché en écriture à virgule flottante.

Pour une opération portant entre un nombre en écriture à virgule fixe et un nombre en écriture à virgule flottante, le nombre en écriture à virgule fixe est

Copyrighted material

tout d'abord écrit en écriture à virgule flottante. L'opération est alors effectuée en considérant deux nombres en écriture à virgule flottante.

Intéressons-nous aux opérations portant sur les nombres en écriture à virgule flottante. Compte tenu de la représentation des nombres à virgule flottante, les calculs sur les réels s'accompagnent de décalages et entraînent d'inévitables troncatures qui altèrent la précision du résultat. Une grande part des résultats aberrants obtenus en effectuant des calculs à l'aide d'une calculatrice s'expliquent par ces troncatures. Une bonne compréhension des règles calculatoires sur les nombres à virgule flottante est indispensable pour juger de la fiabilité d'un résultat rendu par une calculatrice.

Cas de la multiplication (ou de la division)

La multiplication ou la division s'effectuent en 3 étapes :

- on ajoute (ou on retranche) les exposants ;
- on multiplie (ou on divise) les mantisses ;
- on normalise, si nécessaire, la mantisse du résultat obtenu, en ajustant l'exposant. La normalisation consiste à décaler les chiffres de la mantisse vers la droite (ou vers la gauche) pour avoir un seul chiffre non nul à gauche de la virgule. Pour l'affichage on tronque la mantisse aux 10 premiers chiffres (arrondi par valeur inférieure).

Exemple Regardons comment est calculé $R = 1.999\ 10^{13} \times 8.765432\ 10^{17}$. On ajoute les exposants : $13 + 17 = 30$. On multiplie les mantisses : $1.999 \times 8.765432 = 17.522098568$. Le résultat vaut donc : $R = 17.522098568\ 10^{30}$. On normalise : $R = 1.75222098572\ 10^{31}$. On tronque la partie décimale de sorte d'avoir une mantisse composée de 10 chiffres : $R = 1.752209857\ 10^{31}$. C'est le résultat qui sera affiché ; le vérifier sur une calculatrice (ayant les caractéristiques utilisées ici).

Cas de l'addition (ou de la soustraction)

L'addition ou la soustraction s'effectuent en 2 étapes :

- si les exposants sont égaux, on ajoute (ou on retranche) directement les mantisses et on normalise, si nécessaire, en ajustant l'exposant ;
- si les exposants ne sont pas égaux, on décale vers la droite les chiffres de la mantisse du nombre le plus petit (en valeur absolue) et on ajuste en même temps son exposant jusqu'à le rendre égal à celui du nombre le plus grand. On ajoute (ou on retranche) alors les mantisses et on normalise, si nécessaire, en ajustant l'exposant. Dans tous les cas, pour l'affichage on tronque la mantisse aux 10 premiers chiffres (arrondi par valeur inférieure).

Exemples

1. Regardons comment est calculé $R = 1.999\ 10^{15} - 1.980\ 10^{15}$. Les exposants sont égaux ; on retranche les mantisses : $1.999 - 1.980 = 0.019$. Le résultat vaut $R = 0.019\ 10^{15}$. Après normalisation, la valeur affichée est $R = 1.9\ 10^{13}$.

Copyrighted material

2. Regardons comment est calculé $R = 1.999\ 10^{15} + 1.979\ 10^{11}$. On décale vers la droite les chiffres de la mantisse du nombre le plus petit : $1.97910^{11} = 0.000197910^{15}$. On ajoute les mantisses : $1.999 + 0.0001979 = 1.9991979$. La valeur affichée est $R = 1.9991979\ 10^{15}$.

Remarque Les calculs internes sont en général effectués avec une mantisse plus longue que celle utilisée pour l'affichage du résultat. Par exemple sur la FX 8500, les calculs internes sont effectués avec une mantisse de 13 chiffres dont seuls les 10 premiers seront affichés. Il est possible d'obtenir les 3 chiffres supplémentaires non affichés de la mantisse en retranchant la valeur numérique affichée à l'expression calculée. Ainsi, si l'on demande à la calculatrice de calculer 1999^4, le résultat affiché est $1.596802399\ 10^{13}$. Si l'on effectue $1999^4 - 1.596802399\ 10^{13}$, on obtient 1980. Les 3 chiffres non affichés de la mantisse sont 198 et 1999^4 vaut approximativement $1.596802399198\ 10^{13}$, approximation plus précise que $1.596802399\ 10^{13}$.

Exercice 6 *À partir de ces indications sur le codage des nombres en machine et sur la façon dont sont effectuées les opérations arithmétiques, expliquer les résultats obtenus dans la première partie.*

3.5 Exercices de synthèse

Exercice 7 *Soient* $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $a \leqslant b$ *et*

$$A = \left\{ \frac{1}{ma} + \frac{1}{nb} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1 - Montrer que A possède un plus grand élément et que A est minoré.

2 - Montrer, en utilisant la propriété d'Archimède, que A admet 0 *pour borne inférieure.*

3 - Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ *les réels* $\dfrac{1}{ka}$ *et* $\dfrac{1}{kb}$ *sont des points d'accumulation de A.*

Exercice 8 *On appelle nombre dyadique tout nombre rationnel de la forme* $\dfrac{m}{2^n}$ *où* $m \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer en utilisant la propriété d'Archimède que l'ensemble des nombres dyadiques*

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}\ , n \in \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$. *On pourra également montrer que l'ensemble des nombres décimaux est dense dans* $\mathbb{R}$.

Copyrighted material

Exercice 9 *Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et*

i) $\forall x \neq 0 \quad f(x) \neq 0$ *et* $f(1/x) = 1/f(x)$,

ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1 - Montrer que $f(0) = 0$ puis que f est impaire.

2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = n$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = x$.

3 - Vérifier que pour tout réel x, $f(x^2) = f(x)^2$ (on pourra calculer $f(1/x(1-x))$ de deux manières différentes). En déduire que f est croissante.

4 - En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, prouver finalement que l'application f est l'application identité.

3.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

Vérifions par récurrence que l'on a bien

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour $n = 1$ la relation est vraie : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1 = 1^2$.
Supposons maintenant que la relation soit vraie pour un entier n donné, autrement dit supposons que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et montrons que la relation est vraie pour l'entier suivant, autrement dit montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Les autres raisonnements par récurrence sont à rédiger sur le même modèle comme cela a été fait en page 20.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 2

Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer l'inégalité de Minkowski revient à démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)^2.$$

On a

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i.$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 &\leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)^2.\end{aligned}$$

L'inégalité de Minkowski est démontrée.

Solution de l'exercice 3

Soient x et y deux réels. Deux cas sont possibles : ou bien $x \leqslant y$ ou bien $x > y$.
Si $x \leqslant y$ alors d'une part $\max\{x, y\} = y$ et d'autre part $|x - y| = y - x$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = y$.
Si $x > y$ alors d'une part $\max\{x, y\} = x$ et d'autre part $|x - y| = x - y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = x$.
Dans les deux cas on a

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

Cette égalité est donc vraie pour tous réels x, y. On procède selon le même principe pour établir la seconde relation.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 4

En utilisant la formule du binôme (voir la proposition 3.3, p. 98) on obtient pour tout entier n non nul,

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k \\ &= 1+\underbrace{n\sqrt{\frac{2}{n}}}_{>0}+\frac{n!}{2\,(n-2)!}\frac{2}{n}+\sum_{k=3}^{n}\underbrace{C_n^k\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k}_{>0} \\ &> 1+\frac{n!}{2\,(n-2)!}\frac{2}{n}=n.\end{aligned}$$

On en déduit que $\sqrt[n]{n} < 1+\sqrt{\frac{2}{n}}$.

Solution de l'exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Le réel $1/a$ est strictement positif, donc d'après la proposition 3.11, il existe un unique $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\beta^n = 1/a$ et par définition $\beta = \sqrt[n]{1/a}$. On a $(1/\beta)^n = a$ et par conséquent $1/\beta$ est la racine n-ième de a (celle-ci est unique). Finalement on a

$$\beta = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\beta} = \sqrt[n]{a}$$

donc $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

Solution de l'exercice 6

Nous présentons ici le détails des opérations effectuées dans le cas de la Casio FX 8500.

1 - Pour calculer $9 \times (10864)^4 - (18817)^4 + 2 \times (18817)^2$, les résultats sont les suivants (on a indiqué entre crochets les chiffres de la mantisse non affichés mais utilisés lors des calculs) :
$(10864)^4 = 1,393025376[-202]\ 10^{16}$
$(18817)^4 = 1,253722845[299]\ 10^{17}$
$(18817)^2 = 354079489$
$9 \times (10864)^4 = 1,253722838[218]\ 10^{17}$
$2 \times (18817)^2 = 708158978$
On a alors :
$9\times(10864)^4-(18817)^4 = -0,000000007[081]\ 10^{17} = -7,081\ 10^{18} = -708100000$
et
$9 \times (10864)^4 - (18817)^4 + 2 \times (18817)^2 = -708100000 + 708158978 = 58978.$

2 - Si l'on range les valeurs 10864 et 18817 dans 2 registres X et Y que l'on calcule $9X^4 - Y^4 + 2Y^2$, on effectue les mêmes opérations sur les réels que pour la question 1. On obtient donc là aussi 58978.

Copyrighted material

3 - Si on range les valeurs $9 \times (10864)^4$, $(18817)^4$ et $2 \times (18817)^2$ dans 3 registres A, B et C et que l'on calcule $A-B+C$ on effectue là encore les mêmes opérations sur les réels que pour la question 1. Par contre, si l'on calcule $A + C - B$ on obtient :

$$\begin{aligned}
A &= 1,253722838[218]\ 10^{17}\\
B &= 1,253722845[299]\ 10^{17}\\
C &= 708158978\\
A + C &= 1,253722838[218]\ 10^{17} + 708158978\\
&= 1,253722838[218]\ 10^{17} + 0,000000007[081]\ 10^{17}\\
&= 1,253722845[300]\ 10^{17}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A + C - B &= 1,253722845[300]\ 10^{17} - 1,253722845[299]\ 10^{17}\\
&= 0,000000000[001]\ 10^{17} = 1\ 10^5 = 100000.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7

1 - Notons $a_{mn} = \dfrac{1}{ma} + \dfrac{1}{nb}$ un élément de A. Il est clair que

$$0 < a_{mn} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

L'ensemble A est donc minoré par 0 et admet pour plus grand élément a_{11}.

2 - Tout élément de A est strictement positif. Pour montrer que 0 est borne inférieure de A montrons[22] que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in A \quad \alpha - \varepsilon < 0.$$

D'après la propriété d'Archimède[23]

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad n\varepsilon > x.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et $x = 1/a + 1/b$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier n non nul tel que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < n\ \varepsilon,$$

autrement dit tel que

$$\frac{1}{na} + \frac{1}{nb} - \varepsilon < 0.$$

Comme $a_{nn} = \dfrac{1}{na} + \dfrac{1}{nb}$ est élément de A, on en conclut que 0 est bien la borne inférieure de A.

3 - Soient c et d deux réels tels que $a_k = 1/(ka)$ appartienne à l'intervalle $]c, d[$. On veut montrer que cet intervalle contient un point de A. Soit ε le réel positif défini par

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{ka} - c, d - \frac{1}{ka}\right\}.$$

---

[22] Voir la proposition 3.2, p. 95.

[23] Voir le théorème 3.1, p. 96.

Copyrighted material

D'après la propriété d'Archimède (on prend $x = 1/b$) il existe un entier n non nul tel que $1/b < n\varepsilon$. On a donc

$$0 < \frac{1}{nb} < \min\left\{\frac{1}{ka} - c, d - \frac{1}{ka}\right\}$$

d'où on déduit que

$$0 < \frac{1}{ka} + \frac{1}{nb} < \frac{1}{ka} + \min\left\{\frac{1}{ka} - c, d - \frac{1}{ka}\right\} < d$$

et que

$$\frac{1}{ka} + \frac{1}{nb} > \frac{1}{ka} - \frac{1}{nb} > c.$$

Ainsi a_{kn} appartient à $]c, d[$ et à A. Le réel $1/ka$ est donc bien un point d'accumulation de A. Sur le même principe on vérifie que $1/kb$ est aussi un point d'accumulation de A.

Solution de l'exercice 8

Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Pour montrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$, montrons que l'on peut trouver un nombre dyadique d tel que $x < d < y$. Posons $\varepsilon = y - x$. D'après la propriété d'Archimède[24]

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad n\,\varepsilon > 1.$$

Par ailleurs on vérifie facilement par récurrence que pour tout entier k on a $2^k > k$. On en déduit que

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Posons $m = E(2^n x) + 1$ et considérons le nombre dyadique $d = \dfrac{m}{2^n}$. Vérifions que l'on a bien $x < d < y$. D'après les propriétés de la partie entière, on a d'une part

$$d = \frac{m}{2^n} = \frac{E(2^n x) + 1}{2^n} > \frac{2^n x}{2^n} = x$$

et d'autre part

$$d = \frac{m}{2^n} = \frac{E(2^n x) + 1}{2^n} < \frac{2^n x + 1}{2^n} = x + \frac{1}{2^n} < x + \varepsilon = y.$$

L'ensemble des nombres dyadiques est donc dense dans $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 9

1 - Pour tout réel x, on a d'après la relation ii,

$$f(x + 0) = f(x) + f(0).$$

[24] Voir le théorème 3.1, p. 96 ; on prend ici le réel 1 comme premier paramètre quantifié.

Copyrighted material

On en déduit que $f(0) = f(x+0) - f(x) = 0$. On a aussi,

$$f(0) = f(-x+x) = f(-x) + f(x).$$

On en déduit que $f(-x) = -f(x)$, autrement dit que la fonction f est impaire.

2 - L'assertion « pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = n$ » se vérifie par récurrence. On vient d'établir que $f(0) = 0$; elle est donc vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie pour un entier n fixé. On a alors, en utilisant la relation ii et l'hypothèse de récurrence,

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = f(n) + 1 = n + 1.$$

D'après la relation i, ceci implique que pour tout entier p non nul

$$f(1/p) = \frac{1}{f(p)} = \frac{1}{p}.$$

Tout rationnel strictement positif x s'écrit sous la forme $x = n/p$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. L'assertion « pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ $f(n/p) = n/p$ » se vérifie par récurrence sur n. Pour $n = 1$ la relation vient d'être démontrée. Si l'on suppose la relation vraie pour un entier n fixé alors la relation est également vraie pour l'entier $n+1$ puisque

$$\begin{aligned} f((n+1)/p) &= f(n/p + 1/p) = f(n/p) + f(1/p) \\ &= nf(1/p) + f(1/p) = \frac{n+1}{p}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque la fonction f est impaire, si x est un rationnel négatif, on a

$$f(x) = f(-|x|) = -f(|x|) = -|x| = x.$$

La relation $f(x) = x$ est donc vraie pour tout rationnel x.

3 - On a d'une part,

$$f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right) = \frac{1}{f(x(1-x))} = \frac{1}{f(x) - f(x^2)}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x(1-x)}\right) &= f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{f(1-x)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(1-x)} \\ &= \frac{1}{f(x)(1-f(x))}. \end{aligned}$$

De ces deux relations, on déduit que

$$\frac{1}{f(x) - f(x^2)} = \frac{1}{f(x)(1-f(x))}$$

Copyrighted material

autrement dit que $f(x^2) = f(x)^2$.

Soient x et y deux réels tels que $y \geqslant x$. Il existe un réel η tel que $y = x + \eta^2$. On a

$$f(y) = f(x + \eta^2) = f(x) + f(\eta^2) = f(x) + f(\eta)^2 \geqslant f(x).$$

La fonction f est donc croissante.

4 - Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas l'identité. Il existe alors un réel x_0 tel que $f(x_0) \neq x_0$. Supposons pour préciser les choses que $f(x_0) < x_0$ (un raisonnement analogue s'applique si l'on suppose $f(x_0) > x_0$). Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r dans l'intervalle $]f(x_0), x_0[$. Puisque f est croissante, on a

$$f(f(x_0)) \leqslant f(r) \leqslant f(x_0).$$

Or $f(r) = r$ puisque r est un rationnel, donc $r \leqslant f(x_0)$. Ceci contredit le fait que $r \in]f(x_0), x_0[$. On en déduit que l'application f est l'application identité.

Copyrighted material

Copyrighted material

CHAPITRE 4

Le corps des complexes

Dans ce chapitre, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels, muni des opérations usuelles, l'addition $+_{\mathbb{R}}$ et la multiplication $\times_{\mathbb{R}}$, que nous noterons plus simplement $+$ et $\times$. On note 0 et 1 les éléments neutres de $\mathbb{R}$ pour l'addition et pour la multiplication.

4.1 Structure de corps commutatif sur $\mathbb{R}^2$

Considérons l'ensemble produit $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$. Nous cherchons à munir cet ensemble de deux lois de composition interne afin de lui conférer une structure de corps commutatif.

4.1.1 Première approche

Munissons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des deux lois $\oplus$ et $\odot$ définies par

$$(a,b) \oplus (a',b') \overset{\text{déf.}}{=} (a+a', b+b') \quad \text{pour tous } (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2,$$

$$(a,b) \odot (a',b') \overset{\text{déf.}}{=} (a \times a', b \times b') \quad \text{pour tous } (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2.$$

Ces deux lois définissent des lois de composition interne sur $\mathbb{R}^2$ puisque l'addition $+$ et la multiplication $\times$ sont elles-mêmes des lois de composition interne sur $\mathbb{R}$. Les définitions de $\oplus$ et $\odot$ semblent assez naturelles (les opérations s'effectuent termes à termes). Confèrent-elles à $\mathbb{R}^2$ une structure de corps commutatif ? Pour répondre à cette question, examinons dans un premier temps les propriétés de la loi $\oplus$.

Propriétés de la loi $\oplus$

On vérifie aisément que la première loi $\oplus$ possède les propriétés suivantes (qui se déduisent des propriétés de l'addition $+$ sur $\mathbb{R}$).

- La loi $\oplus$ est associative : pour tous $(a,b),(a',b'),(a'',b'') \in \mathbb{R}^2$,

$$\Big((a,b) \oplus (a',b')\Big) \oplus (a'',b'') = (a,b) \oplus \Big((a',b') \oplus (a'',b'')\Big).$$

Copyrighted material

- La loi $\oplus$ est commutative : $(a,b) \oplus (a',b') = (a',b') \oplus (a,b)$ pour tous $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$.
- L'ensemble $\mathbb{R}^2$ possède un élément neutre pour la loi $\oplus$. C'est l'élément $(0,0)$ puisque

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a,b) \oplus (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b).$$

- Tout élément (a,b) de $\mathbb{R}^2$ possède un symétrique pour la loi $\oplus$ qui est l'élément $(-a,-b)$ car

$$(a,b) \oplus (-a,-b) = (0,0).$$

L'ensemble produit $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $\oplus$ possède ainsi une structure de groupe commutatif. Examinons à présent les propriétés de la seconde loi $\odot$.

Propriétés de la loi $\odot$

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés des lois $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{R}$.

- La loi $\odot$ est associative puisque pour tous $(a,b),(a',b'),(a'',b'') \in \mathbb{R}^2$,

$$\Big((a,b) \odot (a',b')\Big) \odot (a'',b'') = (a,b) \odot \Big((a',b') \odot (a'',b'')\Big).$$

- La loi $\odot$ est commutative : pour tous $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b) \odot (a',b') = (a',b') \odot (a,b).$$

- L'ensemble $\mathbb{R}^2$ possède pour élément neutre pour la loi $\odot$ l'élément $(1,1)$ puisque

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a,b) \odot (1,1) = (a \times 1, b \times 1) = (a,b).$$

- La loi $\odot$ est distributive par rapport à la loi $\oplus$. En effet, pour tous (a,b), (a',b'), (a'',b'') appartenant à $\mathbb{R}^2$,

$$(a,b) \odot \Big((a',b') \oplus (a'',b'')\Big) = \Big((a,b) \odot (a',b')\Big) \oplus \Big((a,b) \odot (a'',b'')\Big),$$

$$\Big((a',b') \oplus (a'',b'')\Big) \odot (a,b) = \Big((a',b') \odot (a,b)\Big) \oplus \Big((a'',b'') \odot (a,b)\Big).$$

Ainsi, l'ensemble structuré $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ est un anneau commutatif. Pour que les deux lois $\oplus$ et $\odot$ confèrent à $\mathbb{R}^2$ une structure de corps, il reste à s'assurer de l'existence d'un symétrique pour tout élément non nul de $\mathbb{R}^2$.

Existence de symétrique pour la loi $\odot$

Un élément (a,b) appartenant à $\mathbb{R}^2$, différent de $(0,0)$, est symétrisable pour la loi $\odot$ s'il existe un élément (x,y) appartenant à $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$(a,b) \odot (x,y) = (1,1)$$

Copyrighted material

ou, de manière équivalente (en utilisant la définition de la loi $\odot$), vérifiant

$$\begin{cases} a \times x = 1 \\ b \times y = 1 \end{cases}.$$

Il est maintenant évident qu'un élément de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(a, 0)$ ou de la forme $(0, b)$ ne possède pas de symétrique pour la loi $\odot$. Par conséquent, muni des deux opérations $\oplus$ et $\odot$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ ne possède pas une structure de corps commutatif. Cette première approche se solde par un échec.

4.1.2 Seconde approche

D'après ce qui précède, la loi $\oplus$ confère à $\mathbb{R}^2$ une structure de groupe commutatif. Conservons-la et cherchons une nouvelle loi produit. Considérons sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ la loi $\otimes$ définie par

$$(a, b) \otimes (a', b') \overset{déf.}{=} (aa' - bb', ab' + a'b) \quad \text{pour tous } (a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2.$$

Cette nouvelle loi définit une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$ (puisque $+$ et $\times$ sont elles-mêmes des lois de composition interne sur $\mathbb{R}$). Remarquons que sa définition apparaît de façon bien moins naturelle que celle de la loi $\odot$. Examinons ses propriétés.

Propriétés de la loi $\otimes$

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés des lois $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{R}$.

- La loi $\otimes$ est associative : pour tous $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\Big((a, b) \otimes (a', b')\Big) \otimes (a'', b'') = (a, b) \otimes \Big((a', b') \otimes (a'', b'')\Big).$$

- La loi $\otimes$ est commutative : pour tous $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$,

$$(a, b) \otimes (a', b') = (a', b') \otimes (a, b).$$

- L'ensemble $\mathbb{R}^2$ possède un élément neutre pour la loi $\otimes$. C'est l'élément $(1, 0)$ puisque pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(a, b) \otimes (1, 0) = (a \times 1 - b \times 0, a \times 0 + b \times 1) = (a \times 1, b \times 1) = (a, b).$$

- La loi $\otimes$ est distributive par rapport à la loi $\oplus$ puisque pour tous (a, b), (a', b'), (a'', b'') appartenant à $\mathbb{R}^2$,

$$(a, b) \otimes \Big((a', b') \oplus (a'', b'')\Big) = \Big((a, b) \otimes (a', b')\Big) \oplus \Big((a, b) \otimes (a'', b'')\Big),$$

$$\Big((a', b') \oplus (a'', b'')\Big) \otimes (a, b) = \Big((a', b') \otimes (a, b)\Big) \oplus \Big((a'', b'') \otimes (a, b)\Big).$$

Par conséquent, l'ensemble structuré $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif. Est-ce un corps ?

Copyrighted material

Existence de symétrique pour la loi $\otimes$

Un élément (a,b) appartenant à $\mathbb{R}^2$, différent de $(0,0)$, est symétrisable pour la loi $\otimes$ s'il existe un élément (x,y) appartenant à $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$(a,b) \otimes (x,y) = (1,0)$$

ou, de manière équivalente d'après la définition de la loi $\otimes$, vérifiant le système

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}.$$

On obtient une équation ne portant que sur l'inconnue x en multipliant la première équation par a, la seconde par b et en additionnant le tout. De même, on obtient une équation ne portant que sur l'inconnue y en multipliant la première équation par $-b$, la seconde par a et en additionnant le tout. Ces équations sont

$$(a^2+b^2) \times x = a \qquad \text{et} \qquad (a^2+b^2) \times y = -b.$$

Puisque $(a,b) \neq (0,0)$, on a $a^2+b^2 \neq 0$ et on déduit des deux égalités précédentes que le système (S) possède pour unique solution le couple $(\tilde{x},\tilde{y})$ de $\mathbb{R}^2$ où

$$\tilde{x} = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \text{et} \qquad \tilde{y} = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Par conséquent, tout élément non nul (a,b) de $\mathbb{R}^2$ possède un unique symétrique pour la loi $\otimes$ qui est

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

On a ainsi vérifié que l'ensemble structuré $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ était un corps commutatif. Cette seconde approche se solde donc par un succès.

4.1.3 Structure de corps commutatif sur $\mathbb{R} \times \{0\}$

Considérons le sous-ensemble $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$. Si $(a,0)$ et $(a',0)$ sont deux éléments de $\mathbb{R} \times \{0\}$ alors $(a,0) \oplus (a',0)$ et $(a,0) \otimes (a',0)$ appartiennent aussi à $\mathbb{R} \times \{0\}$ puisque

$$(a,0) \oplus (a',0) = (a+a', 0+0) = (a+a', 0),$$
$$(a,0) \otimes (a',0) = (a \times a' - 0 \times 0, a \times 0 + 0 \times a') = (a \times a', 0).$$

Par conséquent, restreintes à $\mathbb{R} \times \{0\}$, les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ définissent des lois de composition interne sur $\mathbb{R} \times \{0\}$, que nous notons $\widetilde{\oplus}$ et $\widetilde{\otimes}$. On les appelle les ***lois induites*** sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ par $\oplus$ et $\otimes$. On vérifie aisément les propriétés suivantes.

- La loi induite $\widetilde{\oplus}$ est associative et commutative sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ (puisque $\oplus$ l'est sur $\mathbb{R}^2$).
- La loi induite $\widetilde{\otimes}$ est distributive par rapport à la loi induite $\widetilde{\oplus}$ (puisque $\otimes$ l'est par rapport à $\oplus$) et associative (puisque $\otimes$ l'est).

Copyrighted material

- Les éléments neutres $(0,0)$ et $(1,0)$ de $\mathbb{R}^2$ pour les lois $\oplus$ et $\otimes$ appartiennent au sous-ensemble $\mathbb{R}\times\{0\}$. Ce sont donc aussi les éléments neutres de $\mathbb{R}\times\{0\}$ pour les lois induites $\widetilde{\oplus}$ et $\widetilde{\otimes}$.
- Soit $(a,0)$ un élément de $\mathbb{R}\times\{0\}$. Ses symétriques pour les lois $\oplus$ et $\otimes$ sont $(-a,0)$ et $(1/a,0)$ car

$$(a,0)\oplus(-a,0)=(a-a,0)=(0,0),$$
$$(a,0)\otimes(1/a,0)=(a\times 1/a-0\times 0,a\times 0+0\times 1/a)=(1,0).$$

  Ils appartiennent au sous-ensemble $\mathbb{R}\times\{0\}$. Ce sont donc aussi ses éléments symétriques pour les deux lois induites $\widetilde{\oplus}$ et $\widetilde{\otimes}$.

Ainsi, l'ensemble $\mathbb{R}\times\{0\}$ muni des deux lois induites $\widetilde{\oplus}$ et $\widetilde{\otimes}$ possède aussi une structure de corps commutatif. Cette structure est induite par celle définie sur $\mathbb{R}^2$. En ce sens, on dit que $\mathbb{R}\times\{0\}$ hérite de la structure de corps définie sur $\mathbb{R}^2$, ou encore que $(\mathbb{R}\times\{0\},\widetilde{\oplus},\widetilde{\otimes})$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$.

Afin d'alléger les écritures, nous notons par le même symbole $\oplus$ la loi sur $\mathbb{R}^2$ et la loi qu'elle induit sur $\mathbb{R}\times\{0\}$. Même commentaire pour $\otimes$.

Injection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

Il existe une injection naturelle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Considérons l'application Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall a\in\mathbb{R}\quad \Phi(a)=(a,0).$$

Il est clair que $\Phi(\mathbb{R})=\mathbb{R}\times\{0\}$. De plus, Φ est injective. En effet, considérons deux nombres réels a et a'. Si $\Phi(a)=\Phi(a')$ alors, par définition de Φ,

$$(a,0)=(a',0),$$

et par conséquent $a=a'$. L'injection Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définit ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\times\{0\}$.

De plus, l'application Φ transporte dans $\mathbb{R}\times\{0\}$ les opérations définies sur $\mathbb{R}$. En effet, il est équivalent d'identifier à un couple de $\mathbb{R}\times\{0\}$ le résultat d'une opération effectuée d'abord dans $\mathbb{R}$ entre $a\in\mathbb{R}$ et $a'\in\mathbb{R}$, ou d'identifier d'abord a et a' aux couples $(a,0)$ et $(a',0)$ puis d'effectuer l'opération dans $\mathbb{R}\times\{0\}$, puisque

$$\Phi(a+a')=(a+a',0)=(a,0)\oplus(a',0)=\Phi(a)\oplus\Phi(a'),$$
$$\Phi(a\times a')=(a\times a',0)=(a,0)\otimes(a',0)=\Phi(a)\otimes\Phi(a').$$

L'application Φ transporte aussi l'élément unité puisque

$$\Phi(1)=(1,0).$$

En résumé, le corps $(\mathbb{R},+,\times)$ est isomorphe par Φ au sous-corps $(\mathbb{R}\times\{0\},\oplus,\otimes)$ de $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$.

Copyrighted material

4.2 Le corps des nombres complexes

4.2.1 Définition de l'ensemble des nombres complexes

La structure de corps commutatif de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ donne un sens à la définition suivante (nous la devons au mathématicien William Hamilton) :

Définition 4.1 *L'ensemble* $\mathbb{R}^2$ *muni des opérations* $\oplus$ *et* $\otimes$ *définies pour tous* (a,b), (a',b') *appartenant à* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$(a,b) \oplus (a',b') \overset{déf.}{=} (a+a', b+b')$$

$$(a,b) \otimes (a',b') \overset{déf.}{=} (aa'-bb', ab'+a'b)$$

possède une structure de corps commutatif. On le note $\mathbb{C}$ *et on l'appelle le* ***corps des nombres complexes***.

Nous abandonnons les deux notations $\oplus$ et $\otimes$ au profit des deux notations $+$ et $\times$ (plus conventionnelles) ou, lorsque le contexte l'exige, $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$. Nous notons $0_{\mathbb{C}}$ l'élément zéro $(0,0)$ de $\mathbb{C}$, et $1_{\mathbb{C}}$ l'élément unité $(1,0)$ de $\mathbb{C}$.

HAMILTON, William (1805, Dublin - 1865, Dublin).

Astronome doté d'un esprit brillant (alors âgé de 16 ans, il décela une erreur dans le traité de mécanique céleste de Laplace), il devint en 1832 membre de l'Académie Royale Irlandaise. On lui doit d'importants travaux en mécanique et en optique. Hamilton inventa les quaternions (adaptation des nombres complexes à un espace tridimensionnel), appelés aussi nombres hypercomplexes. Ses travaux constituent l'un des fondements de l'algèbre moderne. Nous lui devons le terme *vecteur* (du Latin *vector* : qui transporte).

Notations et conventions

On note i l'élément $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ dit ***unité imaginaire***[1]. On vérifie que

$$\mathrm{i}^2 = (0,1) \times_{\mathbb{C}} (0,1) = (-1,0) = -1_{\mathbb{C}}.$$

On convient, conformément à la discussion menée au paragraphe 4.1.3, d'identifier l'élément $(a,0)$ de $\mathbb{R}^2$ à l'élément a de $\mathbb{R}$. On écrira donc a au lieu de

[1] Nous devons cette notation au mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783), considéré comme un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Copyrighted material

$(a,0)$. En particulier,

$$0 \overset{not.}{=} 0_{\mathbb{C}} = (0,0), \quad 1 \overset{not.}{=} 1_{\mathbb{C}} = (1,0) \quad \text{et} \quad \mathrm{i}^2 \overset{not.}{=} -1.$$

Il est important de noter que l'identification de $(a,0)$ avec a n'a de sens que parce qu'il existe une injection naturelle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. C'est l'application Φ définie au paragraphe 4.1.3. Ainsi, lorsque l'on écrit « $a = (a,0)$ », l'injection Φ est sous-entendue, l'écriture correcte étant $\Phi(a) = (a,0)$. On dit aussi souvent de manière abusive que $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$ et on note

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Là encore, l'injection Φ est sous-entendue. Nous devrions écrire $\Phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$ et dire que l'on identifie $\mathbb{R}$ à une partie de $\mathbb{C}$ via l'injection canonique Φ.

Soit $z = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Compte tenu des conventions précédentes, nous avons

$$z \overset{déf.}{=} (a,b) = (a,0) +_{\mathbb{C}} (0,b) = (a,0) +_{\mathbb{C}} (0,1) \times_{\mathbb{C}} (b,0) \overset{not.}{=} a +_{\mathbb{C}} \mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} b.$$

Nous adoptons la notation $z = a +_{\mathbb{C}} \mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} b$ appelée ***forme cartésienne***, plutôt que la notation $z = (a,b)$ et nous parlerons du nombre complexe z (ou du complexe z) plutôt que du couple z.

- Le réel a est appelé ***partie réelle*** du complexe z et il est noté $\mathrm{Re}(z)$.
- Le réel b est appelé ***partie imaginaire*** du complexe z et il est noté $\mathrm{Im}(z)$.

On peut donc écrire tout nombre complexe z sous la forme

$$z = \mathrm{Re}(z) +_{\mathbb{C}} \mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(z)$$

et cette écriture est unique. Deux nombres complexes sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire : pour tous $a, b, a', b' \in \mathbb{C}$,

$$a +_{\mathbb{C}} \mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} b = a' +_{\mathbb{C}} \mathrm{i} \times_{\mathbb{C}} b' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

Définition 4.2 *Un nombre complexe z est dit* ***imaginaire pur*** *si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire si $z = \mathrm{i}b$ avec $b \in \mathbb{R}$, et on note $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.*

Afin d'alléger les écritures, nous abandonnons définitivement les deux notations indicielles $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ et nous convenons de noter $z + z'$ (respectivement $z \times z$ ou zz') l'addition (resp. la multiplication) des deux nombres complexes z et z'.

On note ainsi de la même manière les opérations dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$. Cette similitude dans les notations n'est en aucun cas gênante dans la pratique puisque les règles pour le calcul algébrique sont les mêmes dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ (ce sont deux corps commutatifs). On peut manipuler les éléments de $\mathbb{C}$ comme l'on manipule ceux de $\mathbb{R}$. On peut donc factoriser et/ou développer des expressions dans $\mathbb{C}$ comme on en a pris l'habitude dans $\mathbb{R}$, en prenant soin néanmoins de

Copyrighted material

remplacer i^2 par -1 à chacune de ses apparitions dans une expression. Seule la nature des éléments que l'on manipule est différente. Par exemple, on a

$$z^2 + 3\mathrm{i}z - 5 + 4\mathrm{i} \overset{not.}{=} (a,b) \times_{\mathbb{C}} (a,b) +_{\mathbb{C}} (3,0) \times_{\mathbb{C}} (0,1) \times_{\mathbb{C}} (a,b) +_{\mathbb{C}} (-5,4).$$

La manipulation de l'expression de gauche est moins lourde que celle de droite. Elles représentent pourtant le même nombre complexe. Seule l'écriture diffère. Remarquons que les opérations sur les nombres complexes, lorsqu'elles sont appliquées aux complexes particuliers que sont les nombres réels, redonnent les résultats connus dans $\mathbb{R}$. En ce sens, on dit que les opérations algébriques définies sur $\mathbb{C}$ prolongent celles définies sur $\mathbb{R}$.

On vérifie facilement la propriété suivante.

Proposition 4.1 *Pour tous z, z' appartenant à $\mathbb{C}$,*

$$\mathrm{Re}\,(z+z') = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z') \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}\,(z+z') = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z'),$$

Remarque En général,

$$\mathrm{Re}\,(z \times z') \neq \mathrm{Re}\,(z) \times \mathrm{Re}\,(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(z \times z') \neq \mathrm{Im}\,(z) \times \mathrm{Im}\,(z').$$

Prenons par exemple $z = 1 + \mathrm{i}$ et $z' = 2 + \mathrm{i}$. On a $z \times z' = 1 + 3\mathrm{i}$,

$$\underbrace{\mathrm{Re}\,(z \times z')}_{=1} \neq \underbrace{\mathrm{Re}\,(z)}_{=1} \times \underbrace{\mathrm{Re}\,(z')}_{=2} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Im}\,(z \times z')}_{=3} \neq \underbrace{\mathrm{Im}\,(z)}_{=1} \times \underbrace{\mathrm{Im}\,(z')}_{=1}.$$

Conformément aux notations définies en page 67, on note pour tout entier n non nul et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n \overset{not.}{=} \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}_{n \text{ fois}}.$$

En particulier en prenant $n = 1$, on a $z^1 = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et on convient que $z^0 = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Puisque $\mathrm{i}^2 = -1$, on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{i}^{4n} = 1, \quad \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2} = -1, \quad \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}.$$

Proposition 4.2 *On a les formules suivantes :*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \quad (z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k (z')^{n-k}.$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^n}{1-z} & \textit{si } z \neq 1 \\ n & \textit{si } z = 1 \end{cases}.$

Copyrighted material

Démonstration ⊵ La première formule est celle du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$. Elle a été démontrée dans le cas général d'un anneau pour deux éléments z et z' tels que $z \times z' = z' \times z$ (voir la proposition 2.12, p. 72). Elle est donc vraie pour n'importe quel couple d'éléments d'un corps commutatif, par exemple $\mathbb{C}$.

⊵ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$(1-z) \times (1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) = 1 - z^n. \tag{1}$$

Cette égalité a été établie au chapitre 2 dans le cas général d'un anneau non nécessairement commutatif (voir l'exercice 5, p. 69). Si $z \neq 1$ alors le nombre complexe $1 - z$ est inversible (car il est non nul). Multiplions l'égalité (1) par $(1-z)^{-1}$. On obtient

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Si maintenant $z = 1$, on obtient directement $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = n$. □

4.2.2 Conjugaison d'un nombre complexe

Définition 4.3 *On appelle* **conjugué** *du nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels, le nombre complexe $\overline{z}$ de partie réelle a et de partie imaginaire $-b$, c'est-à-dire : $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.*

Exemple $\overline{1 + 2\mathrm{i}} = 1 - 2\mathrm{i}$, $\overline{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ et $\overline{4} = 4$.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 4.3 *On a :*

1. $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \times \overline{z} = \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2$,
2. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$.
3. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{\overline{z}} = z$,
4. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \big(\, z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \,\big)$,
5. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \big(\, z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z \,\big)$,
6. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \quad \overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'} \quad \textit{et} \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

7. $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad \overline{(z\,/z')} = \overline{z}\,/\overline{z'}$.

Démonstration La démonstration de chacune des propriétés s'effectue en revenant aux définitions. La rédaction est laissée en exercice. □

Copyrighted material

Exercice 1 *Soit* j *le nombre complexe défini par*

$$\mathrm{j} = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2.$$

1 - Montrer que : $\bar{\mathrm{j}} = 1/\mathrm{j} = \mathrm{j}^2$.
2 - En déduire que : $\mathrm{j}^3 = 1$ *et* $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

4.3 Module et argument

4.3.1 Module d'un nombre complexe

Le produit d'un nombre complexe z et de son conjugué $\overline{z}$ est un nombre réel positif ou nul puisque

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z \times \overline{z} = \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2 \geqslant 0,$$

ce qui nous autorise à prendre la racine carrée de $z \times \overline{z}$. La définition suivante a alors un sens.

Définition 4.4 *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *On appelle* **module de** z *et on note* $|z|$, *le nombre réel positif ou nul défini par :*

$$|z| \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{\big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2}.$$

La notation utilisée est cohérente avec la notation utilisée pour désigner la valeur absolue d'un nombre réel puisque si un nombre complexe z est réel, c'est-à-dire si $z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors son module est donné par

$$|z| = \sqrt{a^2}$$

et il est égal à la valeur absolue de a. On dit que le module est un prolongement à $\mathbb{C}$ de la valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$. D'ailleurs, certaines des propriétés (elles sont données ci-après) du module d'un nombre complexe sont des extensions des propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel.

Proposition 4.4 *On a :*

1. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \big(|z| = 0 \iff z = 0\big)$,
2. $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\overline{z}| = |z|$,
3. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \big(|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \text{ et } |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|\big)$,
4. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z \times z'| = |z| \times |z'|$,
5. $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad |z/z'| = |z|/|z'|$.
6. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$, *(première inégalité triangulaire)*
7. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$. *(deuxième inégalité triangulaire)*

Copyrighted material

Démonstration Les démonstrations des trois premières propriétés sont immédiates. Leur rédaction est laissée en exercice. Montrons la quatrième propriété. Pour montrer que les deux nombres réels positifs $|z \times z'|$ et $|z| \times |z'|$ sont égaux, il suffit de montrer que leurs carrés le sont. On a

$$|z \times z'|^2 = (z \times z')\overline{(z \times z')} = (z \times \overline{z}) \times (z' \times \overline{z'}) = |z|^2 \times |z'|^2.$$

On procède de la même manière pour montrer la cinquième propriété. Démontrons la première inégalité triangulaire. Soient z et z' deux nombres complexes. On a

$$|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}.$$

Remarquons que $z'\overline{z}$ est le conjugué de $\overline{z'}z$. D'où, en utilisant la deuxième propriété de la proposition 4.3, $z\overline{z'} + z'\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z \times \overline{z'})$. On obtient ainsi

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z \times \overline{z'}) + |z'|^2. \tag{2}$$

Or, en utilisant successivement la troisième, la quatrième et la deuxième propriété de la proposition 4.4,

$$\mathrm{Re}(z \times \overline{z'}) \leqslant |z \times \overline{z'}| = |z| \times |\overline{z'}| = |z| \times |z'|. \tag{3}$$

En regroupant (2) et (3), on obtient finalement l'inégalité

$$|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = \big(|z| + |z'|\big)^2,$$

d'où $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$; ce qui termine la démonstration de la première inégalité triangulaire. Montrons à présent la deuxième inégalité triangulaire en raisonnant par disjonction de cas. Soient z et z' deux nombres complexes. Supposons dans un premier temps $|z| \geqslant |z'|$. Alors $\big||z| - |z'|\big| = |z| - |z'|$ et on a

$$|z| - |z'| = |z - z' + z'| - |z'| \leqslant |z - z'| + |z'| - |z'| = |z - z'|$$

où on a utilisé la 1ère inégalité triangulaire. Supposons maintenant $|z| < |z'|$. Alors $\big||z| - |z'|\big| = -|z| + |z'|$ et on a

$$-|z| + |z'| = -|z| + |z' - z + z| \leqslant -|z| + |z' - z| + |z| = |z' - z| = |z - z'|$$

où on a encore utilisé la première inégalité triangulaire. □

Remarque Il est à noter que l'application $(z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longmapsto |z - z'| \in \mathbb{R}_+$ définit une distance[2] sur $\mathbb{C}$.

[2] La notion de distance sur un ensemble est définie à la page 103.

Copyrighted material

4.3.2 Argument d'un nombre complexe

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe non nul, avec x et y réels. On a

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{i}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

ou encore, $z = |z| \times (\alpha + \mathrm{i}\beta)$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Cela conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 4.5 *Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe* ***non nul****, avec x et y réels. On appelle* **argument de** *z et on note* $\mathrm{Arg}(z)$*, tout nombre réel vérifiant :*

$$\cos\big(\mathrm{Arg}(z)\big) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \textit{et} \quad \sin\big(\mathrm{Arg}(z)\big) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Parmi ces réels (il y en a une infinité), un seul appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appelle ***argument principal****. Si on le note φ, alors tout argument de z vérifie*

$$\mathrm{Arg}(z) = \varphi + 2k\pi \quad \textit{avec} \quad k \in \mathbb{Z},$$

ce que l'on note

$$\mathrm{Arg}(z) \equiv \varphi \ \ [2\pi],$$

et on dit que $\mathrm{Arg}(z)$ *est équivalent (ou congru) à φ modulo 2π.*[3]

Contrairement au module qui est défini pour n'importe quel nombre complexe (nul ou non nul), l'argument du nombre complexe nul n'est pas défini. On retiendra les arguments suivants :

$$\mathrm{Arg}(1) \equiv 0 \ \ [2\pi], \quad \mathrm{Arg}(\mathrm{i}) \equiv \frac{\pi}{2} \ \ [2\pi],$$

$$\mathrm{Arg}(-1) \equiv \pi \ \ [2\pi], \quad \mathrm{Arg}(-\mathrm{i}) \equiv -\frac{\pi}{2} \ \ [2\pi].$$

On peut alors écrire tout nombre complexe z non nul sous la forme suivante appelée ***forme trigonométrique*** :[4]

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad z = |z| \times \Big(\cos\big(\mathrm{Arg}(z)\big) + \mathrm{i}\sin\big(\mathrm{Arg}(z)\big)\Big).$$

---

[3] L'argument d'un nombre complexe est en fait une classe d'équivalence (c'est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). Comme c'est souvent le cas lorsque l'on manipule des classes d'équivalence, on confond (abusivement) la classe avec un de ses représentants (on les note alors de la même manière) et on dit qu'un argument d'un nombre complexe est défini modulo 2π.

[4] Il est à noter que, dans certains cas, le passage de l'écriture cartésienne à l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe peut s'avérer difficile. En effet, si le calcul de son module ne pose aucune difficulté, en revanche, son argument ne s'obtient pas toujours de manière explicite.

Copyrighted material

On vérifie qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres complexes non nuls soient égaux est qu'ils aient même module et même argument (modulo 2π). Autrement dit, pour tous z, z' appartenant à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$z = z' \iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \operatorname{Arg}(z') = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Il est immédiat de vérifier les deux caractérisations suivantes.

– Un nombre complexe non nul z est réel si, et seulement si,

$$\operatorname{Arg}(z) \equiv 0 \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \operatorname{Arg}(z) \equiv \pi \ [2\pi].$$

– Un nombre complexe non nul z est imaginaire pur si, et seulement si,

$$\operatorname{Arg}(z) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \operatorname{Arg}(z) \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$

On a les propriétés suivantes.

Proposition 4.5 *On a :*

1. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Arg}(\overline{z}) \equiv -\operatorname{Arg}(z) \ [2\pi]$,
2. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \operatorname{Arg}(z \times z') \equiv \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z') \ [2\pi]$,
3. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \operatorname{Arg}(z/z') \equiv \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z') \ [2\pi]$,
4. $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Arg}(z^n) \equiv n \times \operatorname{Arg}(z) \ [2\pi]$.

Démonstration Chacune des démonstrations s'effectue en revenant à la définition de l'argument d'un nombre complexe. Vérifions seulement la deuxième propriété. Soient $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta \equiv \operatorname{Arg}(z) \ [2\pi]$ et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$ avec $r' = |z'|$ et $\theta' \equiv \operatorname{Arg}(z') \ [2\pi]$. On a

$$\begin{aligned} z \times z' &= r\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big) \times r'\big(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'\big) \\ &= rr'\Big(\big(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\big) + \mathrm{i}\big(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\big)\Big). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a (voir le formulaire de trigonométrie, p. 154)

$$\begin{aligned} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' &= \cos(\theta + \theta'), \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' &= \sin(\theta + \theta'). \end{aligned}$$

On en déduit

$$z \times z' = rr'\Big(\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')\Big).$$

Puisque $rr' > 0$, on obtient $\operatorname{Arg}(z \times z') \equiv \theta + \theta' \ [2\pi]$, et par transitivité de la relation d'équivalence, $\operatorname{Arg}(z \times z') \equiv \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z') \ [2\pi]$. La démonstration des autres propriétés est laissée en exercice. □

Copyrighted material

4.3.3 Notation exponentielle complexe et forme polaire

Il est pratique d'utiliser pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ la notation exponentielle complexe

$$e^{i\theta} \overset{not.}{=} \cos\theta + i\sin\theta.$$

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme suivante appelée ***forme polaire*** :

$$z = |z|\, e^{i\mathrm{Arg}(z)} \quad \text{avec} \quad |z| \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}(z) \in \mathbb{R}.$$

On a les propriétés suivantes :

Proposition 4.6 *On a :*

1. pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a les ***formules d'Euler***

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad et \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \left(|e^{i\theta}| = 1, \quad \mathrm{Arg}(e^{i\theta}) \equiv \theta\ [2\pi] \quad et \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \right),$

3. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2 \quad \left(e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad et \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \right).$

Démonstration Pour chacune des propriétés, la démonstration est immédiate (laissée en exercice). □

La notation exponentielle complexe est cohérente avec la notation de l'exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ puisque la proriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ est une extension à $i\mathbb{R}$ de la propriété $e^x \times e^{x'} = e^{x+x'}$ définie sur $\mathbb{R}$.

En particulier en prenant $\theta = \theta'$, l'égalité $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ s'écrit sous la forme trigonométrique suivante :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta.$$

Plus généralement, on a la formule suivante, dite de Moivre, du nom du mathématicien anglais Abraham de Moivre (1667-1754) :[5]

Corollaire 4.1 (Formule de Moivre) *Pour tout entier relatif n et pour tout réel θ,*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

[5] En fait, Abraham de Moivre était français d'origine (né à Vitry près de Paris) mais il fut contraint de se réfugier en Angleterre, en 1685, à la suite de la révocation de l'Édit de Nantes.

Copyrighted material

Démonstration En utilisant la notation exponentielle, on doit donc montrer pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$. Supposons d'abord $n \in \mathbb{N}$. La démonstration s'effectue par récurrence sur n. La propriété est immédiate au rang 0 puisque nous avons d'une part, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^0 = 1$ (par convention), et d'autre part, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$. Supposons que l'on ait $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et montrons que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}.$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On vérifie

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta+\theta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta},$$

ce qui termine la démonstration pour $n \in \mathbb{N}$. Supposons à présent $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Remarquons que pour tout réel θ, le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est non nul puisqu'il est de module égal à 1. On obtient ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{-n}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

où on a utilisé l'égalité $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$ puisque $-n$ est un entier naturel (non nul), et le fait que $1/\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ (d'après la deuxième propriété de la proposition 4.6). □

Remarque Soit θ un réel. Il est important de savoir retrouver l'égalité

$$\mathbf{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}.} \tag{4}$$

Elle s'obtient en utilisant la factorisation $1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}$. En effet,

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}.$$

En procédant de la même manière, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}.$$

Puisque $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$, on obtient finalement l'égalité

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)/2}. \tag{5}$$

Soient θ et φ deux réels. En utilisant $\theta = \dfrac{\theta+\varphi}{2} + \dfrac{\theta-\varphi}{2}$ et $\varphi = \dfrac{\theta+\varphi}{2} - \dfrac{\theta-\varphi}{2}$, il vient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)/2}. \tag{6}$$

Copyrighted material

Lorsque l'on écrit un nombre complexe z sous la forme $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la forme obtenue n'est pas nécessairement la forme polaire de z. C'est le cas si r est positif. En revanche, si r est négatif, alors

$$-r \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -(-r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = (-r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1.$$

L'écriture polaire de z est alors $(-r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$. Par exemple, l'écriture polaire du nombre complexe $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ se déduit de l'égalité (4) en discutant sur le signe du terme $\cos(\theta/2)$:

- si $\cos(\theta/2) > 0$ alors $|z| = 2\cos(\theta/2)$ et $\operatorname{Arg} z \equiv \theta/2\ [2\pi]$;
- si $\cos(\theta/2) < 0$ alors $|z| = -2\cos(\theta/2)$ et $\operatorname{Arg} z \equiv \theta/2 + \pi\ [2\pi]$.

Une discussion analogue s'impose si l'on désire obtenir les formes polaires des nombres complexes donnés par (5) et (6).

4.3.4 Représentation géométrique

En rapportant le plan euclidien $\mathcal{P}$ à une repère orthonormé direct

$$\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}),$$

on associe au nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels, le point M du plan $\mathcal{P}$, d'abscisse x et d'ordonnée y par rapport au repère $\mathcal{R}$. Le plan $\mathcal{P}$ est alors appelé ***plan complexe***. À chaque nombre complexe correspond un point et un seul du plan complexe et, réciproquement, à chaque point du plan complexe correspond un nombre complexe et un seul.

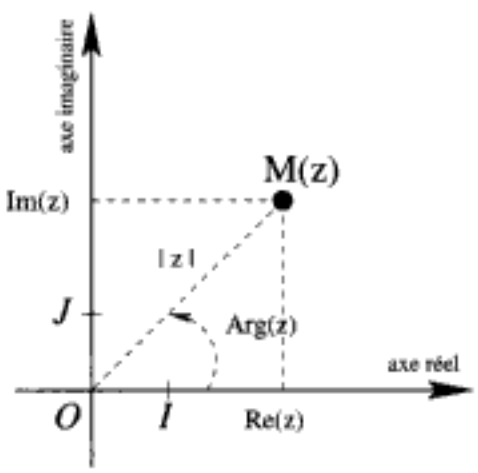


Fig. 1 Représentation du nombre complexe z, de module $|z|$ et d'argument $\operatorname{Arg}(z)$, dans le plan complexe.

Soit M le point du plan $\mathcal{P}$ associé au nombre complexe $z \in \mathbb{C}$. Alors, le complexe z est appelé l'***affixe*** du point M. De plus, $|z|$ représente la longueur du vecteur

Copyrighted material

$\overrightarrow{OM}$ et $\mathrm{Arg}(z)$ représente la mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{IOM}$, c'est-à-dire de l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe des abscisses. Réciproquement, le point M est appelé l'***image*** du complexe z. On note $M(z)$.

- L'axe des abscisses représente l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On l'appelle l'***axe réel***. L'image du nombre complexe 1 est le point I de coordonnées $(1,0)$.
- L'axe des ordonnées représente l'ensemble $i\mathbb{R}$ des imaginaires purs. On l'appelle l'***axe imaginaire***. L'image de l'unité imaginaire i est le point J de coordonnées $(0,1)$.

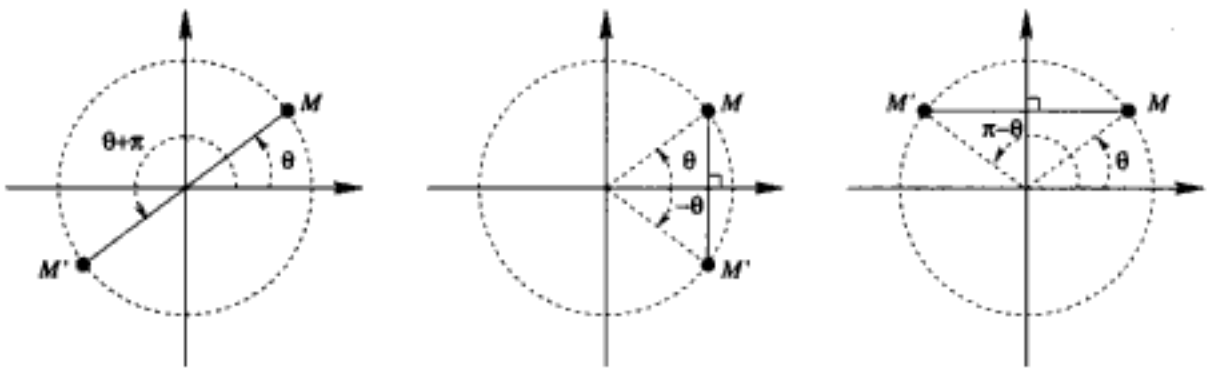


Fig. 2 Points symétriques par rapport à l'origine (dessin de gauche), par rapport à l'axe réel (dessin du centre), par rapport à l'axe imaginaire (dessin de droite).

Soient M et M' deux points du plan $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z et z'. On a les propriétés suivantes (voir fig. 2).

- Les points M et M' sont symétriques par rapport au point O si, et seulement si, $z' = -z$, ou de manière équivalente,

$$|z'| = |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}(z') \equiv \mathrm{Arg}(z) + \pi \ [2\pi].$$

- Les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe réel si, et seulement si, $z' = \overline{z}$, ou de manière équivalente,

$$|z'| = |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}(z') \equiv -\mathrm{Arg}(z) \ [2\pi].$$

- Les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire si, et seulement si, $z' = -\overline{z}$, ou de manière équivalente,

$$|z'| = |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}(z') \equiv \pi - \mathrm{Arg}(z) \ [2\pi].$$

Copyrighted material

4.4 Racines d'un nombre complexe

4.4.1 Racines deuxièmes d'un nombre complexe

Définition 4.6 *Soient a et b deux réels. On appelle* **racine deuxième** *du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$ tout nombre complexe z vérifiant :*

$$z^2 = a + \mathrm{i}b.$$

Cherchons les racines deuxièmes du nombre complexe $Z = a + \mathrm{i}b$. Si $Z = 0$ alors 0 est l'unique racine deuxième. Supposons désormais $Z \neq 0$.

$\trianglerighteq$ Considérons dans un premier temps le cas où $b = 0$, c'est-à-dire le cas où $Z \in \mathbb{R}^*$ (le cas où $Z = 0$ a déjà été traité). Considérons les deux cas : $a > 0$ et $a < 0$.

- si $a > 0$ alors les racines deuxièmes z_1 et z_2 du nombre réel positif a sont la racine carrée de a, $z_1 = \sqrt{a}$, et son opposé, $z_2 = -\sqrt{a}$. On a donc $z_1 = -z_2$ et $z_1 \neq z_2$.
- si $a < 0$ alors $z_1 = \mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $z_2 = -\mathrm{i}\sqrt{-a}$ sont les deux racines deuxièmes de Z. En effet

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{i}\sqrt{-a}\right) \times \left(\mathrm{i}\sqrt{-a}\right) &= \mathrm{i}^2 \times \left(\sqrt{-a}\right)^2 = -(-a) = a, \\ \left(-\mathrm{i}\sqrt{-a}\right) \times \left(-\mathrm{i}\sqrt{-a}\right) &= (-\mathrm{i})^2 \times \left(\sqrt{-a}\right)^2 = -(-a) = a. \end{aligned}$$

  On a encore $z_1 = -z_2$ et $z_1 \neq z_2$.

$\trianglerighteq$ Considérons maintenant le cas où $b \neq 0$, c'est-à-dire le cas où $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et recherchons les racines deuxièmes de Z sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$z^2 = Z \iff (x + \mathrm{i}y)^2 = a + \mathrm{i}b \iff x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = a + \mathrm{i}b.$$

En considérant le module, on peut aussi écrire

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On obtient alors le système de trois équations suivant

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}.$$

On déduit facilement de la première égalité et de la troisième égalité

$$\begin{aligned} x^2 = \alpha \quad \text{où} \quad \alpha &= \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right), \\ y^2 = \beta \quad \text{où} \quad \beta &= \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right). \end{aligned}$$

Copyrighted material

Les deux réels α et β sont positifs. On en déduit

$$x = \pm\sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad y = \pm\sqrt{\beta}.$$

Il y a donc quatre solutions envisageables qui sont $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$, $(-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$, $(\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\beta})$ et $(-\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\beta})$. Il reste à satisfaire la deuxième égalité $2xy = b$. On vérifie que

$$2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} = \sqrt{b^2} = |b|.$$

Considérons les cas : $b > 0$ et $b < 0$ (le cas où $b = 0$ a déjà été traité).

- Si $b > 0$ (c'est-à-dire si $|b| = b$) alors

$$2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = b.$$

Par conséquent, seuls les deux couples $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ et $(-\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\beta})$ vérifient la deuxième équation du système. Les racines deuxièmes de Z sont :

$$z_1 = \sqrt{\alpha} + \mathrm{i}\sqrt{\beta} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{\alpha} - \mathrm{i}\sqrt{\beta}.$$

- Si $b < 0$ (c'est-à-dire si $|b| = -b$) alors

$$2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = -b.$$

Ce sont cette fois-ci les deux couples $(\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\beta})$ et $(-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ qui vérifient la deuxième équation du système. Les racines deuxièmes de Z sont :

$$z_1 = \sqrt{\alpha} - \mathrm{i}\sqrt{\beta} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{\alpha} + \mathrm{i}\sqrt{\beta}.$$

Dans les deux cas, $z_1 = -z_2$ et $z_1 \neq z_2$. On a démontré la proposition suivante.

Proposition 4.7 *Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines deuxièmes distinctes et opposées l'une de l'autre.*

Remarques

1. Nous verrons au paragraphe 4.4.3 (voir la remarque p. 151) une méthode rapide permettant de trouver les formes polaires des deux racines deuxièmes d'un nombre complexe lorsque ce dernier sera lui-même écrit sous forme polaire.

2. Les racines deuxièmes d'un nombre complexe sont aussi appelées racines carrées de ce nombre complexe. Pour signifier que z_1 et z_2 sont les racines carrées de $Z \in \mathbb{C}$, nous n'utiliserons pas le symbole $\sqrt{\ }$ mais nous écrirons plutôt que z_1 et z_2 vérifient les égalités

$$(z_1)^2 = Z \quad \text{et} \quad (z_2)^2 = Z.$$

En effet, conformément à la proposition 3.11 (donnée en p. 105), nous réservons l'usage du symbole $\sqrt{\ }$ à la représentation de l'unique racine carrée positive d'un nombre réel positif. Nous l'utiliserons donc dans le cas où le complexe Z est un nombre réel positif, pour représenter, parmi les deux racines deuxièmes, celle qui est positive, l'autre s'écrivant comme son opposé.

Copyrighted material

Exemples

1. La méthode générale permettant de calculer les racines deuxièmes d'un nombre complexe est celle qui est présentée en préambule à la proposition 4.7. Nous l'appliquons pour calculer les racines deuxièmes de $-3-4\mathrm{i}$. Nous les recherchons sous la forme cartésienne $x+\mathrm{i}y$. En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires dans l'égalité

$$(x+\mathrm{i}y)^2 = -3-4\mathrm{i},$$

et en considérant les modules, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=-4 \\ x^2+y^2=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5 \end{cases}$$

dont on déduit $x^2=1$ et $y^2=4$, d'où $x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$ et $y=\pm\sqrt{4}=\pm 2$. Parmi les quatre couples $(1,2)$, $(-1,2)$, $(1,-2)$ et $(-1,-2)$, seuls les couples $(-1,2)$ et $(1,-2)$ vérifient l'égalité $2xy=-4$. Les racines deuxièmes de $-3-4\mathrm{i}$ sont

$$z_1=-1+2\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2=1-2\mathrm{i}.$$

2. L'obtention des racines deuxièmes de -16 est immédiate car -16 est un nombre réel négatif. Ses racines deuxièmes sont les deux nombres imaginaires purs

$$z_1=\mathrm{i}\sqrt{-(-16)}=4i \qquad \text{et} \qquad z_2=-\mathrm{i}\sqrt{-(-16)}=-4i.$$

3. De même, l'obtention des racines deuxièmes du nombre réel positif 4 est immédiate. Ses racines deuxièmes sont les deux nombres réels

$$z_1=\sqrt{4}=2 \qquad \text{et} \qquad z_2=-\sqrt{4}=-2.$$

Remarque Comme cela a été illustré dans les deux derniers exemples, le calcul des racines deuxièmes d'un nombre réel (qu'il soit positif ou négatif) est immédiat puisqu'il ne nécessite pas la résolution d'un système de trois équations comme dans le premier exemple. Toutefois, un calcul analogue à celui mené dans le premier exemple, bien que lourd et inutile dans le cas présent, nous conduirait au même résultat. Par exemple, pour calculer les deux racines deuxièmes de -16, on peut résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x^2-y^2=-16 \\ 2xy=0 \\ x^2+y^2=\sqrt{(-16)^2}=16 \end{cases}$$

dont on déduit $x^2=0$ et $y^2=16$, d'où $x=0$ et $y=\pm\sqrt{16}=\pm 4$. Il n'y a cette fois-ci que deux couples $(0,4)$ et $(0,-4)$. Ils vérifient tous les deux l'égalité $2xy=0$. On retrouve donc bien que les racines deuxièmes de -16 sont

$$z_1=4\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2=-4\mathrm{i}.$$

Copyrighted material

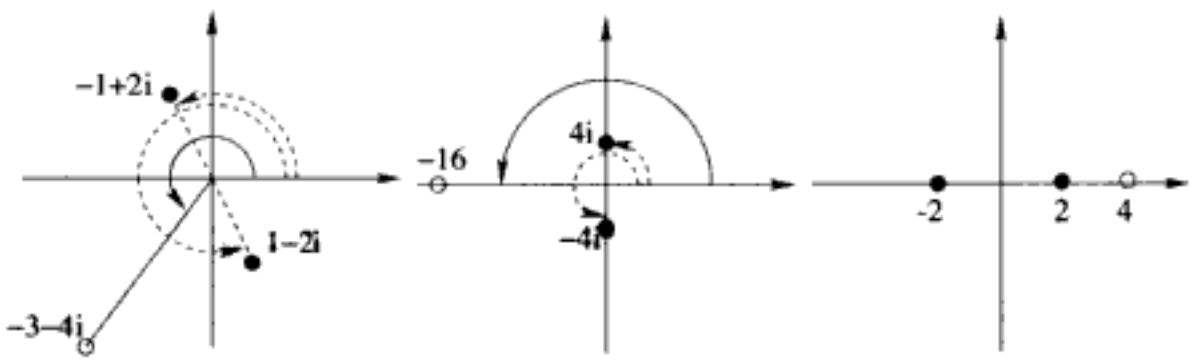


Fig. 3 Représentation dans le plan complexe des points d'affixe z (par des disques noirs « • ») et des points d'affixe Z (par des disques blancs « ∘ ») où $z^2 = Z$ avec $Z = -3 - 4i$ (dessin de gauche), $Z = -16$ (dessin du centre), $Z = 4$ (dessin de droite).

4.4.2 Calcul algébrique des racines d'un trinôme

On s'intéresse à la résolution de l'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et où a, b et c sont des complexes fixés, avec $a \neq 0$. Toute solution sera qualifiée de ***racine du trinôme*** $az^2 + bz + c$. On commence par écrire le trinôme sous sa ***forme canonique*** :

$$az^2 + bz + c = a \times \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$. On l'appelle le ***discriminant*** du trinôme (c'est un nombre complexe). En posant $Z = z + b/2a$, on a

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \times \left(Z^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Le problème de la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ se ramène au calcul des deux racines deuxièmes du nombre complexe Δ, c'est-à-dire au calcul des deux nombres complexes δ et δ' vérifiant

$$\delta^2 = \Delta \qquad \text{et} \qquad (\delta')^2 = \Delta.$$

D'après la proposition 4.7, le calcul d'une seule racine deuxième δ de Δ est suffisant car l'autre racine deuxième δ' est l'opposé de δ. Les solutions de l'équation $Z^2 = \Delta/4a^2$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ sont

$$Z_1 = \frac{\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = -\frac{\delta}{2a}.$$

Copyrighted material

On en déduit alors les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Ce sont les deux nombres complexes

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Ces deux solutions sont distinctes si $\Delta \neq 0$ et égales si $\Delta = 0$. On a

$$z_1 + z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} + \frac{-b-\delta}{2a} = -\frac{b}{a}$$
$$z_1 \times z_2 = \left(\frac{-b+\delta}{2a}\right) \times \left(\frac{-b-\delta}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

où il a été tenu compte dans le calcul de $z_1 \times z_2$ que $\delta^2 = \Delta$. Ces relations sont connues sous le nom de formules de Viète. En notant $S = z_1 + z_2$ et $P = z_1 \times z_2$, on obtient la factorisation suivante :

$$az^2 + bz + c = a\big(z^2 - Sz + P\big).$$

Proposition 4.8 *Toute équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ de la forme*

$$az^2 + bz + c = 0$$

avec a, b et c appartenant à $\mathbb{C}$, $a \neq 0$, possède pour solution les nombres complexes z_1 et z_2 définis par

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

où δ est une racine deuxième du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ (appelé le discriminant du trinôme az^2+bz+c). Si $\Delta \neq 0$ alors $z_1 \neq z_2$ (les racines sont distinctes) et si $\Delta = 0$ alors $z_1 = z_2$ (on dit que les racines sont confondues). De plus,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad et \qquad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

Lorsque les deux racines du trinôme $az^2 + bz + c$ sont confondues, on dit que le trinôme possède une racine double[6].

Remarque S'il a été établi que les deux racines deuxièmes d'un nombre complexe non nul étaient opposées, il n'y a en revanche aucune raison pour qu'en général les racines d'un trinôme $az^2 + bz + c$ le soient, comme l'illustrent les exemples suivants.

[6] On dira aussi que la racine est de multiplicité 2.

Copyrighted material

Exemples

1. Le discrimant de l'équation $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0$ est le nombre complexe

$$\Delta = (-3)^2 - 4(3 + \mathrm{i}) = -3 - 4\mathrm{i}.$$

Comme nous l'avons vu précédemment, une de ses deux racines deuxièmes est le nombre complexe $\delta = -1 + 2\mathrm{i}$ car $(-1 + 2\mathrm{i})^2 = -3 - 4\mathrm{i}$. Les deux solutions de l'équation $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0$ s'écrivent ainsi

$$z_1 = \frac{3 + (-1 + 2\mathrm{i})}{2} = 1 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 - (-1 + 2\mathrm{i})}{2} = 2 - \mathrm{i}.$$

2. Soit l'équation du second degré à coefficients réels $z^2 + 2z + 5 = 0$. Une des deux racines deuxièmes du discriminant $\Delta = -16$ est le nombre complexe imaginaire pur $\delta = 4\mathrm{i}$ car $(4\mathrm{i})^2 = -16$. Les solutions de $z^2 + 2z + 5 = 0$ s'écrivent

$$z_1 = \frac{-2 + 4\mathrm{i}}{2} = -1 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 - 4\mathrm{i}}{2} = -1 - 2\mathrm{i}.$$

Exercice 2 *1 - Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation*

$$(3 + \mathrm{i})z^2 - (8 + 6\mathrm{i})z + (25 + 5\mathrm{i}) = 0.$$

2 - On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$(\mathrm{E}) \quad z^3 - (5 + 3\mathrm{i})z^2 + (5 + 8\mathrm{i})z - 1 - 5\mathrm{i} = 0.$$

Trouver une racine évidente α *de* (E). *En déduire* a, b, c *tels que*

$$z^3 - (5 + 3\mathrm{i})z^2 + (5 + 8\mathrm{i})z - 1 - 5\mathrm{i} = (z - \alpha)(az^2 + bz + c).$$

Résoudre complètement l'équation (E).

4.4.3 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 4.7 *Soient* a *et* b *deux réels. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on appelle* **racine n-ième** *du nombre complexe* $a + \mathrm{i}b$ *tout nombre complexe* z *vérifiant :*

$$z^n = a + \mathrm{i}b.$$

En particulier, on appelle **racine n-ième de l'unité** *tout nombre complexe* z *vérifiant :*

$$z^n = 1.$$

On retrouve pour $n = 2$ la définition d'une racine deuxième ou ***racine carrée***. Une racine troisième est aussi appelée ***racine cubique***.

Copyrighted material

De toute évidence, le nombre 1 est racine n-ième de l'unité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, si n est pair alors -1 est aussi racine n-ième de l'unité puisque $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et

$$(-1)^n = (-1)^{2p} = \left((-1)^2\right)^p = 1^p = 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons les racines n-ièmes du nombre complexe $Z = a + \mathrm{i}b$, **avec a et b réels. Si Z est nul alors l'unique racine n-ième est 0. Supposons que** Z soit non nul, c'est-à-dire que $(a, b) \neq (0, 0)$. Nous commençons par écrire Z sous forme polaire : $Z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Notons z une racine n-ième de Z et considérons sa forme polaire : $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Chercher $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = Z$ équivaut à chercher le couple $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Suivant la formule de Moivre, $(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$ et on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big(r^n = \rho \quad \text{et} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \Big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \Big(r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \Big). \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.11 (voir p. 105) le nombre réel strictement positif r est déterminé de manière unique puisque ρ est un nombre réel strictement positif. Les racines n-ièmes du nombre complexe non nul $Z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ s'écrivent

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Leur module est $\sqrt[n]{\rho}$. Il est indépendant de l'indice k. De plus, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{aligned} \forall \ell \in \mathbb{Z} \quad z_{k+\ell n} &= \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2(k+\ell n)\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2(k+\ell n)\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2\ell\pi\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2\ell\pi\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) = z_k. \end{aligned}$$

Les racines n-ièmes de $Z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sont en nombre fini : il y a n racines distinctes les unes des autres. Ce sont les complexes z_0, z_1, z_2, …, z_{n-1} définis par

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Calculons maintenant la somme de ces n racines n-ièmes. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{\rho}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/n + 2k\pi/n)} = \sqrt[n]{\rho}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}.$$

Copyrighted material

Or, si $n \geqslant 2$ alors (en appliquant la deuxième formule de la proposition 4.2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n} &= 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n} + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}\right)^2 + \ldots + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}} = 0\end{aligned}$$

car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1$. On en déduit que pour $n \geqslant 2$, la somme des n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \quad \text{si} \quad n \geqslant 2.$$

Proposition 4.9 *Tout nombre complexe Z non nul possède exactement n racines n-ièmes. Elles sont distinctes deux à deux et s'écrivent*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \times \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ désignent respectivement le module et l'argument de Z. Si $n \geqslant 2$ alors

$$z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1} = 0.$$

Exemples

1. Recherchons les racines troisièmes de $Z = (\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2})/2$ sous la forme polaire $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Commençons par écrire Z sous forme polaire :

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}.$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} &\iff r^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \\ &\iff \left(r^3 = 1 \quad \text{et} \quad 3\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right) \\ &\iff \left(r = 1 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right).\end{aligned}$$

Les racines troisièmes de $Z = (\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2})/2$ sont les complexes

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, 2\},$$

c'est-à-dire $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$, $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}9\pi/12}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}17\pi/12} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}7\pi/12}$. Leurs images sont représentées sur la figure 4 (dessin de gauche).

Copyrighted material

2. Calculons les racines quatrièmes (recherchées sous la forme polaire $re^{i\varphi}$) du nombre complexe $Z = -16$. On a

$$Z = 16e^{i\pi} \quad \text{car} \quad -1 = e^{i\pi}.$$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^4 = -16 &\iff r^4 e^{i4\varphi} = 16e^{i\pi} \\ &\iff \left(r^4 = 16 \quad \text{et} \quad 4\varphi = \pi + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \right) \\ &\iff \left(r = \sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \right). \end{aligned}$$

Les racines quatrièmes de $Z = -16$ sont les nombres complexes

$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

c'est-à-dire les complexes $z_0 = 2e^{i\pi/4}$, $z_1 = 2e^{i3\pi/4}$, $z_2 = 2e^{i5\pi/4} = 2e^{-i3\pi/4}$ et $z_3 = 2e^{i7\pi/4} = 2e^{-i\pi/4}$. Les images sont représentées sur la figure 4 (dessin de droite).

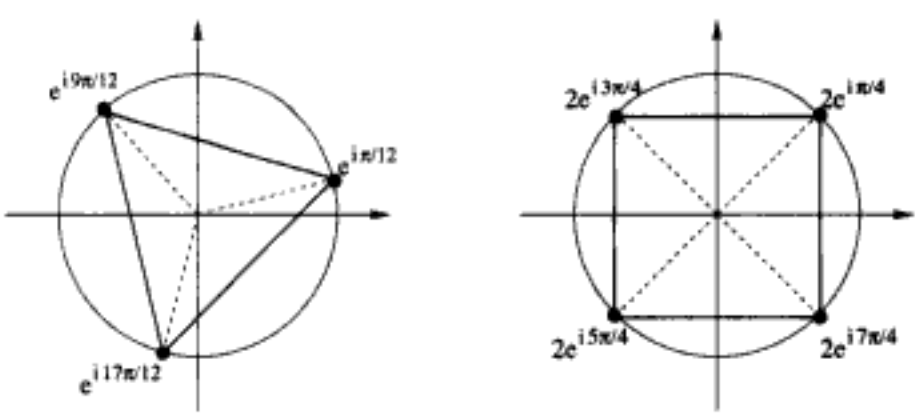


Fig. 4 Représentation dans le plan complexe des images des racines cubiques de $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})/2$ (dessin de gauche) et des racines quatrièmes de -16 (dessin de droite).

Exercice 3 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes*

1 - $z^4 + 2 = 0$,

2 - $z^2 = \dfrac{1+i}{1-i}$,

3 - $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$,

4 - $z^7 = \overline{z}$,

5 - $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^2 + \dfrac{z-i}{z+i} + 1 = 0$.

Copyrighted material

Remarque Les deux *racines deuxièmes* du nombre complexe $Z = \rho e^{i\theta}$ (avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$) s'écrivent :

$$z_0 = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_1 = \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right).$$

Elles sont distinctes et vérifient :

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right) \\ &= \sqrt{\rho}\left(-\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = -z_0. \end{aligned}$$

Nous retrouvons le résultat de la proposition 4.7, à savoir que tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines deuxièmes distinctes et opposées l'une de l'autre. Par exemple, les deux racines carrées de -16 (qui s'écrit sous la forme polaire $16e^{i\pi}$) sont

$$z_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4i \qquad \text{et} \qquad z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -4i.$$

Le résultat suivant est une conséquence directe de la proposition 4.9.

Corollaire 4.2 *Pour tout entier n non nul, il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité. Elles sont distinctes deux à deux et s'écrivent*

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \textit{avec} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

De plus, les racines n-ièmes de l'unité non réelles sont deux à deux conjuguées.

Démonstration Soit n un entier naturel non nul. Remarquons que le complexe 1 admet pour module 1 et pour argument principal 0. D'après la proposition 4.9, les n racines n-ièmes du nombre 1 s'écrivent $z_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Ainsi $z_0 = 1$ (on retrouve que 1 est une racine n-ième de l'unité). En particulier, si n est un entier naturel pair, c'est-à-dire si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, alors la racine n-ième de l'unité correspondant à l'indice p est -1 puisque

$$z_p = \cos\frac{2p\pi}{2p} + i\sin\frac{2p\pi}{2p} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

On a aussi $z_0 = z_n$, et pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$z_{n-k} = \cos\frac{2(n-k)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n} = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} = \overline{z_k}.$$

Ainsi, pour tout k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, le nombre complexe z_{n-k} est le conjugué de z_k. En particulier, 1 est son propre conjugué et si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire si n est pair) alors -1 est aussi son propre conjugué. □

Copyrighted material

Exemples

1. Les racines cubiques de l'unité sont les complexes

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3} \quad \text{avec} \quad k \in \{0,1,2\},$$

c'est-à-dire $z_0 = 1$, $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3} = \mathrm{j}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3} = \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$. La racine $z_0 = 1$ est son propre conjugué. Les deux racines z_1 et z_2 sont conjuguées l'une de l'autre. Leurs images sont représentées sur la figure 5 (dessin de gauche).

2. Les racines quatrièmes de l'unité sont les complexes

$$z_k = \cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2} \quad \text{avec} \quad k \in \{0,1,2,3\},$$

c'est-à-dire $z_0 = 1$, $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ et $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2} = -\mathrm{i}$. La racine $z_0 = 1$ est son propre conjugué. De même, la racine $z_2 = -1$ est son propre conjugué. Les deux racines restantes sont conjuguées l'une de l'autre :

$$z_3 = -\mathrm{i} = \bar{\mathrm{i}} = \overline{z_1}.$$

Leurs images sont représentées sur la figure 5 (dessin du milieu).

3. Les racines cinquièmes de l'unité sont données par

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{5} \quad \text{avec} \quad k \in \{0,1,2,3,4\},$$

c'est-à-dire $z_0 = 1$, $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5}$, $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/5}$,

$$z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}6\pi/5} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi/5} \quad \text{et} \quad z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}8\pi/5} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/5}.$$

À l'exception de la racine $z_0 = 1$ qui est son propre conjugué, les autres racines sont conjuguées deux à deux :

$$z_4 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/5} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5}} = \overline{z_1} \qquad \text{et} \qquad z_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi/5} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/5}} = \overline{z_2}.$$

Leurs images sont représentées sur la figure 5 (dessin de droite).

Exercice 4 *Soient* $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$|\lambda| = 1 \qquad \textit{et} \qquad \lambda \neq -1.$$

1 - Vérifier que : $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$.

2 - Montrer que : $\dfrac{\mathrm{i}(1-\lambda)}{\lambda+1} = \dfrac{\mathrm{Im}\,(\lambda)}{1+\mathrm{Re}\,(\lambda)}$.

3 - En déduire les complexes z *solutions de* $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^n = \dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha}$.

Copyrighted material

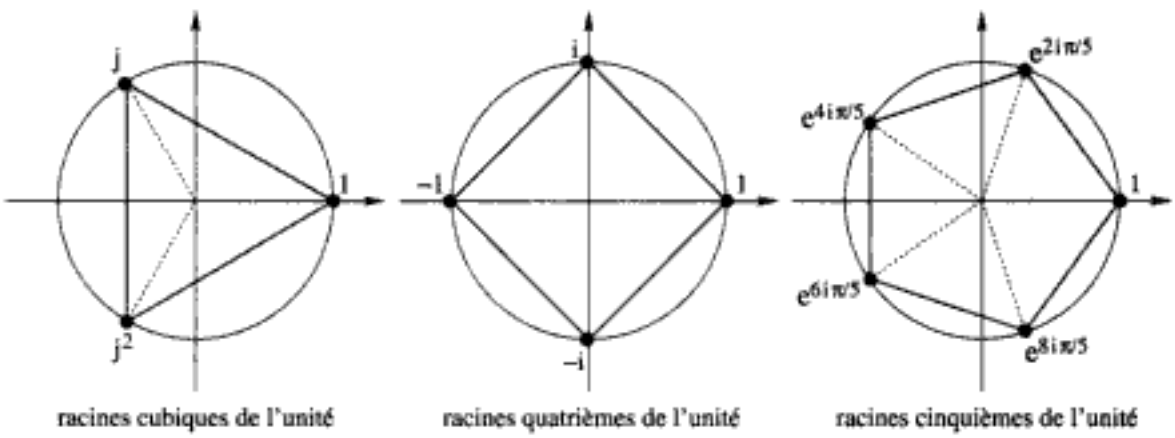


Fig. 5 Représentation dans le plan complexe des images des racines cubiques de l'unité (dessin de gauche), des racines quatrièmes de l'unité (dessin du centre) et des racines cinquièmes de l'unité (dessin de droite).

Racine n-ième primitive de l'unité

Soient $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité. D'après la formule de Moivre, on peut écrire pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = (\omega_n)^k$$

où le nombre complexe non nul ω_n est défini par

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Il est qualifié de ***racine n-ième primitive de l'unité***. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, chacune des racines n-ièmes de l'unité s'écrit comme une puissance de la racine primitive ω_n. En particulier, une racine cubique primitive de l'unité est le nombre complexe j défini par $\mathrm{j} = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2$ (voir l'exercice 1) et une racine quatrième primitive de l'unité est l'unité imaginaire i. Notons $\mathbb{U}_n$ l'ensemble constitué des racines n-ièmes de l'unité. D'après ce qui précède,

$$\mathbb{U}_n = \left\{(\omega_n)^k \;\middle|\; k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}.$$

Par exemple, $\mathbb{U}_1 = \{1\}$, $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$, $\mathbb{U}_4 = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$ et

$$\mathbb{U}_5 = \left\{1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/5}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\pi/5}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/5}\right\}.$$

Soient $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ les points du plan complexe, d'affixes respectives $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Il est clair que ces points sont disposés sur le cercle unité du plan complexe (c'est-à-dire sur le cercle de rayon 1 et d'origine O) et que

Copyrighted material

les angles orientés $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1})$, $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$, ..., $(\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_0})$ ont tous $2\pi/n$ pour mesure. Cela signifie que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, le point M_k s'obtient à partir du point M_{k-1} en effectuant une rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$, le point M_0 étant le point d'affixe 1. Par conséquent, les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ sont les n sommets d'un polygône régulier de n cotés inscrit dans le cercle unité et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1. Nous en donnons des illlustrations pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$ sur la figure 5.

Exercice 5 *Soit n un entier naturel non nul. On note $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité.*

1 - Calculer $S_q = \sum_{k=0}^{n-1} (z_k)^q$ pour tout entier naturel q.

2 - Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}\right)^n = n(z^n + 1).$$

4.5 Application à la trigonométrie

4.5.1 Rappels des formules de trigonométrie

Commençons par donner, lorsque cela est possible, les valeurs de

$$\cos a, \quad \sin a, \quad \tan a = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad \operatorname{cotan} a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

en quelques valeurs particulières de a :

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	IND
cotan	IND	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

où « IND » signifie « indéfinie ».

Relations entre les fonctions cos, sin, tan

Rappelons la relation fondamentale de la trigonométrie :

$$\boxed{\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \qquad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.}$$

Copyrighted material

On en déduit les deux relations suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} 1+\tan^2 a &= \frac{1}{\cos^2 a} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ 1+\operatorname{cotan}^2 a &= \frac{1}{\sin^2 a} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}}$$

La première relation (respectivement la deuxième relation) donnée ci-dessus se déduit de relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ en divisant, sous réserve que cela ait un sens, par $\cos^2 a$ (resp. par $\sin^2 a$).

Addition des arcs

On a pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ les quatre relations suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b,\\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b,\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b,\\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b. \end{aligned}}$$

Remarquons que la deuxième (respectivement la quatrième) de ces quatre égalités se déduit de la première (resp. de la troisième) en remplaçant b par $-b$. On en déduit pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a+b \neq \pi/2 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, que

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\cos a\cos b - \sin a\sin b}.$$

En divisant numérateur et dénominateur par $\cos a\cos b$, on obtient

$$\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b} \quad \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a,b,a+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.}$$

En remplaçant b par $-b$, on a

$$\boxed{\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b} \quad \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a,b,a-b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.}$$

Doublement des arcs

En prenant b égal à a dans les égalités précédentes, on retrouve les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \quad \text{avec } a\in\mathbb{R},\\ \sin(2a) &= 2\cos a\sin a \quad \text{avec } a\in\mathbb{R},\\ \tan(2a) &= \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \quad \text{avec } a\in\mathbb{R} \text{ et } a \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}}$$

Copyrighted material

Remarques

1. En utilisant que $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on déduit de $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ les deux relations suivantes valables pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{1+\cos(2a)}{2} = \cos^2 a \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(2a)}{2} = \sin^2 a.}$$

2. En utilisant la relation $1+\tan^2 a = 1/\cos^2 a$, qui est valable pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a les égalités

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 a} - 1 = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a},$$

et

$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a = 2\cos^2 a \times \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}.$$

En résumé, pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\cos(2a) = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a} \quad \text{et} \quad \sin(2a) = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}.}$$

Transformations trigonométriques

Les formules suivantes se déduisent immédiatement des quatre formules fondamentales données plus haut (voir addition des arcs). Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\begin{aligned} 2\cos a \times \cos b &= \cos(a+b) + \cos(a-b), \\ 2\sin a \times \sin b &= \cos(a-b) - \cos(a+b), \\ 2\sin a \times \cos b &= \sin(a+b) + \sin(a-b). \end{aligned}}$$

En posant $A = a+b$ et $B = a-b$, c'est-à-dire $a = (A+B)/2$ et $b = (A-B)/2$, on trouve pour tout $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2\sin\Big(\frac{A+B}{2}\Big) \times \cos\Big(\frac{A-B}{2}\Big), \\ \sin A - \sin B &= 2\sin\Big(\frac{A-B}{2}\Big) \times \cos\Big(\frac{A+B}{2}\Big), \\ \cos A + \cos B &= 2\cos\Big(\frac{A+B}{2}\Big) \times \cos\Big(\frac{A-B}{2}\Big), \\ \cos A - \cos B &= -2\sin\Big(\frac{A+B}{2}\Big) \times \sin\Big(\frac{A-B}{2}\Big). \end{aligned}}$$

Copyrighted material

4.5.2 Développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel θ, on peut écrire $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme des sommes de puissances de $\cos\theta$ et/ou de $\sin\theta$. La méthode consiste à utiliser la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton :

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = \Big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^k\theta\,(\mathrm{i}\sin\theta)^{n-k}.$$

On a ainsi l'égalité

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{i}^{n-k} \cos^k\theta \sin^{n-k}\theta. \tag{7}$$

Pour obtenir l'expression de $\cos(n\theta)$ (respectivement de $\sin(n\theta)$) comme une somme de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, on identifie les parties réelles (resp. les parties imaginaires) dans l'égalité (7).

Exemple En utilisant la méthode proposée, développons $\cos(3\theta)$ (respectivement $\sin(3\theta)$) comme une somme de puissances de $\cos\theta$ (resp. de $\sin\theta$). Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta) &= \Big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\Big)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k \cos^k\theta\,(\mathrm{i}\sin\theta)^{3-k} \\
&= \mathrm{i}^3\sin^3\theta + 3\mathrm{i}^2\cos\theta\sin^2\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta + \cos^3\theta \\
&= -\mathrm{i}\sin^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta + \cos^3\theta \\
&= -3\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta + \mathrm{i}\big(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\big).
\end{aligned}$$

Identifions à présent les parties réelles et les parties imaginaires. On obtient

$$\cos(3\theta) = -3\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

En utilisant la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on obtient :

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta.$$

Exercice 6 *En utilisant la méthode proposée, vérifier que pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta,$$

$$\sin(5\theta) = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta.$$

Remarque Pour obtenir l'expression de $\tan(n\theta)$ comme une somme de puissances de $\tan\theta$, on écrit (sous réserve que cela ait un sens) :

$$\tan(n\theta) = \frac{\sin(n\theta)/\cos^n\theta}{\cos(n\theta)/\cos^n\theta}$$

Copyrighted material

et on utilise les développements de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme des sommes de puissances, respectivement, de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$, et la relation $1+\tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$.

Exemple Développons $\tan(3\theta)$ comme une somme de puissances de $\tan\theta$. On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\tan(3\theta) &= \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \frac{\sin(3\theta)/\cos^3\theta}{\cos(3\theta)/\cos^3\theta} = \frac{(-4\sin^3\theta + 3\sin\theta)/\cos^3\theta}{(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)/\cos^3\theta} \\ &= \frac{-4\tan^3\theta + 3\tan\theta/\cos^2\theta}{4 - 3/\cos^2\theta}.\end{aligned}$$

En utilisant la relation $1+\tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$, valable pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$\tan(3\theta) = \frac{-\tan^3\theta + 3\tan\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ et $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4.5.3 Linéarisation de $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel θ, on peut écrire $\cos^n\theta$ (respectivement $\sin^n\theta$) comme des sommes de termes de la forme $\cos(m\theta)$ (respectivement de la forme $\sin(m\theta)$) avec m un entier naturel tel que $m \leqslant n$. La méthode consiste à utiliser la formule d'Euler et celle du binôme de Newton. Par exemple,

$$\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(n-k)\theta} e^{-ik\theta}.$$

On a ainsi l'égalité

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(n-2k)\theta}. \tag{8}$$

On regroupe alors dans l'égalité (8) les termes en partant des extrêmes pour faire apparaître des éléments de la forme $e^{im\theta} + e^{-im\theta}$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \leqslant n$. Utilisant à nouveau la formule d'Euler, on a

$$e^{im\theta} + e^{-im\theta} = 2\cos(m\theta).$$

On procède suivant une méthode analogue pour $\sin^n\theta$.

Copyrighted material

Exemples

1. Linéarisons $\cos^4\theta$ en utilisant la méthode proposée. On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos^4\theta = \Big(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\Big)^4 = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4} C_4^k e^{i(4-k)\theta}e^{-ik\theta} = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4} C_4^k e^{i(4-2k)\theta}$$
$$= \frac{1}{16}\left(C_4^0 e^{i4\theta} + C_4^1 e^{i2\theta} + C_4^2 + C_4^3 e^{-i2\theta} + C_4^4 e^{-i4\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\Big(\underbrace{\left(e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}\right)}_{=2\cos(4\theta)} + 4\underbrace{\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)}_{=2\cos(2\theta)} + 6\Big) = \frac{1}{8}\left(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right).$$

On aurait pu procéder directement comme suit (car le degré ici 4 est petit) :

$$\cos^4\theta = \Big(\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}\Big(\cos^2(2\theta) + 2\cos(2\theta) + 1\Big)$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\frac{\cos(4\theta)+1}{2} + 2\cos(2\theta) + 1\Big) = \frac{1}{8}\left(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right).$$

2. Linéarisons à présent $\cos^{2p}\theta$. Pour tout entier non nul p et pour tout réel θ,

$$\cos^{2p}\theta = \Big(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\Big)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2p}.$$

Utilisons à présent la formule du binôme de Newton. On a

$$\cos^{2p}\theta = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k e^{i(2p-k)\theta}e^{-ik\theta} = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k e^{i(2p-2k)\theta}$$
$$= \frac{1}{2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k e^{i(2p-2k)\theta} + C_{2p}^p + \sum_{k=p+1}^{2p} C_{2p}^k e^{i(2p-2k)\theta}\right).$$

Effectuons le changement d'indice $k' = 2p-k$ dans la dernière somme. On a

$$\sum_{k=p+1}^{2p} C_{2p}^k e^{i(2p-2k)\theta} = \sum_{k'=0}^{p-1} \underbrace{C_{2p}^{2p-k'}}_{=C_{2p}^{k'}} e^{i(2k'-2p)\theta}.$$

La variable k' étant muette, nous la remplaçons par k. On obtient

$$\cos^{2p}\theta = \frac{1}{2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k e^{i(2p-2k)\theta} + C_{2p}^p + \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k e^{i(2k-2p)\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k \underbrace{\left(e^{i(2p-2k)\theta}+e^{-i(2p-2k)\theta}\right)}_{=2\cos\left((2p-2k)\theta\right)} + C_{2p}^p\right)$$
$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\left(\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k \cos\left((2p-2k)\theta\right) + \frac{1}{2}C_{2p}^p\right).$$

Copyrighted material

Exercice 7 *1 - Soit θ un réel. Linéariser $\cos^5\theta$ et $\sin^5\theta$.*
2 - Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos^{2p+1}\theta = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{k} \cos\big((2p+1-2k)\theta\big).$$

3 - Montrer que $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{2p+1}\theta = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2p+1}^{k} \sin\big((2p+1-2k)\theta\big).$$

4.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - On vérifie que : $\left|\mathrm{j}\right|^2 = \mathrm{j} \times \bar{\mathrm{j}} = 1$, d'où $\bar{\mathrm{j}} = 1/\mathrm{j}$. On a

$$\mathrm{j}^2 = (-1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2)^2 = -1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3}/2 = \bar{\mathrm{j}}.$$

2 - De l'égalité $\mathrm{j}^2 = 1/\mathrm{j}$, on déduit $\mathrm{j}^3 = 1$. De l'égalité $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$, il vient

$$1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 1 + \mathrm{j} + \bar{\mathrm{j}} = 1 + 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{j}) = 1 + 2 \times (-1/2) = 0.$$

Solution de l'exercice 2

1 - Le discriminant Δ du trinôme $(3+\mathrm{i})z^2 - (8+6\mathrm{i})z + (25+5\mathrm{i})$ vaut $-252-64\mathrm{i}$. Ses deux racines deuxièmes s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -252 \\ 2xy = -64 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-252)^2 + (-64)^2} = 260 \end{cases}$$

dont on déduit $x^2 = 4$ et $y^2 = 256$, d'où $x = \pm 2$ et $y = \pm 16$. Seuls les couples $(2, -16)$ et $(-2, 16)$ vérifient l'égalité $2xy = -64$. Une racine deuxième de Δ est $2 - 16\mathrm{i}$. Les racines du trinôme $(3+\mathrm{i})z^2 - (8+6\mathrm{i})z + (25+5\mathrm{i})$ sont donc :

$$z_1 = (5-5\mathrm{i})/(3+\mathrm{i}) = 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = (3+11\mathrm{i})/(3+\mathrm{i}) = 2 + 3\mathrm{i}.$$

2 - Une racine évidente est 1. On peut alors factoriser par $(z-1)$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que

$$z^3 - (5+3\mathrm{i})z^2 + (5+8\mathrm{i})z - 1 - 5\mathrm{i} = (z-1)(az^2 + bz + c).$$

Copyrighted material

En développant l'expression de droite, puis en identifiant les monômes de même degré, on obtient $a = 1$, $b = -4 - 3\mathrm{i}$ et $c = 1 + 5\mathrm{i}$, d'où

$$z^3 - (5+3\mathrm{i})z^2 + (5+8\mathrm{i})z - 1 - 5\mathrm{i} = (z-1)(z^2 - (4+3\mathrm{i})z + 1 + 5\mathrm{i}).$$

Le discriminant Δ du trinôme $z^2 - (4+3\mathrm{i})z + 1 + 5\mathrm{i}$ vaut $3 + 4\mathrm{i}$ et une de ses racines deuxièmes est $2 + \mathrm{i}$. Les racines du trinôme $z^2 - (4+3\mathrm{i})z + 1 + 5\mathrm{i}$ sont donc $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 + \mathrm{i}$. L'ensemble constitué des racines du polynôme de degré 3 est

$$\mathcal{S} = \{1, 3+2\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}\}.$$

Solution de l'exercice 3

1 - Les solutions de l'équation $z^4 + 2 = 0$ sont les complexes

$$z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right) \quad \text{avec} \quad k \in \{0,1,2,3\},$$

c'est-à-dire $z_0 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $z_1 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$, $z_2 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}$ et $z_3 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/4}$

2 - On vérifie que

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \times \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $z^2 = (1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i})$ sont les racines deuxièmes de l'unité imaginaire, c'est-à-dire les deux complexes opposés

$$z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \qquad \text{et} \qquad z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+\pi)} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}.$$

3 - En posant $u = z^3$, résoudre $z^6 - (1-\mathrm{i})z^3 - \mathrm{i} = 0$ revient à trouver u tel que $u^2 - (1-\mathrm{i})u - \mathrm{i} = 0$. Le discriminant Δ du trinôme $u^2 - (1-\mathrm{i})u - \mathrm{i}$ vaut $2\mathrm{i}$ et une de ses racines deuxièmes est $1 + \mathrm{i}$. Les deux solutions du trinôme $u^2 - (1-\mathrm{i})u - \mathrm{i}$ sont $u = 1$ et $u' = -\mathrm{i}$. Notons $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des racines de $z^3 = 1$ et $\mathcal{S}_2$ celui des racines de $z^3 = -\mathrm{i}$:

$$\mathcal{S}_1 = \mathbb{U}_3 = \left\{1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_2 = \left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6}\right\}.$$

On en déduit l'ensemble des racines du polynôme de degré 6 :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \left\{1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6}\right\}.$$

4 - Il est clair que 0 est une racine évidente de l'équation $z^7 = \overline{z}$. Cherchons à présent z sous la forme polaire $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\overline{z} = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et, d'après la formule de Moivre, $z^7 = \rho^7\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\theta}$. On a alors les équivalences suivantes

$$z^7 = \overline{z} \iff \rho^7\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\theta} = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \iff \left(\rho = 1 \quad \text{et} \quad \theta = k\pi/4 \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right).$$

L'ensemble des solutions s'écrit $\mathcal{S} = \{0\} \cup \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/4} \mid k \in \{0,1,\ldots,7\}\right\}$.

Copyrighted material

5 - En posant $u = (z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$, on a

$$\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} + 1 = 0 \iff u^3 + u^2 + u + 1 = 0.$$

On doit résoudre : $u^3 + u^2 + u + 1 = 0$ qui s'écrit aussi $(u+1)(u^2+1) = 0$. Les racines sont $\{-1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. De $u = (z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$, on obtient

$$z = \mathrm{i}(1+u)/(1-u).$$

On déduit $z = 0$ de $u = -1$, $z = -1$ de $u = \mathrm{i}$ et $z = 1$ de $u = -\mathrm{i}$. L'ensemble des solutions s'écrit

$$\mathcal{S} = \{0, -1, 1\}.$$

Solution de l'exercice 4

1 - On a : $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha}{\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$.

2 - On a : $\dfrac{\mathrm{i}(1-\lambda)}{\lambda+1} = \dfrac{\mathrm{i}(1-\lambda)(1+\overline{\lambda})}{(\lambda+1)(1+\overline{\lambda})} = \dfrac{\mathrm{Im}(\lambda)}{1+\mathrm{Re}(\lambda)}$.

3 - En posant $u = \dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ et d'après le résultat établi à la première question,

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^n = \frac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha} \iff u^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha}.$$

Les solutions de $u^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha}$ s'écrivent $u_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$. De

$$(1+\mathrm{i}z_k)/(1-\mathrm{i}z_k) = u_k,$$

il vient

$$z_k = \mathrm{i}(1-u_k)/(u_k+1).$$

Puis on déduit de la deuxième question

$$z_k = \frac{\mathrm{Im}(u_k)}{1+\mathrm{Re}(u_k)} = \frac{\sin\left(\frac{2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}{1+\cos\left(\frac{2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Solution de l'exercice 5

On a $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

1 - On suppose dans un premier temps que q est multiple de n, c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $q = \ell n$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ on a $(z_k)^q = (z_k)^{\ell n} = ((z_k)^n)^\ell = 1^\ell = 1$. On en déduit

$$S_q = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ fois}} = n.$$

Copyrighted material

On suppose maintenant que q n'est pas multiple de n. Puisque $e^{i2k\pi q/n} \neq 1$,

$$S_q = \sum_{k=0}^{n-1} (z_k)^q = 1 + e^{i2\pi q/n} + \ldots + \left(e^{i2\pi q/n}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(e^{i2k\pi q/n}\right)^n}{1 - e^{i2k\pi q/n}} = 0.$$

En résumé,

$$S_q = \sum_{k=0}^{n-1} (z_k)^q = \begin{cases} n & \text{si } q \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2 - Grâce à la formule du binôme de Newton, on a

$$\left(z + e^{i2k\pi/n}\right)^n = \sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell z^{n-\ell} \left(e^{i2k\pi/n}\right)^\ell.$$

On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i2k\pi/n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell z^{n-\ell} \left(e^{i2k\pi/n}\right)^\ell \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^\ell z^{n-\ell} \left(e^{i2k\pi/n}\right)^\ell \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \left(C_n^\ell z^{n-\ell} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i2k\pi/n}\right)^\ell \right) = \sum_{\ell=0}^{n} \left(C_n^\ell z^{n-\ell} S_\ell \right) \\ &= C_n^0 z^n S_0 + C_n^1 z^{n-1} S_1 + \ldots + C_n^{n-1} z^1 S_{n-1} + C_n^n z^0 S_n. \end{aligned}$$

Or $S_0 = n$, $S_n = n$ (car 0 et n sont multiples de n) et $S_1 = \ldots = S_{n-1} = 0$. Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i2k\pi/n}\right)^n = C_n^0 z^n S_0 + C_n^n S_n = n(z^n + 1).$$

Solution de l'exercice 6

D'après la formule de Moivre et celle du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} \cos 5\theta + i \sin 5\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^5 \\ &= i\sin^5\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ &\quad -10i\cos^2\theta\sin^3\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta + \cos^5\theta \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ &\quad +i\left(\sin^5\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos^4\theta\sin\theta\right). \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta,$$

Copyrighted material

$$\sin 5\theta = \sin^5\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos^4\theta\sin\theta.$$

En utilisant la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on obtient :

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta,$$

$$\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta.$$

Solution de l'exercice 7

1 - D'après les formules d'Euler et en développant grâce à celle du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos^5\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}(\cos(5\theta)+5\cos(3\theta)+10\cos\theta),\\ \sin^5\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{16}(\sin(5\theta)-5\sin(3\theta)+10\sin\theta).\end{aligned}$$

2 - D'après les formules d'Euler, on a $\cos^{2p+1}(\theta) = \left((e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2\right)^{2p+1}$. Ainsi, en utilisant la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}\cos^{2p+1}(\theta) &= \frac{1}{2^{2p+1}}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2p+1} = \frac{1}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)\theta}\\ &= \frac{1}{2^{2p+1}}\left(\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)\theta} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)\theta}\right).\end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $k' = 2p+1-k$ dans la dernière somme, on a :

$$\begin{aligned}\cos^{2p+1}(\theta) &= \frac{1}{2^{2p+1}}\left(\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^k e^{i(2p+1-2k)\theta} + \sum_{k'=0}^{p} C_{2p+1}^{2p+1-k'} e^{i(2k'-(2p+1))\theta}\right)\\ &= \frac{1}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^k \Big(\underbrace{e^{i(2p+1-2k)\theta}+e^{-i(2p+1-2k)\theta}}_{=2\cos\left((2p+1-2k)\theta\right)}\Big)\\ &= \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^k \cos\left((2p+1-2k)\theta\right).\end{aligned}$$

3 - D'après les formules d'Euler, on a $\sin^{2p+1}(\theta) = \left((e^{i\theta}-e^{-i\theta})/2i\right)^{2p+1}$. Ainsi, en utilisant la formule du binôme de Newton, on a

$$\sin^{2p+1}(\theta) = \frac{1}{(2i)^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^k e^{i(2p+1-2k)\theta}$$

$$= \frac{1}{(2i)^{2p+1}}\left(\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^k (-1)^k e^{i(2p+1-2k)\theta} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^k e^{i(2p+1-2k)\theta}\right).$$

Copyrighted material

Effectuons le changement de variable $k' = 2p+1-k$ dans la dernière somme. On a

$$\sum_{k=p+1}^{2p+1} C_{2p+1}^{k}(-1)^k e^{i(2p+1-2k)\theta} = \sum_{k'=0}^{p} \underbrace{C_{2p+1}^{2p+1-k'}}_{=C_{2p+1}^{k'}} \underbrace{(-1)^{2p+1-k'}}_{=(-1)^{k'+1}} e^{-i(2p+1-2k')\theta}.$$

La variable k' étant muette, on la remplace par k. On en déduit

$$\begin{aligned}\sin^{2p+1}(\theta) &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{k}(-1)^k \underbrace{\left(e^{i(2p+1-2k)\theta} - e^{-i(2p+1-2k)\theta}\right)}_{=2i\sin\left((2p+1-2k)\theta\right)} \\ &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{k}(-1)^k \sin\left((2p+1-2k)\theta\right)\end{aligned}$$

car

$$\frac{2i}{(2i)^{2p+1}} = \frac{1}{(2i)^{2p}} = \frac{1}{2^{2p}i^{2p}} = \frac{1}{2^{2p}(i^2)^p} = \frac{1}{2^{2p}(-1)^p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}.$$

Copyrighted material

Copyrighted material

CHAPITRE 5

Suites numériques

5.1 Définitions et généralités

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des scalaires. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ le symbole $|\ |$ désigne la valeur absolue d'un réel. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ le symbole $|\ |$ désigne le module d'un complexe. Une ***suite numérique*** est une application d'un sous-ensemble infini $\mathbb{N}_1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. Au lieu de la noter

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_1 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

on la note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ où $u_n = u(n)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on parle de ***suite réelle*** et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on parle de ***suite complexe***. Si k est un entier, le terme u_k est appelé ***terme de rang*** k de la suite numérique $(u_n)_n$. On dit encore que $(u_n)_n$ est la suite de ***terme général*** u_n.

On appelle ***suite stationnaire*** une suite dont les termes sont constants à partir d'un certain rang. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est à termes positifs (resp. négatifs) si pour tout entier $n \in \mathbb{N}_1$ on a $u_n \geqslant 0$ (resp. $u_n \leqslant 0$).

Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{K}$. On dit que la suite numérique $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de A si pour tout entier $n \in \mathbb{N}_1$ on a $u_n \in A$.

Une suite n'est pas nécessairement définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Toutefois afin de simplifier l'exposé, nous ne considérerons que des suites définies sur $\mathbb{N}$. Il sera aisé d'adapter les énoncés aux cas de suites définies sur un sous-ensemble infini $\mathbb{N}_1$ de $\mathbb{N}$.

Exemples

1. La suite de terme général $1/n$ est une suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$.

2. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ dont les termes de rang pair valent 1 et ceux de rang impair -1.

3. La suite de terme général $u_n = \cos(n\pi/4) + \mathrm{i}\sin(n\pi/4)$ est une suite complexe définie sur $\mathbb{N}$.

4. La suite de terme général $u_n = (\mathrm{i}/n)^n$ est une suite complexe définie sur $\mathbb{N}^*$.

5. La suite de terme général $\sqrt{n-4}$ est une suite réelle définie sur l'ensemble $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 4\}$.

Copyrighted material

On dit que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont égales si pour tout entier n on a $u_n = v_n$. Par exemple les suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.

Une suite peut être définie par la donnée du terme de rang 0 et d'une relation de récurrence liant des termes consécutifs. On parle alors de ***suite récurrente*** ou de suite définie par récurrence. Par exemple la suite $(u_n)_n$ définie par les relations : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + u_n/2$ est une suite récurrente.

5.1.1 Convergence d'une suite numérique

Définition 5.1 ✗ *On dit que la suite numérique $(u_n)_n$* ***converge*** *vers le scalaire ℓ (ou qu'elle tend vers $\ell \in \mathbb{K}$) si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Le scalaire ℓ est appelé **limite de la suite**.

✗ *On dit que la suite numérique $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{K}$ s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Autrement dit, la suite $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{K}$ si*

$$\exists \ell \in \mathbb{K} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

✗ *On dit que la suite numérique $(u_n)_n$* **diverge** *si elle ne converge pas. Autrement dit, la suite $(u_n)_n$ diverge si*

$$\forall \ell \in \mathbb{K} \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \quad \text{et} \quad |u_n - \ell| > \varepsilon).$$

Remarques

1. L'assertion $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$ définissant la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ s'interprète ainsi : une fois un réel ε strictement positif fixé, on peut trouver un entier N à partir duquel tous les termes de rang supérieur à N sont à une « distance » de ℓ inférieure à ε. On peut donc trouver un rang à partir duquel les valeurs de la suite sont arbitrairement proches de ℓ.

2. On ne modifie pas la *nature d'une suite* (le fait qu'elle converge ou diverge) ni la valeur de sa limite si on modifie ses termes jusqu'à un rang donné.

3. Si la suite réelle $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors le réel ℓ est un point d'adhérence de l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ puisque pour tout intervalle centré en ℓ de la forme $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ avec $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ contient tous les termes de la suite à partir du rang N.

Exercice 1 *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que le réel a est un point adhérent à A si et seulement si il existe une suite réelle $(x_n)_n$ d'éléments de A (ie : $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in A$) qui converge vers a.*[(1)]

Copyrighted material

Proposition 5.1 *Si la suite numérique $(u_n)_n$ converge, la limite de la suite est unique. On la note $\lim_{n\to+\infty} u_n$.*

Démonstration Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes. Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_2 - \ell_1|$. On a $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et d'après la définition 5.1,

$$\begin{aligned} & \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon) \\ \text{et} \quad & \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_2 \Longrightarrow |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon). \end{aligned}$$

Notons $N = \max\{N_1, N_2\}$. En utilisant la première inégalité triangulaire, voir la proposition 3.7, on obtient

$$|\ell_2 - \ell_1| \leqslant |\ell_2 - u_N| + |u_N - \ell_1| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_2 - \ell_1|$$

ce qui est absurde puisque $1 > 2/3$. Si la suite numérique $(u_n)_n$ converge, la limite de la suite est alors nécessairement unique. □

Proposition 5.2 *Si une suite réelle à termes positifs converge, sa limite est un réel positif.*

Démonstration Considérons une suite $(u_n)_n$ à termes positifs qui converge vers un réel ℓ. Autrement dit, supposons que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon). \tag{1}$$

Pour montrer que le réel ℓ est nécessairement positif, raisonnons par l'absurde. Si on suppose que ℓ est strictement négatif, on établit en prenant $\varepsilon = |\ell|/2$ dans la relation (1) (on a bien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$) l'existence d'un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N,

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2}.$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur à N,

$$\frac{\ell}{2} \leqslant u_n - \ell \leqslant -\frac{\ell}{2}.$$

Ceci implique que $u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2} < 0$ ce qui est impossible puisque la suite $(u_n)_n$ est à termes positifs. Le réel ℓ est donc nécessairement positif. □

(1) Indication : on rappelle que le réel a est un point adhérent à A si tout intervalle ouvert de centre a contient au moins un élément de A, autrement dit si

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad x \in]a - \eta, a + \eta[.$$

Copyrighted material

Remarque On démontrerait de même que si une suite réelle à termes négatifs converge, sa limite est un réel négatif. Par contre, on prendra garde que si une suite réelle à termes *strictement* positifs converge, sa limite n'est pas nécessairement un réel *strictement* positif. Par exemple la suite de terme général $1/n$ est une suite à termes strictement positifs qui converge vers 0 (qui n'est pas strictement positif).

Exercice 2 *Montrer que si une suite réelle converge vers un réel strictement positif alors tous les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang. (Indication : s'inspirer de la démonstration ci-dessus.)*

Exemples

1. La suite de terme général $1/n$ converge vers 0. En effet, considérons un réel ε strictement positif quelconque et notons $N = E(1/\varepsilon)+1$. On a pour tout entier n supérieur à N,

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon.$$

2. Considérons la suite de terme général $(-1)^n$. L'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a deux points d'adhérence 1 et -1. Si la suite converge, elle ne peut donc avoir pour limite que 1 ou -1. La suite ne converge pas vers -1. En effet prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \text{l'entier } n = 2N \text{ vérifie} \quad (n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| = 2 > \varepsilon).$$

Elle ne converge pas non plus vers 1. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \text{l'entier } n = 2N + 1 \text{ vérifie} \quad (n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| = 2 > \varepsilon).$$

Puisqu'aucun des points d'adhérence de l'ensemble U n'est limite, on en déduit que la suite diverge.

3. Considérons la suite de terme général $u_n = n$. Remarquons que d'après la proposition 5.2, si cette suite converge, sa limite est nécessairement un réel positif. Montrons que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers aucun réel positif, c'est-à-dire montrons que

$$\forall \ell \in \mathbb{R}_+ \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon).$$

Soit $\ell \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon = 1$. Pour tout entier N considérons l'entier $n = N + E(\ell) + 2$. On a $n \geqslant N$ et

$$|u_n - \ell| = |n - \ell| = |N + E(\ell) + 2 - \ell| > |N + 1| \geqslant 1 = \varepsilon.$$

On peut donc conclure que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 3 *En utilisant la définition 5.1 déterminer la nature des suites dont le terme général est* $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $(\mathrm{i})^n$, n^2.

Copyrighted material

Proposition 5.3 *Si la suite numérique $(u_n)_n$ converge vers le scalaire ℓ, alors la suite réelle de terme général $|u_n|$ converge vers le réel $|\ell| \in \mathbb{R}_+$.*

Démonstration Supposons que la suite numérique $(u_n)_n$ converge vers le scalaire ℓ, c'est-à-dire supposons que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

D'après la deuxième inégalité triangulaire on a

$$\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|.$$

On en déduit que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow \big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant \varepsilon)$$

c'est-à-dire que la suite numérique de terme général $|u_n|$ converge vers $|\ell|$. □

ATTENTION En général, on ne peut rien conclure sur la nature de la suite de terme général u_n à partir de la nature de la suite de terme général $|u_n|$. Considérons la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. La suite de terme général $|u_n|$ converge vers 1 mais la suite $(u_n)_n$ diverge. Dans le cas où la suite converge vers 0 on a toutefois le résultat suivant.

Proposition 5.4 *La suite numérique $(u_n)_n$ converge vers 0 si et seulement si la suite réelle de terme général $|u_n|$ converge vers 0.*

Démonstration On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - 0| \leqslant \varepsilon) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow ||u_n| - 0| \leqslant \varepsilon) \\
\Longleftrightarrow\ & \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0.
\end{aligned}$$

□

Exercice 4 *Vérifier que la suite complexe $(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si la suite réelle de terme général $(\mathcal{R}e(u_n))_n$ converge vers $\mathcal{R}e(\ell)$ et la suite réelle de terme général $(\mathcal{I}m(u_n))_n$ converge vers $\mathcal{I}m(\ell)$.*

Copyrighted material

Définition 5.2 ✗ *On dit que la suite* ***réelle*** $(u_n)_n$ ***tend vers*** $+\infty$ *si*

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant \kappa)$$

et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

✗ *On dit que la suite* ***réelle*** $(u_n)_n$ ***tend vers*** $-\infty$ *si*

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_-^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant \kappa)$$

et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Remarque Il résulte de manière immédiate de la définition 5.2 que la suite $(u_n)_n$ *tend vers* $+\infty$ si et seulement si la suite $(-u_n)_n$ *tend vers* $-\infty$.

Exemple La suite de terme général n tend vers $+\infty$. En effet, soit κ un réel strictement positif et $N = E(\kappa) + 1$. On a $N \geqslant \kappa$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant \kappa).$$

Exercice 5 *Montrer que la suite de terme général* n^2 *tend vers* $+\infty$. *Montrer que la suite de terme général* $\sqrt{n}$ *tend vers* $+\infty$.

Remarque La nature d'une suite réelle est de l'un des trois types suivants :

- convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ (c'est le cas de la suite de terme général $1/n$) ;
- divergente en tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$ (c'est le cas de la suite de terme général n) ;
- divergente sans tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ (c'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n$).

Par abus de langage, on dit qu'une suite a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour signifier qu'elle tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). On dit aussi qu'une suite admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour signifier qu'elle converge vers un réel ou diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

5.1.2 Suites bornées

Définition 5.3 *Une suite numérique* $(u_n)_n$ *est dite* **bornée** *s'il existe un réel positif* M *tel que pour tout entier* n *on ait* $|u_n| \leqslant M$.

Copyrighted material

Définition 5.4 ✗ *Une suite* **réelle** $(u_n)_n$ *est dite* **majorée** *s'il existe un réel A tel que pour tout entier n on ait $u_n \leqslant A$. Ce réel A est appelé un* **majorant** *de la suite $(u_n)_n$.*

✗ *Une suite* **réelle** $(u_n)_n$ *est dite* **minorée** *s'il existe un réel B tel que pour tout entier n on ait $u_n \geqslant B$. Ce réel B est appelé un* **minorant** *de la suite $(u_n)_n$.*

On rappelle que $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné mais que ce n'est pas le cas de $\mathbb{C}$. La notion de suite minorée ou majorée n'a donc de sens que pour les suites réelles.

Proposition 5.5 *Toute suite numérique convergente est bornée.*

Démonstration Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. D'après la définition 5.1 :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant 1).$$

Pour $n \geqslant N_1$ on a

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|.$$

La suite est donc majorée par $M = \max(u_0, u_1, \ldots, u_{N_1-1}, 1 + |\ell|)$. □

Proposition 5.6 ✗ *Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.*

✗ *Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée. Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.*

Démonstration ⊵ La première assertion se démontre aisément en utilisant les propriétés de la valeur absolue. Si la suite réelle $(u_n)_n$ est bornée par $M \in \mathbb{R}_+$ alors M est un majorant et $-M$ est un minorant de la suite. Réciproquement, si la suite réelle $(u_n)_n$ est majorée par le réel A et minorée par le réel B alors elle est bornée par $M = \max(|A|, |B|)$.

⊵ Montrons que toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée. Supposons que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$. On a[(2)]

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \Longrightarrow u_n \geqslant 1).$$

La suite est donc minorée par $M = \min(u_0, u_1, \ldots, u_{N_1-1}, 1)$. Sur le même principe, on vérifie que toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée. □

[(2)] Voir la définition 5.2 en page 172.

Copyrighted material

Remarques

1. Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. C'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n$ qui est bornée par 1 mais qui diverge.

2. Une suite réelle tendant vers $+\infty$ n'est pas majorée mais une suite qui n'est pas majorée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$. C'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n\ n$ qui n'est pas majorée et qui ne tend pas vers $+\infty$.

5.2 Propriétés

5.2.1 Propriétés algébriques pour les suites numériques

On munit l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques de deux lois de compositions internes $+_s$ et $\times_s$ définies de la manière suivante. Si $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ sont deux éléments de $\mathcal{S}$, on définit $u +_s v$ comme étant la suite de terme général $u_n + v_n$ et $u \times_s v$ comme étant la suite de terme général $u_n \times v_n$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes en utilisant les propriétés de la somme et du produit dans $\mathbb{R}$.

1. La loi $+_s$ est associative : $\forall (u, v, w) \in \mathcal{S}^3 \quad (u +_s v) +_s w = u +_s (v +_s w)$.
2. La loi $+_s$ est commutative : $\forall (u, v) \in \mathcal{S}^2 \quad u +_s v = v +_s u$.
3. L'ensemble $\mathcal{S}$ possède un élément neutre pour $+_s$, noté $(0)_n$ qui est la suite dont tous les termes sont nuls. On a $\forall u \in \mathcal{S} \quad u +_s (0)_n = u$.
4. Tout élément $u = (u_n)_n$ de $\mathcal{S}$ possède un symétrique pour la loi $+_s$ noté $-u$ qui est la suite de terme général $-u_n$. On a $u +_s (-u) = 0$.
5. La loi $\times_s$ est associative :

$$\forall (u, v, w) \in \mathcal{S}^3 \quad (u \times_s v) \times_s w = u \times_s (v \times_s w).$$

6. La loi $\times_s$ est commutative : $\forall (u, v) \in \mathcal{S}^2 \quad u \times_s v = v \times_s u$.
7. La loi $\times_s$ est distributive par rapport à $+_s$:

$$\forall (u, v, w) \in \mathcal{S}^3 \quad u \times_s (v +_s w) = (u \times_s v) + (u \times_s w).$$

8. L'ensemble $\mathcal{S}$ possède un élément neutre pour $\times_s$, noté $(1)_n$ qui est la suite de terme général 1. On a $\forall u \in \mathcal{S} \quad u \times_s (1)_n = u$.

Si u est une suite dont tous les termes sont non nuls, on note $1/u$ le symétrique de u pour la loi $\times_s$. Le terme général de la suite $1/u$ est $1/u_n$.

On munit l'ensemble $\mathcal{S}$ d'une loi de composition externe que l'on note $\cdot$ et que l'on définit de la manière suivante : si $u = (u_n)_n \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda \cdot u$ est la suite de terme général $\lambda \times u_n$. On a les propriétés suivantes.

Copyrighted material

9. $\forall (u,v) \in \mathcal{S}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot (u +_s v) = \lambda \cdot u +_s \lambda \cdot v.$
10. $\forall u \in \mathcal{S} \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u +_s \mu \cdot u.$
11. $\forall u \in \mathcal{S} \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u.$
12. $\forall u \in \mathcal{S} \quad 1 \cdot u = u.$

Proposition 5.7 *L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques muni des lois de composition interne $+_s$ et $\times_s$ est un anneau commutatif unifère.*

Démonstration Cela traduit les propriétés 1 à 7 ci dessus. □

Nous verrons dans la suite de ce cours que les propriétés 1 à 4 et 9 à 12 confèrent à l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques une structure d'espace vectoriel.

Nous noterons aussi plus simplement $+$ et $\times$ les lois $+_s$ et $\times_s$. Les propositions qui suivent sont d'un grand intérêt pratique puisqu'elles permettent de déterminer la nature des suites $u+v$ ou $u \times v$ en fonction de la nature des suites u et v.

Proposition 5.8 *Soient u et v deux suites numériques de terme général u_n et v_n et soit λ un scalaire.*

- ✗ *Si les suites u et v convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 alors la suite $u+v$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.*
- ✗ *Si les suites u et v convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 alors la suite $u \times v$ converge vers $\ell_1 \times \ell_2$.*
- ✗ *Si la suite u converge vers ℓ_1 alors la suite $\lambda \cdot u$ converge vers $\lambda \times \ell_1$.*
- ✗ *Si les suites u et v convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 et si $\ell_2 \neq 0$ alors la suite u/v converge vers ℓ_1/ℓ_2.*

Démonstration Cette proposition est admise. Les assertions énoncées se démontrent en utilisant la définition de la convergence, voir la définition 5.1. □

Remarque Si la suite $(u_n)_n$ converge et la suite $(v_n)_n$ diverge alors la suite de terme général $u_n + v_n$ diverge. Mais si les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ divergent alors on ne peut rien conclure quant à la nature de la suite de terme général $u_n + v_n$. Elle peut diverger ou converger. Considérons par exemple les suites de terme général $(-1)^n$ et $(-1)^{n+1}$. Ces deux suites divergent mais la suite de terme général $(-1)^n + (-1)^{n+1}$ est la suite constante de terme général 0 qui converge.

5.2.2 Autres propriétés algébriques pour les suites réelles

Dans le cas de deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ne convergeant pas toutes deux dans $\mathbb{R}$, la nature des suites de terme général $u_n + v_n$ et $u_n \times v_n$ ne peut être établie que sous certaines hypothèses supplémentaires sur les suites $(u_n)_n$ et

Copyrighted material

$(v_n)_n$. Les cas où il est possible de statuer sur la nature de la suite somme ou produit sont indiqués dans les trois propositions suivantes. Tous les autres cas correspondent à des situations où il n'est pas possible de conclure sur la nature de la suite sans une étude plus approfondie (on parle de *forme indéterminée*).

Proposition 5.9 *Soient u et v deux suites réelles.*

- ✗ *Si la suite u tend vers $+\infty$ et si la suite v est minorée (en particulier si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) alors la suite $u+v$ tend vers $+\infty$.*
- ✗ *Si la suite u tend vers $-\infty$ et si la suite v est majorée (en particulier si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) alors la suite $u+v$ tend vers $-\infty$.*

Proposition 5.10 *Soient u et v deux suites réelles.*

- ✗ *Si la suite u tend vers $+\infty$ et si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ alors la suite $u \times v$ tend vers $+\infty$.*
- ✗ *Si la suite u tend vers $+\infty$ et si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ alors la suite $u \times v$ tend vers $-\infty$.*
- ✗ *Si la suite u tend vers $-\infty$ et si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ alors la suite $u \times v$ tend vers $+\infty$.*
- ✗ *Si la suite u tend vers $-\infty$ et si la suite v a pour limite $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ alors la suite $u \times v$ tend vers $-\infty$.*

Proposition 5.11 *Soit u une suite réelle.*

- ✗ *Si la suite u à termes tous non nuls tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ alors la suite $1/u$ converge vers 0.*
- ✗ *Si la suite **à termes strictements positifs** (resp. négatifs) u converge vers 0 alors la suite $1/u$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*
- ✗ *Si la suite u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si λ est un réel strictement positif alors la suite $\lambda \cdot u$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*
- ✗ *Si la suite u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si μ est un réel strictement négatif alors la suite $\mu \cdot u$ tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).*

On peut résumer les propriétés qui ont été énoncées dans les propositions précédentes sous forme de tableaux. Le tableau suivant indique la limite éventuelle de la suite $u+v$ en fonction de la limite des suites u et v. On écrit IND pour *forme indéterminée* lorsque les hypothèses ne sont pas suffisantes pour conclure. On écrit PL pour signifier qu'il n'y a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Copyrighted material

v + u	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	PL
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$	IND
PL	PL	IND	IND	IND

Le tableau suivant indique la limite éventuelle de la suite $u \times v$ en fonction de la limite des suites u et v.

v × u	$\ell' > 0$	$\ell' = 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$\ell > 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$\ell = 0$	0	0	0	IND	IND	IND
$\ell < 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	PL
$+\infty$	$+\infty$	IND	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	IND
PL	PL	IND	PL	IND	IND	IND

Exemples

1. Nous avons montré que la suite de terme général n tendait vers $+\infty$. On en déduit que la suite de terme général n^2 (qui est le produit de cette suite par elle-même) tend également vers $+\infty$. On peut alors affirmer que la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = 3n^2$ et la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = 5n$ tendent toutes les deux vers $+\infty$. Finalement, on peut conclure que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 3n^2 + 5n$ tend vers $+\infty$ car elle est la somme de la suite $(v_n)_n$ et de la suite $(w_n)_n$.

2. Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 3n^2 - 5n$. Elle est la somme de la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = 3n^2$ et de la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = -5n$. La suite $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors que la suite $(w_n)_n$ tend vers $-\infty$. Nous sommes dans un cas d'indétermination quant à la nature de la suite $(u_n)_n$. Pour lever cette indétermination, remarquons que

$$u_n = n^2\left(3 - \frac{5}{n}\right).$$

La suite de terme général n tend vers $+\infty$ donc d'après la proposition 5.9 la suite de terme général $1/n$ tend vers 0 et par conséquent la suite de terme général $5/n$ tend également vers 0. On en déduit que la suite de terme général

Copyrighted material

$3 - 5/n$ admet pour limite 3 qui est un réel strictement positif. On en conclut d'après la proposition 5.9 que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

3. Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}$. La suite de terme général $\sqrt{2n-1}$ tend vers $+\infty$ alors que la suite de terme général $-\sqrt{2n+1}$ tend vers $-\infty$ (nous le justifierons de manière précise dans la suite du chapitre). Nous sommes là encore dans un cas d'indétermination quant à la nature de la suite $(u_n)_n$. Pour lever cette indétermination, remarquons que

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}\right)\left(\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}\right)}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} = -\frac{2}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}.$$

La suite de terme général $\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}$ tend vers $+\infty$. On en déduit d'après la proposition 5.9 que la suite $(u_n)_n$ admet pour limite 0.

5.2.3 Propriétés d'ordre pour les suites réelles

La proposition 5.12 ci-dessous nous indique que si les termes d'une suite réelle convergente appartiennent tous, à partir d'un certain rang, à un intervalle fermé donné, alors la limite de la suite appartient nécessairement à ce même intervalle.

Proposition 5.12 (Passage à la limite dans les inégalités) *Soient $(u_n)_n$ une suite réelle convergeant vers le réel ℓ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.*

✗ *Si tous les termes de la suite $(u_n)_n$ sont minorés par le réel a à partir d'un certain rang alors $\ell \geqslant a$. Autrement dit,*

$$\big(\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant a)\big) \quad \Longrightarrow \quad \ell \geqslant a.$$

✗ *Si tous les termes de la suite $(u_n)_n$ sont majorés par le réel b à partir d'un certain rang alors $\ell \leqslant b$. Autrement dit,*

$$\big(\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant b)\big) \quad \Longrightarrow \quad \ell \leqslant b.$$

✗ *Si tous les termes de la suite $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang appartiennent à l'intervalle $[a,b]$ alors $\ell \in [a,b]$. Autrement dit,*

$$\big(\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow a \leqslant u_n \leqslant b)\big) \quad \Longrightarrow \quad a \leqslant \ell \leqslant b.$$

Démonstration Pour établir la première assertion, il suffit d'appliquer la proposition 5.2 à la suite de terme général $u_n - a$. La deuxième assertion se démontre en appliquant la proposition 5.2 à la suite de terme général $b - u_n$. La troisième assertion découle des deux premières. □

Remarque L'assertion

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n > a)$$

Copyrighted material

ne permet pas de conclure que $\ell > a$. On peut seulement conclure que la limite vérifie $\ell \geqslant a$. Par exemple la suite de terme général $u_n = 1/n$ vérifie $u_n > 0$ pour tout entier n plus grand que 1 mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Inversement, si la limite d'une suite réelle appartient à un intervalle ouvert donné alors à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à ce même intervalle comme le précise la proposition suivante.

Proposition 5.13 *Soient $(u_n)_n$ une suite réelle convergeant vers le réel ℓ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si $a < \ell < b$ alors il existe un entier N tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \Longrightarrow a < u_n < b\big).$$

Démonstration Considérons le réel $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(b-\ell, \ell-a)$. On a $\varepsilon > 0$, $\ell-\varepsilon > a$ et $\ell+\varepsilon < b$. Puisque la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Autrement dit, pour $n \geqslant N$ on a

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

On en conclut que $a < u_n < b$ pour tout entier n supérieur à N. □

Théorème 5.1 (d'encadrement) *Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles vérifiant*

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n).$$

✗ *Si les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent respectivement vers ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 alors $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \ell_3$.*

✗ *Si les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ.*

Démonstration ⊵ Montrons que si $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier n supérieur à N alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$ en raisonnant par l'absurde. Supposons[3] donc que $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier n supérieur à N et que $\ell_1 > \ell_2$. On a alors $\ell_1 > \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)$ et d'après la proposition 5.13, on peut affirmer

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \Longrightarrow (\ell_1 + \ell_2)/2 < u_n)\,.$$

On a aussi $\ell_2 < \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)$, donc d'après la proposition 5.13, on peut affirmer que

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_2 \Longrightarrow v_n < (\ell_1 + \ell_2)/2)\,.$$

[3] On rappelle que la négation de l'implication « $P \Longrightarrow Q$ » (si P alors Q) est « P et non(Q) ».

Copyrighted material

On en déduit que pour tout entier n supérieur à $\max(N_1, N_2)$ on a

$$v_n < \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) < u_n.$$

Ceci contredit l'hypothèse $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier n supérieur à N et achève le raisonnement par l'absurde. (On procède de la même manière pour montrer que $\ell_2 \leqslant \ell_3$.)

$\trianglerighteq$ Soit ε un réel strictement positif fixé. Par hypothèse les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergeant vers ℓ, on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon), \tag{2}$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_2 \Longrightarrow |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon). \tag{3}$$

Par ailleurs, l'hypothèse

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n)$$

implique que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \Longrightarrow u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell\big).$$

Soit $N_3 = \max(N, N_1, N_2)$. Pour $n \geqslant N_3$ on a d'après (2) et (3),

$$-\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi pour tout entier n supérieur à N_3 on a $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Cela signifie que la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ. □

Exemple Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$. Pour tout entier naturel n non nul on a

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Nous avons montré que la suite de terme général $1/n$ tendait vers 0. Il en est de même d'après la proposition 5.8 de la suite de terme général $-1/n$. Le théorème d'encadrement permet de conclure que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

Proposition 5.14 *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles vérifiant*

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n).$$

✗ *Si la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors la suite $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$.*

✗ *Si la suite $(v_n)_n$ tend vers $-\infty$ alors la suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$.*

Copyrighted material

Démonstration ⊵ Supposons que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \Longrightarrow u_n \geqslant \kappa).$$

Par hypothèse

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n).$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur à $N_2 = \max(N_1, N)$ on a $v_n \geqslant u_n \geqslant \kappa$. Ainsi

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_2 \Longrightarrow v_n \geqslant \kappa)$$

autrement dit, la suite $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

⊵ Supposons maintenant que la suite $(v_n)_n$ tend vers $-\infty$, c'est-à-dire que

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_-^* \quad \exists N_3 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_3 \Longrightarrow v_n \leqslant \kappa).$$

Par hypothèse

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n).$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur à $N_4 = \max(N_3, N)$ on a $u_n \leqslant u_n \leqslant \kappa$. Ainsi

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_-^* \quad \exists N_4 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_4 \Longrightarrow u_n \leqslant \kappa)$$

autrement dit, la suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$. □

5.3 Monotonie

5.3.1 Suites réelles monotones

Définition 5.5

✗ *On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ est* ***croissante*** *si :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geqslant u_n$.

✗ *On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ est* ***strictement croissante*** *si :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$.

✗ *On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ est* ***décroissante*** *si :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$.

✗ *On dit que la suite réelle $(u_n)_n$ est* ***strictement décroissante*** *si :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

✗ *On dit qu'une suite réelle est* ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante. On dit qu'une suite réelle est* ***strictement monotone*** *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Copyrighted material

Remarques

1. Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n$. La négation de l'assertion « la suite est croissante » n'est donc pas « la suite est décroissante » mais « il existe un entier n pour lequel $u_{n+1} < u_n$ ».

2. Pour montrer qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est croissante, on peut montrer que pour tout entier n on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Pour montrer qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est décroissante, on peut montrer que pour tout entier n on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

3. Si tous les termes de la suite $(u_n)_n$ sont strictement positifs (resp. strictement négatifs), alors pour montrer que la suite est croissante on peut montrer que pour tout entier n on a $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$ (resp. $u_{n+1}/u_n \leqslant 1$). Pour montrer qu'elle est décroissante on peut montrer que pour tout entier n on a $u_{n+1}/u_n \leqslant 1$ (resp. $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$).

4. Il résulte de manière directe de la définition que si la suite $(u_n)_n$ est croissante (resp. décroissante) alors la suite de terme général $-u_n$ est une suite décroissante (resp. croissante).

5. Rappelons que le corps $\mathbb{C}$ n'étant pas muni de relation d'ordre, la notion de suite monotone ne peut pas avoir de sens pour une suite complexe.

Exemples

1. La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est strictement croissante puisque pour tout entier n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

2. La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \exp(2n + 1/n)$ est strictement croissante puisque pour tout entier n non nul,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\left(2 - \frac{1}{n(n+1)}\right) > e^1 > 1$$

car $0 < 1/n(n+1) < 1$.

3. Considérons la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Pour tout entier n non nul on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Pour déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Copyrighted material

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, sa dérivée est l'application f' définie par

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}.$$

L'application f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ on a nécessairement $f(x) < 0$ pour tout réel x strictement positif. On a donc $f(n) < 0$ pour tout entier n non nul, ce qui permet de conclure que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier n et par conséquent que la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

Proposition 5.15 ✗ *Si les suites réelles u et v sont croissantes (resp. décroissantes) alors la suite $u+v$ est croissante (resp. décroissante).*

✗ *Si les suites réelles u et v sont à* ***termes positifs*** *et croissantes (resp. décroissantes) alors la suite $u \times v$ est croissante (resp. décroissante).*

✗ *Si la suite u est croissante (resp. décroissante) alors pour tout réel λ* ***positif*** *la suite $\lambda \cdot u$ est croissante (resp. décroissante) et pour tout réel μ* ***négatif*** *la suite $\mu \cdot u$ est décroissante (resp. croissante).*

Démonstration La démonstration est immédiate en utilisant la définition 5.5 et les propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 5.16 ✗ *Toute suite croissante et majorée est convergente.*

✗ *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Démonstration ⊵ Soit $(u_n)_n$ une suite croissante et majorée par un réel M. L'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée (par M) de $\mathbb{R}$, donc il admet une borne supérieure ℓ et on a[4]

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \ell \geqslant u_N > \ell - \varepsilon.$$

Comme la suite est croissante, on en déduit que pour tout entier n supérieur à N on a $\ell \geqslant u_n \geqslant u_N > \ell - \varepsilon$, autrement dit que $0 \leqslant u_n - \ell \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout réel strictement positif ε il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N on ait $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. La suite $(u_n)_n$ converge donc vers ℓ.

⊵ La deuxième assertion se déduit de la première en considérant la suite de terme général $-u_n$.

□

[4] Voir la caractérisation de la borne supérieure d'un ensemble donnée à la proposition 3.2 en page 95.

Copyrighted material

Remarque En prenant la contraposée des implications de la proposition 5.16, on obtient la caractérisation suivante d'une suite qui ne converge pas : ou bien elle n'est pas bornée, ou bien elle n'est pas monotone.

Proposition 5.17

✗ *Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers* $+\infty$.

✗ *Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers* $-\infty$.

Démonstration ⊵ Soit $(u_n)_n$ une suite réelle non majorée, c'est-à-dire[5] telle que

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad u_N > M.$$

Si on suppose que la suite $(u_n)_n$ est croissante alors pour tout entier n supérieur à N on a $u_n \geqslant u_N$. On en conclut que

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant M\big)$$

c'est-à-dire[6] que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

⊵ La deuxième assertion se déduit de la première en considérant la suite de terme général $-u_n$.

□

Exemple Soit $r \in]1, +\infty[$. Montrons que la suite de terme général $u_n = r^n$ tend vers $+\infty$. Il s'agit d'une suite dont les termes sont strictement positifs et qui est strictement croissante puisque pour tout entier n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r > 1.$$

Cette suite n'est pas bornée : pour tout réel strictement positif κ, le terme de rang $n = 1 + E\left(\dfrac{\ln \kappa}{\ln r}\right)$ est supérieur strictement à κ puisque

$$u_n > \kappa \iff r^n > \kappa \iff n \ln r > \ln \kappa \iff n > \frac{\ln \kappa}{\ln r},$$

les deux dernières équivalences résultant du fait que la fonction logarithme est strictement croissante et strictement positive sur $]1, +\infty[$. D'après la proposition 5.17, on en déduit que si $r \in]1, +\infty[$, la suite de terme général $u_n = r^n$ tend vers $+\infty$.

[5] Voir la définition 5.4.

[6] Voir la définition 5.2.

Copyrighted material

5.3.2 Suites adjacentes

Définition 5.6 *Deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites* **adjacentes** *si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *l'une des deux suites est croissante et l'autre est décroissante ;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$

Exemple La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ est croissante puisque pour tout entier n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

La suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ est décroissante puisque pour tout entier n,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{2}{n+1} = 0$. Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes.

Théorème 5.2 *Si deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite.*

Démonstration Nous allons supposer pour fixer les choses que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante. Considérons la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$. En utilisant la monotonie des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$w_{n+1} - w_n = \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\leqslant 0} - \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geqslant 0} \leqslant 0.$$

La suite $(w_n)_n$ est donc décroissante. Puisque les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et la suite $(w_n)_n$ converge vers 0. Les termes de la suite $(w_n)_n$ sont donc nécessairement positifs. On en déduit que pour tout entier n on a $u_n \leqslant v_n$. En utilisant la monotonie des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

Puisque la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée (par v_0) on en déduit qu'elle converge vers une limite ℓ_1. Puisque la suite $(v_n)_n$ est décroissante et minorée

Copyrighted material

(par u_0) on en déduit qu'elle converge vers une limite ℓ_2. Or on a les égalités suivantes

$$0 = \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \ell_1 - \ell_2.$$

On en conclut que $\ell_1 = \ell_2$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes convergeant vers une même limite ℓ. Si l'on suppose que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante alors on a l'encadrement suivant qui est valable pour tout entier n :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

Exercice 6 *Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par*

$$u_0 = a, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \quad \text{et} \quad v_0 = b, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1 - Montrer que les suites sont à valeurs positives et que pour tout entier n on a $u_n \leqslant v_n$.
2 - En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante majorée et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante minorée.
3 - Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

5.4 Suites extraites

Définition 5.7 *La suite numérique $(v_n)_n$ est une* ***suite extraite*** *ou une* ***sous-suite*** *de la suite $(u_n)_n$ s'il existe une application h de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante appelée* ***extractrice*** *telle que pour tout entier n on ait $v_n = u_{h(n)}$.*

Exemples

1. L'application $h : n \in \mathbb{N} \longmapsto 2n$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $v_n = u_{2n}$ est appelée ***suite des termes pairs*** extraite de la suite $(u_n)_n$.

Copyrighted material

2. L'application $h : n \in \mathbb{N} \longmapsto 2n+1$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $v_n = u_{2n+1}$ est appelée ***suite des termes impairs*** extraite de la suite $(u_n)_n$.

3. La suite de terme général $v_n = u_{|n^2-9n|}$ n'est pas une suite extraite de la suite $(u_n)_n$ car l'application $n \longmapsto |n^2 - 9n|$ n'est pas strictement croissante.

4. L'application $h : n \in \mathbb{N} \longmapsto n^3$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite de terme général $v_n = u_{n^3}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_n$.

Remarques

1. On vérifie par récurrence que si h est une extractrice alors pour tout entier n on a $h(n) \geqslant n$.

2. Toute sous-suite d'une sous-suite de la suite $(u_n)_n$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_n$ puisque la composée de deux applications croissantes est une application croissante (et par conséquent la composée de deux extractrices est une extractrice).

Proposition 5.18 *Si la suite numérique $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ alors toute sous-suite de la suite $(u_n)_n$ converge également vers ℓ.*

Démonstration Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$: pour tout réel ε strictement positif fixé,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Considérons une extractrice h et montrons que la suite $(u_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Comme h est une extractrice, h est croissante et $h(N) \geqslant N$. Donc, si $n \geqslant N$ on a $h(n) \geqslant h(N) \geqslant N$ et par conséquent $|u_{h(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$. Finalement, pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier N tel que $|u_{h(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$ si $n \geqslant N$. La suite $(u_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers ℓ. □

Remarques

1. On montrerait de même que si une suite réelle tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors toute sous-suite de cette suite tend également vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2. En prenant la contraposée de la proposition on obtient une condition suffisante pour qu'une suite n'admette pas de limite dans $\mathbb{K}$. Il suffit que deux suites extraites aient deux limites distinctes. Ainsi, la suite de terme général $(-1)^n$ diverge car la suite des termes pairs converge vers 1 et la suite des termes impairs converge vers -1.

3. On appelle ***valeur d'adhérence*** d'une suite numérique tout scalaire qui est limite d'une sous-suite de cette suite. D'après la proposition 5.18, une suite numérique convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence. D'après la remarque précédente, une suite qui a plusieurs valeurs d'adhérence diverge. On peut montrer qu'une suite converge si et seulement si elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

Copyrighted material

Exemples

1. La suite de terme général $1/n^3$ converge vers 0 car il s'agit d'une suite extraite de la suite de terme général $1/n$ dont on a montré la convergence vers 0.

2. La suite de terme général $\sqrt{2n+1}$ tend vers $+\infty$ car il s'agit d'une suite extraite de la suite de terme général $\sqrt{n}$ qui tend vers $+\infty$.

3. Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sin(n)$ diverge. Remarquons dans un premier temps que la suite $(u_n)_n$ est bornée par 1 et d'autre part que pour tout entier n,

$$\sin x > 1/2 \qquad \forall x \in]\pi/6 + 2n\pi, 5\pi/6 + 2n\pi[.$$

Puisque la longueur de l'intervalle $]\pi/6 + 2n\pi, 5\pi/6 + 2n\pi[$ vaut $2\pi/3$, c'est-à-dire est plus grande que 2, il existe pour chaque entier n deux entiers, que nous notons $p_1(n)$ et $p_2(n)$, dans cet intervalle. Puisque les intervalles $]\pi/6 + 2n\pi, 5\pi/6 + 2n\pi[$ sont deux à deux disjoints pour 2 valeurs distinctes de n, on en déduit que l'application

$$p_1 : n \in \mathbb{N} \longmapsto p_1(n) \in \mathbb{N}$$

est strictement croissante. La suite $(v_n)_n$ de terme général $u_{p_1(n)}$ est donc une suite extraite de la suite de terme général $u_n = \sin(n)$ qui est minorée par $1/2$. Par ailleurs pour tout entier n,

$$\sin x < -1/2 \qquad \forall x \in]7\pi/6 + 2n\pi, 11\pi/6 + 2n\pi[.$$

Puisque la longueur de l'intervalle $]7\pi/6 + 2n\pi, 11\pi/6 + 2n\pi[$ vaut $2\pi/3$, c'est-à-dire est plus grande que 2, il existe pour chaque entier n deux entiers, que nous notons $q_1(n)$ et $q_2(n)$, dans cet intervalle. Puisque les intervalles $]7\pi/6 + 2n\pi, 11\pi/6 + 2n\pi[$ sont deux à deux disjoints pour 2 valeurs distinctes de n, on en déduit que l'application

$$q_1 : n \in \mathbb{N} \longmapsto q_1(n) \in \mathbb{N}$$

est strictement croissante. La suite $(w_n)_n$ de terme général $u_{q_1(n)}$ est donc une suite extraite de la suite de terme général $u_n = \sin(n)$ qui est majorée par $-1/2$. On dispose donc de deux suites extraites de la suite $(u_n)_n$ dont l'une est minorée par $1/2$ et l'autre majorée par $-1/2$. On en déduit que ces deux sous-suites ne peuvent converger vers une même limite et par conséquent la suite de terme général $\sin(n)$ diverge.

L'assertion énoncée à la proposition 5.18 admet une réciproque. On peut montrer que si toutes les sous-suites d'une suite convergent vers une même limite alors la suite dont sont extraites les sous-suites converge elle-même vers cette limite. Bien entendu cette propriété n'est pas utilisable en pratique pour montrer qu'une suite converge (il est impossible d'étudier toutes les sous-suites d'une suite donnée, il en existe une infinité). Toutefois, il est possible en étudiant certaines sous-suites bien choisies de pouvoir conclure à la convergence de la suite comme le montre la proposition 5.19.

Copyrighted material

Proposition 5.19 *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite numérique $(u_n)_n$ converge est que la sous-suite des termes d'indice pair* **et** *la sous-suite des termes d'indice impair admettent la* **même** *limite. Dans ce cas, cette limite commune est la limite de la suite $(u_n)_n$.*

Démonstration $\trianglerighteq$ D'après la proposition 5.18 si la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ, la sous-suite des termes d'indice pairs et la sous-suite des termes d'indice impairs convergent vers ℓ.

$\trianglerighteq$ Réciproquement, supposons que la sous-suite des termes d'indice pairs et la sous-suite des termes d'indice impairs convergent vers une même limite ℓ. On en déduit que pour tout réel ε strictement positif on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon),$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_2 \Longrightarrow |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Soient $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant N$.

1. Si p est pair, il existe un entier k tel que $p = 2k$ et $k \geqslant N_1$.
2. Si p est impair, il existe un entier k tel que $p = 2k + 1$ et $k \geqslant N_2$.

Dans les deux cas, on a $|u_p - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier N tel que $|u_p - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout entier p supérieur à N. La suite $(u_n)_n$ converge donc vers ℓ. □

Exercice 7 *Soit $(u_n)_n$ une suite numérique dont les sous-suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge.*

WEIERSTRASS, Karl (1815, Osterfeld - 1897, Berlin).

Weierstrass enseigna les mathématiques à l'université de Berlin. On le considère généralement comme un des plus grands mathématiciens du XIXe siècle. Il introduit en mathématiques une rigueur jusqu'ici ignorée, mettant fin à des conclusions hardies de convergence, de continuité ou de dérivabilité comme le firent imprudemment par exemple Fourier et Cauchy. On lui doit la première définition précise de la notion de limite d'une suite et d'une fonction ainsi que la définition formelle de la continuité d'une fonction.

Théorème 5.3 (Théorème de Bolzano-Weierstrass[7]**)** *De toute suite numérique bornée on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathbb{K}$.*

Copyrighted material

Démonstration Ce théorème est admis. Une méthode pour le démontrer consiste à construire par récurrence, pour une suite $(u_n)_n$ donnée, deux suites adjacentes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ et une extractrice h telles que pour tout entier n, $u_{h(n)} \in [a_n, b_n]$. On aura alors

$$\begin{cases} a_n \leqslant b_n & \forall n \in \mathbb{N}, \\ [a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \lim\limits_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0. \end{cases}$$

Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ qui vérifie (cette propriété est appelée « propriété des segments emboîtés ») [7]

$$\{\ell\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Ainsi pour tout entier n on aura $\left|u_{h(n)} - \ell\right| \leqslant b_n - a_n$ et on pourra conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} (u_{h(n)} - \ell) = 0,$$

autrement dit qu'il existe une suite extraite de la suite $(u_n)_n$ qui converge (vers ℓ). □

Exemple La suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (par exemple par 1) et on a montré qu'elle ne converge pas. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on sait qu'on peut toutefois extraire de cette suite une sous-suite qui converge. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ne nous indique malheureusement pas comment obtenir une telle sous-suite.

5.5 Suites de Cauchy

CAUCHY, Augustin-Louis (1789, Paris - 1857, Sceaux).

Augustin-Louis Cauchy commence sa carrière comme ingénieur militaire. En 1816, il obtient un poste de professeur à la Faculté des Sciences de Paris et à l'École Polytechnique et entre à l'Académie des Sciences. L'œuvre de Cauchy est considérable, surtout en analyse où il a su donner le cadre rigoureux nécessaire à son développement. Il introduit une notion précise de continuité et élabore une définition rigoureuse de l'intégrale. Son travail concerne tous les domaines des mathématiques, en particulier les équations différentielles, la théorie des groupes et l'algèbre linéaire.

---

[7] Ce théorème a été énoncé par Bernhard Bolzano vers 1830 et a été démontré par Karl Weierstrass au début des années 1860.

Copyrighted material

Définition 5.8 *La suite numérique $(u_n)_n$ est appelée* **suite de Cauchy** *dans $\mathbb{K}$ si elle vérifie la condition :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$
$$\big((n \geqslant N \quad et \quad m \geqslant N) \Longrightarrow |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon\big).$$

En d'autres termes, une suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si en se fixant un « seuil » ε on peut trouver un rang N tel que la distance entre deux termes quelconques de la suite choisis au delà du rang N reste toujours plus petite que la valeur seuil fixée. Intuitivement, on a l'impression qu'une telle suite doit converger. C'est ce que nous établirons précisément au théorème 5.4.

Exemple Montrons que la suite de terme général $1/n^2$ est une suite de Cauchy. Soient m, n deux entiers vérifiant $n > m$. On a

$$|u_n - u_m| = \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| = \left|\frac{n^2 - m^2}{n^2 m^2}\right| = \frac{(n+m)(n-m)}{n^2 m^2}.$$

Or $0 \leqslant n - m \leqslant n$ et $0 \leqslant n + m \leqslant 2n$, donc $|u_n - u_m| \leqslant 2/m^2$.
Soit ε un réel strictement positif et $N = E\left(\sqrt{2/\varepsilon}\right) + 1$. Quels que soient les entiers m et n vérifiant $n > m \geqslant N$ on a $2/m^2 \leqslant \varepsilon$ et par conséquent

$$|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon.$$

Dans le cas où $m = n$, la majoration est toujours vraie car $|u_n - u_m| = 0$. La suite de terme général $1/n^2$ est donc bien une suite de Cauchy.

Théorème 5.4 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite numérique soit une suite de Cauchy est qu'elle converge.*

Démonstration $\trianglerighteq$ Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et montrons qu'elle est alors une suite de Cauchy. Remarquons tout d'abord que pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$|u_n - u_m| = |u_n - \ell + \ell - u_m| \leqslant |u_n - \ell| + |u_m - \ell|. \tag{4}$$

D'autre part[8], puisque la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$,

$$\forall \widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_{\widetilde{\varepsilon}} \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k \geqslant N_{\widetilde{\varepsilon}} \Longrightarrow |u_k - \ell| \leqslant \widetilde{\varepsilon}). \tag{5}$$

Soit ε un réel strictement positif. D'après la relation (5), il existe un entier $N_{\varepsilon/2}$ tel que pour tous entiers m, n vérifiant $m > N_{\varepsilon/2}$ et $n > N_{\varepsilon/2}$, on ait

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |u_m - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

[8] La notation indicielle $N_{\widetilde{\varepsilon}}$ est utilisée ici pour indiquer de manière claire que la valeur de cet entier dépend du choix effectué pour le paramètre $\widetilde{\varepsilon}$.

Copyrighted material

D'après la relation (4) on en conclut que pour tous entiers m, n vérifiant $m > N_{\varepsilon/2}$ et $n > N_{\varepsilon/2}$, on a

$$|u_n - u_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \big((n \geqslant N \quad \text{et} \quad m \geqslant N) \Longrightarrow |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon\big).$$

La suite $(u_n)_n$ est donc une suite de Cauchy.

$\trianglerighteq$ La démonstration de la réciproque fait l'objet de l'exercice 8. □

Exemple Montrons que la suite $(S_n)_n$ de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

Pour cela montrons l'assertion suivante[9] :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \big((n \geqslant N \quad \text{et} \quad m \geqslant N) \quad \text{et} \quad |u_n - u_m| > \varepsilon\big).$$

Soit N un entier naturel quelconque. On considère les entiers $n = 2^N$ et $m = 2^{N+1}$. On a

$$S_m - S_n = \sum_{k=2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{1}{k} \geqslant \left(2^{N+1} - 2^N\right) \frac{1}{2^{N+1}}$$

car dans la somme, il y a $2^{N+1} - 2^N$ termes positifs tous supérieurs à $1/2^{N+1}$. Cela permet d'affirmer que $S_m - S_n > 1/2$. On a donc montré que pour $\varepsilon = 1/2$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \big((n \geqslant N \quad \text{et} \quad m \geqslant N) \quad \text{et} \quad |u_n - u_m| > \varepsilon\big).$$

On en déduit que la $(S_n)_n$ n'est pas une suite de Cauchy. D'après le théorème 5.4 la suite $(S_n)_n$ ne converge pas[10]. Il est par ailleurs aisé de vérifier que la suite $(S_n)_n$ est strictement croissante : la suite $(S_n)_n$ tend donc vers $+\infty$.

---

[9] Cette assertion est la négation de l'assertion « la $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy ».

[10] On peut également conclure à la divergence de la suite $(S_n)_n$ en remarquant que la relation $S_{2N} - S_{2N+1} > 1/2$ implique que les deux sous-suites $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ extraites de la suite $(S_n)_n$ ne peuvent converger vers une même limite et en utilisant la proposition 5.18.

Copyrighted material

Remarques

1. L'intérêt du théorème 5.4 est qu'il fournit un moyen de montrer qu'une suite converge sans qu'il soit besoin, comme lorsqu'on utilise la définition 5.1, de connaître la valeur de la limite de la suite.

2. On prendra garde que la condition $\lim_{n\to+\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$ n'est pas suffisante pour conclure que la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy. On pourra s'en convaincre en considérant la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour laquelle

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ sans que cette suite soit une suite de Cauchy.

Exercice 8 *Le but de cet exercice est de montrer que toute suite numérique de Cauchy converge.*
1 - Montrer en utilisant la définition 5.8 que toute suite de Cauchy est bornée (on pourra s'inspirer de la démonstration de la proposition 5.5 page 173).
2 - Montrer qu'une suite de Cauchy qui possède une suite extraite convergente est une suite convergente.
3 - En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, en déduire que toute suite numérique de Cauchy converge.

Remarque Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$) converge vers un unique réel (resp. complexe). On dit que $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est un ***espace métrique***[11] ***complet*** pour la distance usuelle. Cette propriété n'est pas vérifiée par $\mathbb{Q}$: une suite de nombres rationnels peut être une suite de Cauchy et ne pas converger dans $\mathbb{Q}$ (i.e. ne pas avoir pour limite un nombre rationnel). Bien entendu puisque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, cela implique que la suite converge alors vers un nombre irrationnel dans $\mathbb{R}$. Un tel exemple de suite est fourni par la suite de terme général x_n où x_n désigne l'approximation décimale de $\sqrt{2}$ avec n chiffres significatifs

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.4, \quad x_2 = 1.41, \quad x_3 = 1.414, \quad \ldots$$

---

[11] La notion de suite de Cauchy est étroitement liée à celle de distance et existe pour des ensembles beaucoup plus généraux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si E désigne un ensemble quelconque et si d est une distance sur E, on dit que E muni de la distance d est un espace métrique, voir la proposition 3.12 en page 107. Une suite d'éléments de E sera qualifiée de suite de Cauchy si elle vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \big((n \geqslant N \quad \text{et} \quad m \geqslant N) \Longrightarrow d(u_n, u_m) \leqslant \varepsilon\big).$$

La définition que nous avons donnée d'une suite de Cauchy dans le cas de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ suppose implicitement que ces ensembles sont munis de leurs distances usuelles définies par la valeur absolue pour $\mathbb{R}$ et par le module pour $\mathbb{C}$.

Copyrighted material

La suite est une suite de Cauchy car pour tous entiers m, n vérifiant $n > m$ on a $|x_n - x_m| \leqslant 10^{-m}$. Bien entendu la suite converge vers $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel.

5.6 Suites usuelles

5.6.1 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 5.9 (suite arithmétique) *Soit r un scalaire. On appelle* ***suite arithmétique*** *de* ***raison arithmétique*** *r une suite numérique $(u_n)_n$ telle que*

$$u_{n+1} = u_n + r \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 5.20 *Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. On a*

$$u_n = u_0 + r\ n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La somme des n premiers termes de la suite arithmétique $(u_n)_n$ est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n}{2}\ (u_0 + u_{n-1}).$$

Démonstration ⊵ La première assertion se vérifie facilement en utilisant un raisonnement par récurrence.

⊵ Pour tout entier n non nul on a,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_0 + r\,k) = nu_0 + r \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= nu_0 + r\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\ \big(2u_0 + r(n-1)\big) \\ &= \frac{n}{2}\ \big(2u_0 + (u_{n-1} - u_0)\big) = \frac{n}{2}\ (u_0 + u_{n-1}). \end{aligned}$$

□

Exemple La suite de terme général $u_n = 2n$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ car

$$u_{n+1} = 2(n+1) = 2n + 2 = u_n + r.$$

D'après la proposition 5.20, pour tout entier n on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2k = n(n-1)$, autrement dit, la somme des n premiers nombres pairs vaut $n(n+1)$.

Copyrighted material

Remarque Une suite arithmétique de raison 0 est une suite constante. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une suite arithmétique de raison r est strictement croissante (et tend vers $+\infty$) si $r > 0$; elle est strictement décroissante (et tend vers $-\infty$) si $r < 0$.

Définition 5.10 (suite géométrique) *Soit r un scalaire. On appelle* ***suite géométrique*** *de* ***raison géométrique*** *r une suite numérique $(u_n)_n$ telle que*

$$u_{n+1} = r\ u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 5.21 *Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison r. On a*

$$u_n = u_0\ r^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $r \neq 1$, la somme des n premiers termes de la suite géométrique $(u_n)_n$ est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0\ \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Démonstration ⊵ La première assertion se vérifie facilement en utilisant un raisonnement par récurrence.

⊵ Pour tout entier n non nul on a, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n-1} r^k$. On en déduit en multipliant cette relation par $1 - r$ et en développant, que

$$(1-r)S_n = u_0(1-r) \sum_{k=0}^{n-1} r^k = u_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k - \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \right) = u_0(1 - r^n),$$

(les termes des deux sommes s'annulant deux à deux). On en conclut que

$$S_n = u_0\ \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

□

Proposition 5.22 *Une suite géométrique de raison r converge si et seulement si $|r| < 1$ ou $r = 1$.*

Démonstration ⊵ Supposons que la suite géométrique $(u_n)_n$ de raison r converge vers un scalaire ℓ. Il est évident que la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = u_{n-1}$ converge aussi vers ℓ. On a par ailleurs pour tout entier n non nul,

$$u_n = u_0 r^n = u_0 r r^{n-1} = r u_{n-1} = r v_n.$$

Copyrighted material

La suite de terme général rv_n converge vers $r\ell$ alors que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Puisque ces 2 suites sont égales, par unicité de la limite, on en déduit que nécessairement

$$\ell = r\ell.$$

Cela implique que ou bien $\ell = 0$ ou bien $r = 1$.

$\trianglerighteq$ Procédons par disjonction des cas. Trois cas sont envisageables : ou bien $|r| < 1$, ou bien $|r| > 1$ ou bien $|r| = 1$.

- Remarquons que si $|r| > 1$ la suite de terme général $|r|^n$ tend vers $+\infty$ car cette suite est strictement croissante et non bornée. On en déduit que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Nous avons vu[(12)] que si la suite $(u_n)_n$ convergeait alors nécessairement la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait aussi. On en déduit en prenant la contraposée de cette assertion que si $|r| > 1$ la suite $(u_n)_n$ diverge.
- Montrons que si $|r| < 1$ alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0. Soit ε un réel strictement positif fixé. On a

$$|u_n - 0| = |r^n| = |r|^n,$$

  de sorte que $|u_n - 0|$ est plus petit que ε dès que $n \geqslant N = 1 + E(\ln \varepsilon / \ln |r|)$.
- Lorsque où $|r| = 1$ deux cas sont envisageables : ou bien $r = 1$ et la suite $(u_n)_n$ est une suite constante qui converge; ou bien $r \neq 1$ et alors si la suite converge c'est nécessairement vers 0 d'après la première partie de la démonstration. Ce n'est pas possible car alors $|u_N - 0| = |r|^N = 1$ est plus grand que $\varepsilon = 1/2$ pour tout entier N.

On peut donc conclure que la suite géométrique de raison r converge vers 0 si et seulement si $|r| < 1$ et est une suite constante si et seulement si $r = 1$. Elle diverge dans les autres cas. □

5.6.2 Suites récurrentes

Soient E un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et f une application de E dans E. On peut définir une suite $(u_n)_n$ par

1. la donnée de son terme initial $u_0 = a$ où a est un élément de E;
2. la donnée d'une relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$.

On dit alors que la suite $(u_n)_n$ est définie par récurrence.

On remarquera que pour assurer l'existence de la suite $(u_n)_n$, il faut que $f(E) \subset E$ et que $a \in E$.

Les propriétés générales d'une suite définie par récurrence sont étroitement liées aux propriétés de la fonction f et seront étudiées au chapitre 13. Elles font intervenir de manière essentielle la notion de continuité.

(12) Voir la proposition 5.3.

Copyrighted material

Exercice 9 *Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n + 3)/2$.*
1 - Soit $(v_n)_n$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
2 - Soit $(S_n)_n$ la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_n$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

5.7 Limite supérieure et limite inférieure

Ce paragraphe permet de faire le lien entre la notion de borne supérieure et de borne inférieure de l'ensemble des valeurs prises par une suite et la notion de limite d'une suite.

Définition 5.11 ✗ *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On considère la suite $(\overline{S}_n)_n$ définie à partir de la suite $(u_n)_n$ par,*

$$\overline{S}_n = \sup\{u_k \mid k \geqslant n\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si la suite $(\overline{S}_n)_n$ converge, sa limite $\overline{S}$ est appelée **limite supérieure** *de la suite $(u_n)_n$. On écrit,*

$$\overline{S} = \limsup_{n \to +\infty} u_n.$$

✗ *On considère la suite $(\underline{S}_n)_n$ définie à partir de la suite $(u_n)_n$ par,*

$$\underline{S}_n = \inf\{u_k \mid k \geqslant n\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si la suite $(\underline{S}_n)_n$ converge, sa limite $\underline{S}$ est appelée **limite inférieure** *de la suite $(u_n)_n$. On écrit,*

$$\underline{S} = \liminf_{n \to +\infty} u_n.$$

Exemple Soit la suite $(u_n)_n$ de terme général $(-1)^n$. On a $\limsup_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\liminf_{n \to +\infty} u_n = -1$.

Proposition 5.23 *La suite réelle $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si sa limite supérieure est égale à sa limite inférieure. Cette valeur est la limite de la suite.*

Copyrighted material

Démonstration $\trianglerighteq$ Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $\limsup_{n\to+\infty} u_n = \liminf_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Pour tout entier n on a par définition de la borne supérieure et de la borne inférieure d'un ensemble[13]

$$\overline{S}_n = \sup\{u_k \mid k \geqslant n\} \geqslant u_n \geqslant \underline{S}_n = \inf\{u_k \mid k \geqslant n\}.$$

D'après le théorème d'encadrement[14], on en déduit que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

$\trianglelefteq$ Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Soit ε un réel strictement positif fixé. On a,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$. Pour tout entier k avec $k \geqslant n$ on a

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Par conséquent

$$\ell - \varepsilon \leqslant \overline{S}_n = \sup\{u_k \mid k \geqslant n\} \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe un entier N tel que $|\overline{S}_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout entier n vérifiant $n \geqslant N$. La suite $(\overline{S}_n)_n$ converge donc vers ℓ.
Sur le même principe, on vérifie que la suite $(\underline{S}_n)_n$ converge vers ℓ. □

5.8 Exercices de synthèse

Exercice 10 *Soient u_0, v_0 deux réels distincts et λ, μ deux réels positifs. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par*

$$u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu}.$$

1 - Montrer que la suite de terme général $v_n - u_n$ est une suite géométrique de raison q tel que $|q| < 1$.

2 - Montrer que si $\mu \geqslant \lambda$ les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

3 - Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1-q^n}{1-q}(v_0 - u_0).$$

En déduire la limite des 2 suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ si $\mu \geqslant \lambda$.

4 - Quel est le comportement des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ si $u_0 = v_0$?

---

[13] Voir la définition 3.3 en page 89.
[14] Voir le théorème 5.1.

Copyrighted material

Exercice 11

1 - Démontrer que si la suite réelle $(u_n)_n$ admet pour limite le réel ℓ, il en est de même pour la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}.$$

On dit alors que la suite $(u_n)_n$ converge au sens de Césaro.

2 - Montrer que la réciproque est fausse.

3 - Démontrer que si la suite réelle $(u_n)_n$ est monotone et bornée alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \quad \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell,$$

autrement dit qu'une suite réelle monotone et bornée convergeant au sens de Césaro, converge nécessairement.

Exercice 12 *Le but de cet exercice est d'établir la formule de Stirling*

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-n}$$

permettant d'obtenir une valeur approchée de factoriel n lorsque n est très grand.

1 - Soit ϕ la fonction définie par

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x.$$

Montrer que ϕ est positive sur l'intervalle $[0,1[$.

2 - Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = \phi(x) - \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$. Montrer que ψ est négative sur l'intervalle $[0,1[$. En déduire que $\forall x \in [0,1[$,

$$0 \leqslant \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

3 - Montrer que pour tout entier n non nul

$$0 \leqslant \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

(On pourra considérer la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = 1/(2n+1)$ et utiliser le résultat de la question précédente.)

4 - On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-n}}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}.$$

Copyrighted material

Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. On désigne par ℓ leur limite commune. Justifier que $\ell > 0$.

5 - Montrer qu'il existe un unique réel $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\,\ell = \mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}}.$$

En déduire que

$$n! = \frac{1}{\ell}\,n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}}$$

On s'intéresse maintenant au calcul de ℓ. On donne la formule suivante, connue sous le nom de formule de Wallis[15],

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2}{n\left(\prod_{k=1}^{n} 2k-1\right)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2} = \pi.$$

6 - Montrer en utilisant la formule de Wallis que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

En déduire que $\ell = 1/\sqrt{2\pi}$. (On pourra considérer la sous-suite des termes d'indice pair extraite de la suite $(a_n)_n$.)

5.9 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Supposons que le réel a est un point adhérent à A, autrement dit que

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad x \in]a-\eta, a+\eta[. \tag{6}$$

On veut montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a, c'est-à-dire montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ telle que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in A$;
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - a| \leqslant \varepsilon)$.

[15] Cette relation est démontrée dans l'exercice 11 en page 896.

Copyrighted material

D'après la relation (6), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un élément x_n dans A vérifiant $|x_n - a| < 1/n$ (il suffit de particulariser l'assertion au cas des réels η de la forme $1/n, n \in \mathbb{N}^*$). La suite $(x_n)_n$ ainsi obtenue est clairement une suite d'éléments de A ; il nous reste à établir qu'elle converge vers a. Soit ε un réel strictement positif quelconque. Puisque $|x_n - a| < 1/n$, on a $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$ pour tout entier n tel que $1/n \leqslant \varepsilon$, autrement dit pour tout entier n supérieur à $N = E(1/\varepsilon) + 1$. On a donc montré que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - a| \leqslant \varepsilon)$$

autrement dit qu'il existait une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui convergeait vers a.

2 - Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a c'est-à-dire, supposons qu'il existe suite $(x_n)_n$ telle que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in A$;
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - a| \leqslant \varepsilon)$;

et montrons que le réel a est un point adhérent à A, autrement dit que

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad x \in]a - \eta, a + \eta[.$$

Soit η un réel strictement positif quelconque. D'après la relation 2 utilisée avec $\varepsilon = \eta/2$, il existe un entier N tel que $|x_N - a| \leqslant \eta/2$ et d'après la relation 1, $x_N \in A$. On a donc établit l'existence d'un réel $x_N \in A$ tel que $x_N \in]a-\eta, a+\eta[$ puisque $[a - \eta/2, a + \eta/2] \subset]a - \eta, a + \eta[$.

Solution de l'exercice 2

Considérons une suite $(u_n)_n$ qui converge vers un réel ℓ strictement positif. Dans ce cas,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon),$$

autrement dit, pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon. \tag{7}$$

Prenons $\varepsilon = \ell/2$. Puisque $\ell > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après (7), il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N

$$\frac{\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3\ell}{2}.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_n$ est à valeurs strictement positives au moins à partir du rang N (il n'est pas exclu que pour des entiers inférieurs à N, des valeurs u_n soient également strictement positives).

Copyrighted material

Solution de l'exercice 3

1 - Montrons que la suite de terme général est $1/\sqrt{n}$ converge vers 0. Soit N un entier ; pour tout entier n avec $n \geqslant N$ on a

$$|u_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Considérons un réel ε strictement positif et prenons $N = E(1/\varepsilon^2) + 1$. Pour tout entier n supérieur à N, on a

$$|u_n - 0| \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{E(1/\varepsilon^2) + 1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2}} \leqslant \varepsilon.$$

puisque $E(1/\varepsilon^2) + 1 > 1/\varepsilon^2$. D'après la définition 5.1 on en déduit que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

2 - Pour tout entier n on a

$$u_n = \begin{cases} \mathrm{i} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N},\ n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N},\ n = 4k+2 \\ -\mathrm{i} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N},\ n = 4k+3 \\ 1 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N},\ n = 4k+4 \end{cases}.$$

L'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a donc 4 points d'adhérence 1, i, $-\mathrm{i}$ et -1. Si la suite converge, elle ne peut donc avoir pour limite que l'une de ces 4 valeurs. La suite ne converge pas vers i. En effet prenons $\varepsilon = 1$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad n = 4N+3 \text{ vérifie } (n \geqslant N \text{ et } |u_n - \mathrm{i}| = |-\mathrm{i} - \mathrm{i}| = 2 > \varepsilon).$$

La suite ne converge pas vers $-\mathrm{i}$. En effet prenons $\varepsilon = 1$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad n = 4N+1 \text{ vérifie } (n \geqslant N \text{ et } |u_n - (-\mathrm{i})| = |\mathrm{i} + \mathrm{i}| = 2 > \varepsilon).$$

La suite ne converge pas vers 1. En effet prenons $\varepsilon = 1/2$ (pour changer),

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad n = 4N+2 \text{ vérifie } (n \geqslant N \text{ et } |u_n - 1| = |-1-1| = 2 > \varepsilon).$$

La suite ne converge pas non plus vers -1. En effet prenons $\varepsilon = 1$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad n = 4N+4 \text{ vérifie } (n \geqslant N \text{ et } |u_n - (-1)| = |1+1| = 2 > \varepsilon).$$

On en conclut que la suite de terme général $(-\mathrm{i})^n$ diverge.

3 - Remarquons que d'après la proposition 5.2, si la suite de terme général n^2 converge, sa limite est nécessairement un réel positif. Montrons que la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers aucun réel positif, c'est-à-dire montrons que

$$\forall \ell \in \mathbb{R}_+ \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon).$$

Soit $\ell \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon = 1/2$. Pour tout entier N considérons l'entier $n = N + E(\ell) + 2$. On a $n = N + 1 + E(\ell) + 1 > N + 1 + \ell$. On en déduit que $n \geqslant N$ et que

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &= |n^2 - \ell| = (n+\ell)|n-\ell| \geqslant (N+1)(N + E(\ell) + 2 - \ell) \\ &\geqslant (N+1)^2 > \frac{1}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Copyrighted material

On peut donc conclure que la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Solution de l'exercice 4

La suite complexe $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ désignons par a_n la partie réelle de u_n et par b_n sa partie imaginaire : $u_n = a_n + ib_n$. Désignons par ℓ_1 la partie réelle de ℓ et par ℓ_2 sa partie imaginaire : $\ell = \ell_1 + i\ell_2$. On a

$$|u_n - \ell| = \sqrt{(a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2}.$$

$\trianglerighteq$ Supposons que la suite $(a_n)_n$ converge vers ℓ_1 et que la suite $(b_n)_n$ converge vers ℓ_2,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant \eta \Longrightarrow |a_n - \ell_1| \leqslant \alpha) \tag{8}$$

et

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant \eta \Longrightarrow |b_n - \ell_2| \leqslant \alpha). \tag{9}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et soit $\alpha = \varepsilon/2$. D'après les assertions (8) et (9), on a pour $n \geqslant N = \max(\eta_1, \eta_2)$

$$|u_n - \ell| = \sqrt{(a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2} \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{2}\alpha \leqslant 2\alpha = \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

autrement dit, que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

$\trianglerighteq$ Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors,

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon &\iff \sqrt{(a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2} \leqslant \varepsilon \\ &\iff (a_n - \ell_1)^2 + (b_n - \ell_2)^2 \leqslant \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$(a_n - \ell_1)^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad (b_n - \ell_2)^2 \leqslant \varepsilon^2$$

Copyrighted material

autrement dit que

$$|a_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |b_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Ainsi, si la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

et on peut déduire de (10) d'une part que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon)$$

et d'autre part que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |b_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon)$$

autrement dit que la suite $(a_n)_n$ converge vers ℓ_1 et que la suite $(b_n)_n$ converge vers ℓ_2.

Solution de l'exercice 5

1 - Nous avons déjà montré à l'exercice 3 que la suite de terme général n^2 divergeait. De manière plus précise, la suite de terme général n^2 tend vers $+\infty$. En effet, soit κ un réel strictement positif et $N = E(\kappa) + 1$. Pour tout entier n avec $n \geqslant N$ on a

$$u_n = n^2 \geqslant N^2 = (E(\kappa) + 1)^2 = E(\kappa)^2 + 2E(\kappa) + 1 \geqslant E(\kappa) + 1 \geqslant \kappa.$$

Donc,

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant \kappa)$$

et on peut conclure que la suite de terme général n^2 tend vers $+\infty$.

2 - Montrons que la suite de terme général $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$. Soit κ un réel strictement positif et $N = (E(\kappa) + 1)^2$. On a $N \in \mathbb{N}$ et pour tout entier n avec $n \geqslant N$ on a

$$u_n = \sqrt{n} \geqslant \sqrt{N} = \sqrt{(E(\kappa) + 1)^2} = E(\kappa) + 1 \geqslant \kappa.$$

Donc,

$$\forall \kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant \kappa)$$

et par conséquent la suite de terme général $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 6

1 - Montrons par récurrence que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont à valeurs positives. La propriété est vraie au rang 0 puisque $0 < a < b$. Supposons la propriété vraie pour un entier n donné et montrons que la propriété est alors vraie pour l'entier suivant. Si $u_n \geqslant 0$ et si $v_n \geqslant 0$ alors $u_n v_n \geqslant 0$ et $u_n + v_n \geqslant 0$ et par conséquent

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \geqslant 0.$$

Copyrighted material

Par ailleurs, pour tout entier n non nul,

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}\,v_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2}\big(u_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}\,v_{n-1}} + v_{n-1}\big) = \frac{1}{2}\big(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}}\big)^2. \end{aligned}$$

Puisque $v_n - u_n \geqslant 0$ on en déduit que $v_n \geqslant u_n$.

2 - Pour montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité $u_{n+1} - u_n$ est positive. D'après ce qui précède on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n\,v_n} - u_n \geqslant \sqrt{u_n\,u_n} - u_n = 0.$$

Pour montrer que la suite $(v_n)_n$ est décroissante montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité $v_{n+1} - v_n$ est négative. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}.$$

Or $v_n \geqslant u_n$ pour tout entier n donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
Puisque la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante on a pour tout entier n

$$u_n \geqslant u_0 \quad \text{et} \quad v_n \leqslant v_0.$$

D'après la première question, on en déduit que pour tout entier n

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0,$$

ce qui permet de conclure que la suite $(u_n)_n$ est majorée par v_0 et que la suite $(v_n)_n$ est minorée par u_0. On en déduit, voir la proposition 5.16, que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent.

3 - Pour montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, il reste à vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Notons ℓ_1 la limite de la suite $(u_n)_n$ et ℓ_2 celle de la suite $(v_n)_n$. La limite de la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ est alors $\frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)$. Par ailleurs la suite $(t_n)_n$ de terme général $t_n = v_{n+1}$ converge vers ℓ_2. Par ailleurs, puisque pour tout entier n non nul on a

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

on en déduit que les suites $(t_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont égales. Cela implique, par unicité de la limite, que leur limite est identique. On a donc

$$\frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) = \ell_2.$$

On en déduit que $\ell_2 = \ell_1$ et par conséquent que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Cela implique que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_1 - \ell_2 = 0.$$

Copyrighted material

Solution de l'exercice 7

Montrons que si les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ extraites de la suite $(u_n)_n$ convergent alors nécessairement la sous-suite des termes d'indice pair $(u_{2n})_n$ et la sous-suite des termes d'indice impair $(u_{2n+1})_n$ convergent vers une même limite. On pourra alors conclure à la convergence de la suite $(u_n)_n$ d'après la proposition 5.19.

Signalons que l'énoncé indique que les sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent mais il n'est pas possible de conclure directement à la convergence de la suite $(u_n)_n$ en invoquant directement la proposition 5.19 car on ne suppose pas dans l'énoncé que ces deux suites convergent vers une même limite. C'est ce que nous allons établir.

Supposons que la suite $(u_{2n})_n$ converge vers $\ell_1 \in \mathbb{K}$ et que la suite $(u_{2n+1})_n$ converge vers $\ell_2 \in \mathbb{K}$. Considérons la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = u_{n^2}$. Les termes de la sous-suite des termes d'indice pairs $(v_{2n})_n$ extraite de la suite $(v_n)_n$ ont pour expression

$$v_{2n} = u_{(2n)^2} = u_{4n^2} = u_{2(2n^2)}.$$

On peut en déduire que cette suite est une suite extraite de la sous-suite des termes d'indice pair $(u_{2n})_n$ qui est extraite de la suite $(u_n)_n$. Par conséquent elle converge vers ℓ_1. Les termes de la sous-suite des termes d'indice impair $(v_{2n+1})_n$ extraite de la suite $(v_n)_n$ ont pour expression

$$v_{2n+1} = u_{(2n+1)^2} = u_{4n^2+2n+1} = u_{2(2n^2+n)+1}.$$

On peut en déduire que cette suite est une suite extraite de la sous-suite des termes d'indice impairs $(u_{2n+1})_n$ qui est extraite de la suite $(u_n)_n$. Par conséquent elle converge vers ℓ_2.

Par hypothèse la suite $(v_n)_n$ converge. Elle admet deux sous-suite qui convergent vers ℓ_1 et ℓ_2. Cela ne peut avoir lieu d'après la proposition 5.18 que si $\ell_1 = \ell_2$.

Solution de l'exercice 8

1 - Soit $(u_n)_n$ une suite numérique de Cauchy. D'après la définition 5.8 (on prend $\varepsilon = 1$),

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \big((n \geqslant N \text{ et } m \geqslant N) \Longrightarrow |u_n - u_m| \leqslant 1\big).$$

On en déduit que pour tout entier n supérieur à N,

$$|u_n| \leqslant |u_n - u_N + u_N| \leqslant |u_n - u_N| + |u_N| \leqslant 1 + |u_N|.$$

Par ailleurs les termes $u_0, \ldots, u_{N-1}$ sont bornés par le module ou la valeur absolue (selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) du plus grand d'entre eux. Finalement les termes de la suite $(u_n)_n$ sont tous bornés par

$$M = \max(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |u_N|).$$

Copyrighted material

2 - Soit $(u_n)_n$ une suite numérique de Cauchy. D'après la définition 5.8,

$$\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \big((n \geqslant N_1 \text{ et } m \geqslant N_1) \Longrightarrow |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon_1\big). \tag{11}$$

Par hypothèse, la suite $(u_n)_n$ possède une sous-suite $(u_{h(n)})_n$ qui converge. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de cette sous-suite. On a

$$\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N_2 \Longrightarrow |u_{h(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon_2\big). \tag{12}$$

Soit ε un réel strictement positif fixé. Prenons $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ dans (11) et $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$ dans (12) et notons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout entier n supérieur à N on a $h(n) \geqslant n \geqslant N$ car h est une extractrice. Par ailleurs, en utilisant la première inégalité triangulaire et les relations (11) et (12), on obtient :

$$|u_n - \ell| \leqslant \underbrace{|u_n - u_{h(n)}|}_{\leqslant \varepsilon/2} + \underbrace{|u_{h(n)} - \ell|}_{\leqslant \varepsilon/2} \leqslant \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$$

autrement dit que la suite $(u_n)_n$ convergeait vers ℓ.

3 - Considérons une suite de Cauchy. D'après la première question, on peut affirmer qu'il s'agit d'une suite bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on en déduit qu'on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente. On dispose donc d'une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente. On peut affirmer, d'après la deuxième question, que cette suite converge. On a donc montré que toute suite de Cauchy était nécessairement convergente.

Solution de l'exercice 9

1 - Pour tout entier n on a

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 3}{2} - \frac{u_{n-1} + 3}{2} = \frac{u_n - u_{n-1}}{2} = \frac{v_{n-1}}{2}.$$

La suite $(v_n)_n$ est donc une suite géométrique de raison $1/2$. Pour tout entier n on a donc

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

2 - Pour tout entier n on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Copyrighted material

La suite $(S_n)_n$ converge donc vers 2. Par ailleurs, pour tout entier n on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n - u_0.$$

On en déduit que

$$u_n = 1 + S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en conclut que la suite $(u_n)_n$ converge vers 3.

Solution de l'exercice 10

1 - Pour tout entier n on a

$$\begin{aligned} w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} - \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} = \frac{(\mu-\lambda)(v_n - u_n)}{(1+\mu)(1+\lambda)} \\ &= \frac{(\mu-\lambda)w_n}{(1+\mu)(1+\lambda)} = qw_n \end{aligned}$$

où

$$q = \frac{(\mu-\lambda)}{(1+\mu)(1+\lambda)}. \tag{13}$$

La suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = v_n - u_n$ est donc une suite géométrique de raison q. On a

$$|q| = \frac{|\mu-\lambda|}{(1+\mu)(1+\lambda)} \leqslant \frac{|\mu|+|\lambda|}{(1+\mu)(1+\lambda)}.$$

Or $0 < |\mu| + |\lambda| = \mu + \lambda < (1+\mu)(1+\lambda)$ donc $|q| < 1$.

2 - Puisque la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique de raison q avec $|q| < 1$, cette suite converge vers 0 et on a

$$\lim_{n\to 0} v_n - u_n = 0.$$

Intéressons-nous au sens de monotonie des deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} - u_n = \frac{\lambda}{1+\lambda}(v_n - u_n) = \frac{\lambda}{1+\lambda} w_n. \tag{14}$$

Or puisque la suite $(w_n)_n$ est une suite géométrique de raison q on a $w_n = q^n(v_0 - u_0)$ et

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\lambda}{1+\lambda} q^n (v_0 - u_0).$$

Copyrighted material

Puisque $\lambda > 0$, le sens de monotonie de la suite $(u_n)_n$ dépend du signe de q et de celui de $v_0 - u_0$. Pour que la suite $(u_n)_n$ soit monotone, il est nécessaire que q soit positif. En effet si q était négatif, le signe de $u_{n+1} - u_n$ changerait en fonction des changements de parité de n. D'après (13) la condition $q \geqslant 0$ est satisfaite si et seulement si $\mu \geqslant \lambda$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} - v_n = \frac{1}{1+\mu}(u_n - v_n) = -\frac{1}{1+\mu} w_n \\ &= -\frac{1}{1+\mu} q^n (v_0 - u_0). \end{aligned}$$

Puisque $\mu > 0$, le sens de monotonie de la suite $(v_n)_n$ dépend lui aussi du signe de q et de celui de $v_0 - u_0$. Là encore, on retrouve qu'une condition nécessaire pour que la suite $(v_n)_n$ soit monotone, est que q soit positif.

Puisqu'on suppose $u_0 \neq v_0$, deux cas sont à envisager selon le signe de $v_0 - u_0$.

1. Si $v_0 < u_0$ alors $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. La suite $(u_n)_n$ est décroissante et la suite $(v_n)_n$ est croissante.
2. Si $v_0 > u_0$ alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. La suite $(v_n)_n$ est décroissante et la suite $(u_n)_n$ est croissante.

Dans les deux cas, on peut conclure que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes sous la condition $\mu \geqslant \lambda$.

3 - Pour tout entier n on a d'après (14),

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= \frac{\lambda}{1+\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} w_n = \frac{\lambda}{1+\lambda}(v_0 - u_0) \sum_{k=0}^{n-1} q^k \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{1-q^n}{1-q}(v_0 - u_0). \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$, donc $u_n = u_0 + \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{1-q^n}{1-q}(v_0 - u_0)$.

Si $\mu \geqslant \lambda$ on a $0 \leqslant q < 1$. On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = u_0 + \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{1}{1-q}(v_0 - u_0) = u_0 + \frac{\lambda(1+\mu)}{1+2\lambda+\mu\lambda}(v_0 - u_0).$$

Puisque sous l'hypothèse $\mu \geqslant \lambda$ les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, la suite $(v_n)_n$ admet la même limite que la suite $(u_n)_n$.

4 - Si $u_0 = v_0$, la suite $(w_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme 0. Il s'agit donc de la suite nulle. On en déduit que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites constantes dont les termes sont égaux à u_0 (ou v_0).

Copyrighted material

Solution de l'exercice 11

1 - Supposons que la suite réelle $(u_n)_n$ admet pour limite le réel ℓ,

$$\forall \widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \widetilde{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant \widetilde{N} \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \widetilde{\varepsilon}). \tag{15}$$

La suite de terme général $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$ converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Soit ε un réel strictement positif fixé. Montrons que l'on peut trouver un entier N tel que $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout entier n supérieur à N. On a

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \left| \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} - \ell \right| = \left| \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n - n\ell}{n} \right| \\ &= \left| \frac{(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \ldots + (u_n - \ell)}{n} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k - \ell|}{n}. \end{aligned}$$

Prenons $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$ dans l'assertion (15) :

$$\exists \widetilde{N} \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (k \geqslant \widetilde{N} \Longrightarrow |u_k - \ell| \leqslant \varepsilon/2).$$

On en déduit que pour tout entier n avec $n \geqslant \widetilde{N}$,

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &\leqslant \sum_{k=1}^{\widetilde{N}-1} \frac{|u_k - \ell|}{n} + \sum_{k=\widetilde{N}}^{n} \frac{|u_k - \ell|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\widetilde{N}-1} |u_k - \ell| + \sum_{k=\widetilde{N}}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\widetilde{N}-1} |u_k - \ell| + (n - \widetilde{N} + 1)\frac{\varepsilon}{2n} \\ &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\widetilde{N}-1} M_{\widetilde{N}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\widetilde{N} - 1}{n} M_{\widetilde{N}} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \tag{16}$$

où on a noté $M_{\widetilde{N}} = \max\limits_{k=1,\ldots,\widetilde{N}-1} |u_k - \ell|$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\widetilde{N} - 1)M_{\widetilde{N}}}{n} = 0$,

$$\exists \widehat{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geqslant \widehat{N} \Longrightarrow \left| \frac{(\widetilde{N} - 1)M_{\widetilde{N}}}{n} \right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \right). \tag{17}$$

En combinant (16) et (17) on obtient, pour tout entier n avec $n \geqslant \max(\widetilde{N}, \widehat{N})$,

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Copyrighted material

Finalement on a établi que pour tout réel strictement positif ε on pouvait trouver un entier N (par exemple l'entier $N = \max(\widetilde{N}, \widehat{N})$) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

La suite $(v_n)_n$ converge donc vers ℓ.

2 - Pour montrer que la réciproque est fausse, il suffit de trouver un exemple de suite divergente qui converge au sens de Césaro. Considérons la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. Cette suite diverge. La suite des moyennes de Césaro est la suite de terme général v_n où

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Cette suite converge vers 0. On a donc établit qu'une suite pouvait converger au sens de Césaro sans converger au sens usuel.

3 - Nous allons montrer que moyennant une hypothèse supplémentaire sur la suite (la suite est monotone bornée) la réciproque est vraie : une suite (monotone bornée) convergente au sens de Césaro vers un réel ℓ converge (au sens usuel) vers ℓ.

Toute suite monotone bornée converge. Or d'après la première question une suite qui converge (au sens usuel), converge aussi au sens de Césaro vers la limite de la suite. Donc par unicité de la limite, si une suite est monotone et bornée et qu'elle converge au sens de Césaro vers un réel ℓ, ce réel ℓ est la limite de la suite.

Solution de l'exercice 12

1 - L'application ϕ est définie sur $]-1,1[$. Elle est dérivable sur cet intervalle de dérivée

$$\phi' : x \in]-1,1[\longmapsto \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Puisque ϕ' est positive sur $]-1,1[$ on en déduit que ϕ est croissante sur $]-1,1[$. On a $\phi(0) = 0$ donc ϕ est positive sur $[0,1[$.

2 - L'application ψ est définie sur $]-1,1[$. Elle est dérivable sur cet intervalle de dérivée

$$\psi' : x \in]-1,1[\longmapsto -\frac{2x^4}{3(1-x^2)^2}.$$

Puisque ψ' est négative sur $]-1,1[$ on en déduit que ψ est décroissante sur $]-1,1[$. On a $\psi(0) = 0$ donc ψ est négative sur $[0,1[$. On a donc pour tout $x \in [0,1[$,

$$\phi(x) \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

Copyrighted material

On en déduit que pour tout $x \in [0,1[$,

$$0 \leqslant \phi(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

3 - Pour tout entier n non nul la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = 1/(2n+1)$ est à valeurs dans $]0,1[$. On a

$$\phi(x_n) = \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1.$$

D'après la question précédente, on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

4 - Considérons les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}.$$

Pour tout entier n non nul on a

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(n+1)^{n+3/2}\,\mathrm{e}^{-(n+1)}}{n^{n+1/2}\,\mathrm{e}^{-n}} \\
&= \frac{1}{n+1}\,\mathrm{e}^{-1}\,\exp\big((n+3/2)\ln(n+1) - (n+1/2)\ln(n)\big) \\
&= \frac{1}{n+1}\,\mathrm{e}^{\ln(n+1)}\,\exp\left((n+1/2)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\right) \\
&= \exp\left(\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\right).
\end{aligned}$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on déduit du résultat de la question précédente que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \mathrm{e}^0 = 1.$$

La suite $(a_n)_n$ est donc croissante. Montrons à présent que la suite $(b_n)_n$ est décroissante. Pour tout entier n non nul on a

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{a_{n+1}}{a_n}\,\exp\left(\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\right)\,\exp\left(\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right).
\end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0.$$

Copyrighted material

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant \mathrm{e}^0 = 1.$$

La suite $(b_n)_n$ est donc décroissante.

Pour montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, il reste à vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. On a

$$b_n - a_n = a_n \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} - a_n = a_n\,(\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} - 1).$$

La suite $(a_n)_n$ est croissante, la suite $(b_n)_n$ est décroissante et pour tout entier n non nul $a_n \leqslant b_n$ puisque $\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} > 1$. On en déduit que la suite $(a_n)_n$ est majorée par b_0. Puisque la suite $(a_n)_n$ est croissante, elle converge donc (voir la proposition 5.16 , p. 183). Par ailleurs, il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty}(\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} - 1) = 0.$$

Cela permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ autrement dit que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. Comme $a_1 = 1/e > 0$ et que $\ell \geqslant a_1$ on peut en déduire que ℓ est strictement positif.

5 - Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ et d'après les propriétés de monotonie de ces suites, on a pour tout entier n non nul

$$a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$$

autrement dit

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!} \leqslant \ell \leqslant \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}$$

ou encore

$$1 = \mathrm{e}^0 \leqslant \frac{n!\,\ell}{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}.$$

La fonction exponentielle est continue sur $[0, \frac{1}{12n}]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires[16], il existe un réel $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\frac{n!\,\ell}{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}}.$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $[0, \frac{1}{12n}]$, elle est injective. Par conséquent on peut affirmer que le réel θ est unique. Ainsi,

$$n! = \frac{1}{\ell}\,n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}}$$

[16] Voir le théorème 13.3 en page 594.

Copyrighted material

6 - D'après l'inégalité de Wallis,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2} = \pi.$$

On en déduit que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}$$

converge vers $\sqrt{\pi}$. Or

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2^n n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} = \frac{2^n\, n!}{\sqrt{n}} \frac{2^n\, n!}{2^n\, n! \,(1 \cdot 3 \cdots (2n-1))} \\ &= \frac{2^n\, n!}{\sqrt{n}} \frac{2^n\, n!}{(2n)!} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

La suite $(a_n)_n$ converge vers ℓ, donc la sous suite des termes d'indice pair extraite de la suite $(a_n)_n$ converge aussi vers ℓ. Or

$$a_{2n} = \frac{2n^{2n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-2n}}{(2n)!} = \sqrt{2} \times \underbrace{\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}}_{=u_n} \times \underbrace{\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-n}}{n!} \right)^2}_{=a_n}.$$

La suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{\pi}$ et la suite $(a_n)_n$ converge vers ℓ. En passant « aux limites » dans la relation ci-dessus, on obtient, par unicité de la limite, la relation suivante

$$\ell = \sqrt{2}\sqrt{\pi}\ell^2.$$

La limite ℓ étant non nulle, on en déduit que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Copyrighted material

Troisième partie

Polynômes et fractions rationnelles

Copyrighted material

Copyrighted material

CHAPITRE 6

L'anneau des polynômes

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif muni des opérations usuelles (c'est-à-dire muni de l'addition $+_{\mathbb{K}}$ et de la multiplication $\times_{\mathbb{K}}$ que nous noterons aussi plus simplement $+$ et $\times$) qui peut être

- soit le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels,
- soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels,
- soit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On note 0 et 1 les éléments neutres pour l'addition et pour la multiplication. Il nous arrivera parfois de les noter $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$ pour marquer leur appartenance au corps $\mathbb{K}$.

6.1 Définition de l'ensemble des polynômes

6.1.1 Polynôme formel

Définition 6.1 *On appelle* ***polynôme formel*** *à coefficients dans $\mathbb{K}$ (ou plus simplement polynôme sur $\mathbb{K}$) une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{K}$ dont tous les termes à partir d'un certain rang sont égaux à $0_{\mathbb{K}}$. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. En d'autres termes, $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ signifie que*

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad a_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

Le polynôme P se note :

$$P \overset{not.}{=} (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \ldots).$$

Les termes a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_N se nomment ***coefficients du polynôme*** *P.*

On appelle ***polynôme nul*** le polynôme $0_{\mathbb{K}[X]}$ dont tous les coefficients sont nuls :

$$0_{\mathbb{K}[X]} \overset{déf.}{=} (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}, \ldots).$$

On le note plus simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté avec l'élément nul du corps $\mathbb{K}$. On appelle ***polynôme constant*** un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de la forme

$$P = (a_0, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \ldots).$$

Copyrighted material

Définition 6.2 *On dit que deux polynômes $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont* **égaux**, *et on note $P = Q$, si*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n.$$

6.1.2 Valuation et degré d'un polynôme

Définition 6.3 *Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$.*

✗ *Le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est appelé le* **degré** *de P. Il se note* $\deg(P)$.

✗ *Le coefficient $a_{\deg(P)}$ se nomme* **coefficient de plus haut degré** *de P et le polynôme P est dit* **normalisé** *(ou* **unitaire***) si $a_{\deg(P)} = 1$.*

✗ *Le plus petit entier n tel $a_n \neq 0$ est appelé la* **valuation** *de P. Elle se note* $\mathrm{val}(P)$.

Autrement dit, on a

$$\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{val}(P) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}.$$

Exemples

1. Soit $P = (1, 0, 0, 5 + \mathrm{i}, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$. On a $\mathrm{val}(P) = 0$ et $\deg(P) = 3$.

2. Soit $P = (0, 0, 12\mathrm{i}, 20, 1, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$. On a $\mathrm{val}(P) = 2$ et $\deg(P) = 4$. Ce polynôme est normalisé.

Remarques

1. Par convention, on pose $\deg\left(0_{\mathbb{K}[X]}\right) = -\infty$ et $\mathrm{val}\left(0_{\mathbb{K}[X]}\right) = +\infty$.

2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, on a : $\mathrm{val}(P) \leqslant \deg(P)$.

Définition 6.4 *Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est appelé* **monôme** *si*

$$\mathrm{val}(P) = \deg(P).$$

Exemple $P = (0, 0, 5, 0, \ldots)$ est un monôme car $\mathrm{val}(P) = \deg(P) = 2$.

Remarque Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a l'implication suivante

$$P = Q \implies \begin{cases} \mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(Q) \\ \deg(P) = \deg(Q) \end{cases}.$$

La réciproque est fausse car, par exemple, les polynômes $P = (0, 1, 1, 2, 0, \ldots)$ et $Q = (0, 3, 0, 12, 0, \ldots)$ sont différents. Ils ont pourtant même valuation ($\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(Q) = 1$) et même degré ($\deg(P) = \deg(Q) = 3$).

Copyrighted material

6.2 Structures algébriques sur les polynômes

6.2.1 Addition de polynômes

Définition 6.5 *Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On appelle* **somme de P et Q** *(ou* **addition de P et Q***) le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ noté $P+Q$ dont les coefficients sont*

$$c_n \overset{déf.}{=} a_n +_{\mathbb{K}} b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a ainsi défini une première loi (de composition) interne sur $\mathbb{K}[X]$ notée $+$.

Exemple Soient $P = (1,1,1,0,\ldots)$ et $Q = (0,2,3,-1,0,\ldots)$ deux polynômes. On a

$$\begin{aligned} P+Q &= (1,1,1,0,0,\ldots) + (0,2,3,-1,0,0,\ldots) \\ &= (1,3,4,-1,0,0,\ldots). \end{aligned}$$

Proposition 6.1 *Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On a :*

1. $\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$,
2. $\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min\{\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q)\}$.

Démonstration Commençons par montrer la propriété 1. Considérons deux polynômes $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(P) = p$ et $\deg(Q) = q$. Les coefficients a_p et b_q sont nécessairement non nuls. Supposons (sans perte de généralité) que $p \geqslant q$ et considérons les cas $p > q$ et $p = q$.

- Si $p > q$ alors $P+Q = (a_0+b_0, \ldots, a_q+b_q, a_{q+1}, \ldots, a_p, 0, 0, \ldots)$. Par hypothèse, $a_p \neq 0$. On en déduit alors que $\deg(P+Q) = p$, c'est-à-dire que :
$$\deg(P+Q) = \deg(P) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}.$$
- Si $p = q$ alors $P+Q = (a_0+b_0, \ldots, a_p+b_p, 0, 0, \ldots)$. Ainsi $\deg(P+Q) = p$ à la condition que $a_p + b_p \neq 0$, sinon $\deg(P+Q) < \deg(P)$.

Utilisant un raisonnement analogue, on montre la propriété 2. La rédaction est laissée en exercice. □

Remarque La démonstration de la propriété 1 de la proposition précédente fait apparaître le résultat suivant :

$$\deg(P) \neq \deg(Q) \implies \deg(P+Q) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}.$$

De même, on vérifie (à partir de la démonstration de la propriété 2) que

$$\mathrm{val}(P) \neq \mathrm{val}(Q) \implies \mathrm{val}(P+Q) = \min\{\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q)\}.$$

Copyrighted material

Structure de groupe commutatif sur $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni de la loi $+$ possède une structure de groupe commutatif. En effet, l'addition définie sur l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{K}[X]$ puisque l'addition $+_{\mathbb{K}}$ définie sur le corps $\mathbb{K}$ est elle-même une loi de composition interne sur $\mathbb{K}$. De plus, l'addition des polynômes possède les propriétés suivantes (qui se déduisent des propriétés de l'addition sur $\mathbb{K}$).

- Elle est associative, c'est-à-dire que pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, on a :
$$(P+Q)+R = P+(Q+R).$$
- Elle admet un élément neutre dans $\mathbb{K}[X]$. C'est le polynôme $0_{\mathbb{K}[X]}$ car
$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P.$$
- Tout polynôme $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ admet un symétrique dans $\mathbb{K}[X]$ qui est le polynôme $-P = (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, on vérifie que l'on a :
$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P + (-P) = (-P) + P = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$
- Elle est commutative : pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P + Q = Q + P$.

6.2.2 Multiplication d'un polynôme par un élément de $\mathbb{K}$

Définition 6.6 *Étant donnés le polynôme $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ et le scalaire α de $\mathbb{K}$, on définit le polynôme noté $\alpha \cdot P$ (ou plus simplement αP) de $\mathbb{K}[X]$ par :*
$$\alpha \cdot P \overset{\text{déf.}}{=} (\alpha \times_{\mathbb{K}} a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

La multiplication d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ par un élément de $\mathbb{K}$ ne définit pas une loi (de composition) interne sur $\mathbb{K}[X]$ mais une loi (de composition) externe sur $\mathbb{K}[X]$. On l'appelle loi produit externe. Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$
$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\} \quad \Big(\deg(\alpha \cdot P) = \deg(P) \quad \text{et} \quad \operatorname{val}(\alpha \cdot P) = \operatorname{val}(P) \Big).$$

Cette loi possède les propriétés suivantes.

Proposition 6.2 *La multiplication d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ par un élément de $\mathbb{K}$ vérifie :*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \quad \alpha \cdot (P+Q) = \alpha \cdot P + \alpha \cdot Q,$
2. $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot P = \alpha \cdot P + \beta \cdot P,$
3. $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \alpha \cdot (\beta \cdot P) = (\alpha \times_{\mathbb{K}} \beta) \cdot P,$
4. $\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot P = P.$

Démonstration Il suffit de revenir à la définition de la loi produit externe. La rédaction est laissée en exercice. □

Copyrighted material

6.2.3 Multiplication de polynômes

Définition 6.7 *Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On appelle* **produit de P et Q** *le polynôme de $\mathbb{K}[X]$, noté $P \times Q$ (ou plus simplement PQ) dont les coefficients sont*

$$c_n \overset{déf.}{=} a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 \overset{not.}{=} \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple Soient $P = (1, 2\mathrm{i}, 2, 0, 0, \ldots)$ et $Q = (1, 2, 0, 0, \ldots)$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Les coefficients c_n, $n \in \mathbb{N}$, du polynôme $P \times Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifient

$$\begin{cases} c_0 &= a_0b_0 = 1 \\ c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 = 2 + 2\mathrm{i} \\ c_2 &= \underbrace{a_0b_2}_{=0} + a_1b_1 + a_2b_0 = 2 + 4\mathrm{i} \\ c_3 &= \underbrace{a_0b_3}_{=0} + \underbrace{a_1b_2}_{=0} + a_2b_1 + \underbrace{a_3b_0}_{=0} = 4 \\ c_4 &= \underbrace{a_0b_4}_{=0} + \underbrace{a_1b_3}_{=0} + \underbrace{a_2b_2}_{=0} + \underbrace{a_3b_1}_{=0} + \underbrace{a_4b_0}_{=0} = 0 \\ \vdots & \\ c_n &= 0 \quad \text{pour tout } n \geqslant 4 \end{cases}$$

On a ainsi obtenu pour expression du polynôme $P \times Q$:

$$P \times Q = (1, 2 + 2\mathrm{i}, 2 + 4\mathrm{i}, 4, 0, 0, \ldots).$$

Proposition 6.3 *Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. On a :*

1. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$,
2. $\mathrm{val}(P \times Q) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.

Démonstration Démontrons la propriété 1 (la propriété 2 se démontre sur le même modèle ; elle est laissée en exercice). Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg P = p$ et $\deg Q = q$. On a donc $a_n = 0$ pour tout entier n strictement supérieur à p, et $b_n = 0$ pour tout entier n strictement supérieur à q. Soient c_n, $n \in \mathbb{N}$, les coefficients du polynôme $P \times Q$. Pour montrer que $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$, on doit vérifier d'une part que $c_{p+q} \neq 0$, et d'autre part que $c_{p+q+\ell} = 0$ pour tout $\ell \geqslant 1$. Commençons par calculer c_{p+q}. On vérifie que

$$c_{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} a_kb_{p+q-k} = a_0\overbrace{b_{p+q}}^{=0} + a_1\overbrace{b_{p+q-1}}^{=0} + \ldots + a_{p-1}\overbrace{b_{q+1}}^{=0} + \underbrace{a_pb_q}_{\neq 0} + \underbrace{a_{p+1}}_{=0}b_{q-1} + \ldots + \underbrace{a_{p+q}}_{=0}b_0 = a_pb_q \neq 0.$$

Copyrighted material

De même, on vérifie que

$$c_{p+q+1} = \sum_{k=0}^{p+q+1} a_k b_{p+q+1-k} = a_0 \overbrace{b_{p+q+1}}^{=0} + a_1 \overbrace{b_{p+q}}^{=0} + \ldots + a_{p-1} \overbrace{b_{q+2}}^{=0} + a_p \underbrace{b_{q+1}}_{=0} + \underbrace{a_{p+1}}_{=0} b_q + \ldots + \underbrace{a_{p+q+1}}_{=0} b_0 = 0.$$

Plus généralement, on peut vérifier que $c_{p+q+\ell} = 0$ pour tout $\ell \geqslant 1$. □

Structure d'anneau commutatif et intègre sur $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni des lois + et × possède une structure d'anneau commutatif. Nous avons déjà vérifié que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni de la loi + possède une structure de groupe commutatif (voir p. 220) et il est facile de vérifier, d'après le proposition 6.3, que la multiplication de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est une loi (de composition) interne sur $\mathbb{K}[X]$. Il reste alors à établir que la multiplication des polynômes possède les propriétés suivantes.[1]

- Elle est associative : pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,

$$(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R).$$

- Elle est distributive par rapport à l'addition : pour tous $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,

$$P \times (Q + R) = (P \times Q) + (P \times R) \quad \text{et} \quad (Q + R) \times P = (Q \times P) + (R \times P).$$

- Elle admet un élément neutre dans $\mathbb{K}[X]$ pour la multiplication. C'est le polynôme

$$1_{\mathbb{K}[X]} \overset{\text{déf.}}{=} (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

que l'on note plus simplement 1 si aucune confusion n'est à craindre avec l'élément unité du corps $\mathbb{K}$. On a

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P.$$

- Elle est commutative : pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \times Q = Q \times P$.

Il est à noter que si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés respectifs p et q, alors le polynôme $P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nul. En effet, son $(p+q)$-ième coefficient c_{p+q} est non nul puisque $c_{p+q} = a_p \times b_q$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. On a ainsi établi que pour tous P, Q de $\mathbb{K}[X]$

$$\Big(P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \text{et} \quad Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \Big) \implies P \times Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]},$$

autrement dit que l'anneau $\big(\mathbb{K}[X], +, \times\big)$ est intègre. Remarquons qu'à l'exception des polynômes constants et non nuls, les éléments de $\mathbb{K}[X]$ ne possèdent pas de symétrique pour la loi ×. L'anneau $\big(\mathbb{K}[X], +, \times\big)$ n'est donc pas un corps.

[1] Elles se déduisent des propriétés de la multiplication sur le corps $\mathbb{K}$.

Copyrighted material

6.2.4 Notion d'indéterminée

Définition 6.8 *On appelle* ***indéterminée*** *le polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *défini par*

$$X \overset{déf.}{=} (0,1,0,0,\ldots,).$$

On vérifie alors que

$$\begin{array}{rcccl} X^2 & = & X \times X & = & (0,0,1,0,0,0,0,\ldots), \\ X^3 & = & X^2 \times X & = & (0,0,0,1,0,0,0,\ldots), \\ X^4 & = & X^3 \times X & = & (0,0,0,0,1,0,0,\ldots), \end{array}$$

et par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X^n = (0,0,0,\ldots,0,\overset{(n+1)\text{-ième position}}{\overset{\downarrow}{1}},0,0,\ldots)$$

où le coefficient 1 est placé en $(n+1)$-ième position. On convient que

$$X^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}.$$

Ainsi le polynôme formel $P = (a_0, a_1, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots)$ de $\mathbb{K}[X]$ vérifie

$$\begin{array}{rcl} P & = & (a_0, a_1, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots) \\ & = & (a_0, 0, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots) + \ldots + (0, \ldots, 0, a_N, 0, \ldots) \\ & = & a_0 \cdot \underbrace{(1,0,0,\ldots)}_{=X^0} + a_1 \cdot \underbrace{(0,1,0,\ldots)}_{=X} + \ldots + a_N \cdot \underbrace{(0,\ldots,0,1,0,\ldots)}_{=X^N}. \end{array}$$

On a donc

$$P = a_0 \cdot X^0 + a_1 \cdot X^1 + a_2 \cdot X^2 + \ldots + a_N \cdot X^N$$

et on dit que le polynôme indéterminée X est ***générateur*** de $\mathbb{K}[X]$. Puisqu'il a été convenu que $X^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}$, on peut alors écrire le polynôme formel

$$P = (a_0, a_1, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots) \tag{1}$$

comme suit

$$P = a_0 1_{\mathbb{K}[X]} + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_N X^N \tag{2}$$

$$P = a_N X^N + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 1_{\mathbb{K}[X]} \tag{3}$$

et on dit que l'on a écrit P dans le sens des puissances croissantes (expression (2)) ou dans le sens des puissances décroissantes (expression (3)). Nous utiliserons désormais l'une ou l'autre des deux dernières écritures, délaissant ainsi la première écriture (1). On écrit encore

$$P \overset{not.}{=} \sum_{k=0}^{N} a_k X^k.$$

Remarque Nous convenons de l'abus d'écriture suivant : pour $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $X - \alpha$ le polynôme $X - \alpha \cdot 1_{\mathbb{K}[X]}$ de $\mathbb{K}[X]$. Ainsi, un polynôme constant $P = (a_0, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots)$ s'écrit $P = a_0 1_{\mathbb{K}[X]} = a_0$.

Copyrighted material

6.2.5 Fonction polynomiale

Définition 6.9 *À tout polynôme* $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{K}[X]$ *on associe l'application* $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ *définie pour tout* $x \in \mathbb{K}$ *par :*

$$\widetilde{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N.$$

Cette application est appelée **fonction polynomiale associée à** P.[2] *En particulier, la fonction polynomiale associée à un monôme est appelée* **fonction monôme**.

Exemples

1. Si $P = (1, 0, 0, 5 + \mathrm{i}, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$ alors $\forall x \in \mathbb{C}\ \ \widetilde{P}(x) = 1 + (5 + \mathrm{i})x^3$.
2. Si $P = (0, 0, 12\mathrm{i}, 20, 1, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$ alors $\forall x \in \mathbb{C}\ \ \widetilde{P}(x) = 12\mathrm{i}x^2 + 20x^3 + x^4$.
3. La fonction monôme associée à $P = (0, 0, 5, 0, \ldots)$ est $\widetilde{P} : x \longmapsto 5x^2$.

6.3 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

6.3.1 Division euclidienne

Théorème 6.1 (Division euclidienne) *Étant donnés deux polynômes* A *et* B *de* $\mathbb{K}[X]$ *avec* $B \neq 0$, *il existe un unique couple* (Q, R) *de polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *tels que :*

$$A = B \times Q + R \quad et \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Déterminer ce couple (Q, R), *c'est effectuer la division euclidienne de* A *par* B. *Les polynômes* A *et* B *se nomment respectivement* **dividende** *et* **diviseur**. *Les polynômes* Q *et* R *se nomment respectivement* **quotient** *et* **reste**.

Démonstration La démonstration se décompose en deux parties : existence des polynômes Q et R, et unicité du couple (Q, R).

▷ Commençons par la démonstration de l'existence. Elle est constructive en ce sens qu'elle fournit explicitement l'algorithme permettant d'effectuer une division euclidienne. Soient $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $B = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(A) = n$ et $\deg(B) = m$. On a

$$\begin{cases} A &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \qquad \text{avec } \ a_n \neq 0 \\ B &= b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \ldots + b_1 X + b_0 \qquad \text{avec } \ b_m \neq 0 \end{cases}.$$

[2] En toute rigueur, on devrait parler d'application polynomiale.

Copyrighted material

Considérons les deux cas suivants : $\deg(A) < \deg(B)$ et $\deg(A) \geqslant \deg(B)$. Supposons dans un premier temps que $\deg(A) < \deg(B)$. L'existence d'un couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = B \times Q + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$ est alors évidente. Il suffit en effet de prendre $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $R = A$ puisque l'on a

$$A = 0_{\mathbb{K}[X]} \times B + A \qquad \text{et} \qquad \deg(R) = \deg(A) < \deg(B).$$

Supposons maintenant que $\deg(A) \geqslant \deg(B)$, c'est-à-dire que $n \geqslant m$, et considérons les deux polynômes Q_1 et R_1 de $\mathbb{K}[X]$ définis par

$$Q_1 = \alpha_1 X^{n-m} \text{ avec } \alpha_1 = \frac{a_n}{b_m} \qquad \text{et} \qquad R_1 = A - Q_1 \times B.$$

La définition du monôme Q_1 a bien un sens puisque, par hypothèse, nous avons $b_m \neq 0$ et $n \geqslant m$. Remarquons que le coefficient α_1 est non nul. Il correspond au quotient des coefficients de plus haut degré de A et de B. Calculons le degré du polynôme R_1. Puisque $R_1 = A - Q_1 \times B$, d'après la proposition 6.1 on a

$$\deg(R_1) \leqslant \max\big\{\deg(A), \deg(Q_1 \times B)\big\}.$$

D'après la proposition 6.3, $\deg(Q_1 \times B) = \deg(Q_1) + \deg(B)$. On obtient donc

$$\deg(R_1) \leqslant \max\big\{\deg(A), \deg(Q_1) + \deg(B)\big\}.$$

Or $\deg(Q_1) + \deg(B) = (n - m) + m = n$. Donc, $\deg(R_1) \leqslant \max\{n, n\} = n$. On vérifie par ailleurs que le coefficient d'indice n du polynôme R_1 est

$$a_n - b_m \alpha_1 = a_n - b_m \frac{a_n}{b_m} = 0.$$

Par conséquent, le polynôme R_1 est de degré inférieur ou égal à $n - 1$, soit

$$\deg(R_1) \leqslant n - 1 < n = \deg(A).$$

Avons-nous $\deg(R_1) < \deg(B)$? Si la réponse est positive alors la démonstration est terminée puisqu'on peut prendre $Q = Q_1$ et $R = R_1$. Sinon on réitère sur le couple (R_1, B) ce que l'on vient de faire avec le couple (A, B). Soit $k_1 = \deg(R_1)$. On définit les deux polynômes Q_2 et R_2 de $\mathbb{K}[X]$ comme suit

$$Q_2 = \alpha_2 X^{k_1 - m} \qquad \text{et} \qquad R_2 = R_1 - Q_2 \times B$$

où le coefficient α_2 est défini comme le quotient des coefficients de plus haut degré de R_1 et B. Le scalaire α_2 est nécessairement non nul. On peut alors vérifier que :

$$\deg(R_2) \leqslant n - 2 < n - 1 < n = \deg(A).$$

Avons-nous $\deg(R_2) < \deg(B)$? Si la réponse est positive alors la démonstration est terminée. En effet, puisque

$$R_2 = R_1 - Q_2 \times B = (A - Q_1 \times B) - Q_2 \times B = A - (Q_1 + Q_2) \times B,$$

il suffit de prendre $Q = Q_1 + Q_2$ et $R = R_2$. Sinon on réitère sur le couple (R_2, B) ce que l'on vient de faire avec le couple (R_1, B). En procédant ainsi,

Copyrighted material

on construit une suite d'entiers $(\deg(R_k))_{k\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante, ce qui nous assure l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\deg(R_N) < \deg(B).$$

On peut alors arrêter le processus car

$$\begin{aligned} R_N &= R_{N-1} - Q_N \times B = R_{N-2} - (Q_{N-1} + Q_N) \times B \\ &= R_{N-3} - (Q_{N-2} + Q_{N-1} + Q_N) \times B \\ &= \dots \\ &= A - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N) \times B. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$ et $R = R_N$.

$\trianglerighteq$ Montrons maintenant l'unicité. Elle s'effectue en utilisant un mode de raisonnement par l'absurde. On suppose qu'il existe deux couples distincts de solutions. Soit $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = B \times Q_1 + R_1 \tag{4}$$

avec $\deg(R_1) < \deg(B)$. Soit $(Q_2, R_2) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = B \times Q_2 + R_2 \tag{5}$$

avec $\deg(R_2) < \deg(B)$. On suppose que $(Q_1, R_1) \neq (Q_2, R_2)$. Seul le cas où $Q_1 \neq Q_2$ et $R_1 \neq R_2$ est à considérer, les deux autres cas $Q_1 = Q_2$, $R_1 \neq R_2$ et $Q_1 \neq Q_2$, $R_1 = R_2$ permettant tout de suite de conclure à la contradiction. Par différence des équations (4) et (5), on a

$$B \times (Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1.$$

En raisonnant sur les degrés, on en déduit

$$\deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(R_2 - R_1).$$

Si $Q_1 \neq Q_2$ alors on a $\deg(Q_1 - Q_2) \geqslant 0$. On en déduit

$$\deg(B) \leqslant \deg(R_2 - R_1).$$

Par ailleurs, on a

$$\deg(R_2 - R_1) \leqslant \max\{\deg(R_2), \deg(-R_1)\} = \max\{\deg(R_2), \deg(R_1)\},$$

d'où, puisque $\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$,

$$\deg(R_2 - R_1) < \deg(B).$$

Cette dernière inégalité (stricte) est en contradiction avec l'inégalité (large) $\deg(B) \leqslant \deg(R_2 - R_1)$. On en déduit alors que nécessairement $Q_1 = Q_2$. Ceci implique d'après les relations (4) et (5) que $R_1 = R_2$. □

Copyrighted material

Remarques

1. Comme cela a été dit dans la démonstration, si $\deg(A) < \deg(B)$ alors, dans la division euclidienne de A par B, le quotient Q est le polynôme nul et le reste R le polynôme A, c'est-à-dire $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $R = A$, puisque l'on a :

$$A = 0_{\mathbb{K}[X]} \times B + A \quad \text{et} \quad \deg(R) = \deg(A) < \deg(B).$$

2. Supposons $\deg(A) \geqslant \deg(B)$. Puisque l'on a

$$\deg(R) < \deg(B) \leqslant \deg(B) + \deg(Q) = \deg(B \times Q),$$

on déduit de l'égalité $A = B \times Q + R$ et de la remarque faite en bas de la page 219 que $\deg(A) = \max\{\deg(B \times Q), \deg(R)\} = \deg(B \times Q)$, c'est-à-dire que

$$\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q).$$

Exemples

1. Considérons dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes $A = X^2 + \mathrm{i}$ et $B = X^3 - \mathrm{i}X^2 + \mathrm{i}X + 1$. Remarquons que $\deg(A) = 2 < \deg(B) = 3$. Par conséquent, le quotient Q et le reste R dans la division euclidienne de A par B sont

$$Q = 0_{\mathbb{C}[X]} \qquad \text{et} \qquad R = X^2 + \mathrm{i}.$$

Remarquons qu'aucun calcul n'a été nécessaire pour trouver Q et R.

2. Considérons maintenant les deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants

$$A = X^4 + 2X^3 - X + 6 \qquad \text{et} \qquad B = X^3 - 6X^2 + X + 4.$$

Effectuons la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{R}[X]$. Remarquons que $\deg(A) \geqslant \deg(B)$. Par conséquent, le calcul des deux polynômes Q et R n'est pas aussi immédiat qu'il l'a été dans l'exemple précédent. Pour déterminer Q et R, nous procédons en suivant pas à pas chacune des étapes explicitées dans la démonstration. En pratique, il est conseillé de disposer les deux polynômes A et B comme suit :

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{A = X^4 + 2X^3 - X + 6}^{\text{Dividende}} & \overbrace{X^3 - 6X^2 + X + 4 = B}^{\text{Diviseur}} \\
-Q_1 \times B = -(X^4 - 6X^3 + X^2 + 4X) & \\
\hline
R_1 = 8X^3 - X^2 - 5X + 6 & \underbrace{X + 8}_{\text{Quotient}} = \underbrace{Q_1 + Q_2}_{= Q} \\
-Q_2 \times B = -(8X^3 - 48X^2 + 8X + 32) & \\
\hline
R_2 = \underbrace{47X^2 - 13X - 26}_{\text{Reste}} &
\end{array}$$

Nous avons arrêté le processus car le degré du reste $R_2 = 47X^2 - 13X - 26$ est strictement inférieur au degré du diviseur $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$. Ainsi,

$$A = B \times Q + R \qquad \text{avec} \qquad Q = X + 8 \qquad \text{et} \qquad R = 47X^2 - 13X - 26$$

Copyrighted material

et $\deg(R) < \deg(B)$. On a donc l'égalité

$$X^4 + 2X^3 - X + 6 = (X^3 - 6X^2 + X + 4)(X + 8) + 47X^2 - 13X - 26$$

que l'on peut justifier indépendamment du calcul précédent en développant le terme de droite.

ATTENTION Pour effectuer la division euclidienne de A par B lorsque $\deg(A) \geqslant \deg(B)$, il a été impératif d'écrire les deux polynômes A et B dans le sens des puissances décroissantes. La division euclidienne est d'ailleurs aussi appelée ***division suivant les puissances décroissantes***.

Exercice 1 *Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les polynômes A_n et B de $\mathbb{C}[X]$ définis par*

$$A_n = X^n \sin\phi - X \sin n\phi + \sin(n-1)\phi \quad et \quad B = X^2 - 2X\cos\phi + 1.$$

On désigne par Q_n et R_n respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A_n par B.
1 - En effectuant la division euclidienne, vérifier que :

$$(a)\ Q_2 = \sin\phi, \qquad (b)\ Q_3 = X\sin\phi + \sin 2\phi,$$

$$(c)\ Q_4 = X^2\sin\phi + X\sin 2\phi + \sin 3\phi.$$

2 - Sans effectuer de division, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, $R_n = 0$ et

$$Q_n = X^{n-2}\sin\phi + X^{n-3}\sin 2\phi + \ldots + X\sin(n-2)\phi + \sin(n-1)\phi.$$

6.3.2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 6.10 *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que B* ***divise*** *A (ou que A* ***est divisible par*** *B) si*

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X] \quad A = B \times Q.$$

En d'autres termes, B divise A si le reste de la division euclidienne de A par B est nul. On dit aussi que A est un ***multiple*** *de B ou que B est un* ***diviseur*** *de A.*

Si A et B désignent deux polynômes non nuls et si B divise A alors

$$\deg(B) \leqslant \deg(A).$$

Copyrighted material

Remarques

1. Tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ est divisible par lui-même puisque $A = A \times 1_{\mathbb{K}[X]}$.

2. Notons que le polynôme nul est divisible par n'importe quel polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ puisque $0_{\mathbb{K}[X]}$ est absorbant pour la loi $\times$, c'est-à-dire puisque

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad 0_{\mathbb{K}[X]} = P \times 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

3. Soient A, B, C et D quatre polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On vérifie aisément que
- si A divise B et B divise C alors A divise C,
- si A divise B alors A divise $B \times C$,
- si A divise B et A divise C alors A divise $B + C$,
- si A divise B et C divise D alors $A \times C$ divise $B \times D$.

4. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Si B divise A alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\alpha \cdot B$ divise A. En effet, puisque B divise A, il y a existence d'un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = B \times Q$. On en déduit

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}^* \quad A = (\alpha \cdot B) \times (\frac{1}{\alpha} \cdot Q).$$

En particulier, puisque A divise A, tout polynôme de la forme $\alpha \cdot A$ avec α appartenant à $\mathbb{K}^*$ divise A. En ce sens, on dit que la divisibilité est définie à un facteur multiplicatif près.

Définition 6.11 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$.*

✗ *Le polynôme P est dit* **irréductible** *(ou* **premier***) dans $\mathbb{K}[X]$ s'il n'admet pour diviseur que les polynômes de la forme $\alpha \cdot 1_{\mathbb{K}[X]}$ et de la forme $\alpha \cdot P$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.*[3]

✗ *Dans le cas contraire, on dit qu'il est* **réductible**.

Exemple Le polynôme $P = X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. En revanche, il est divisible dans $\mathbb{C}[X]$ par les deux polynômes $X - \mathrm{i}$ et $X + \mathrm{i}$. Le polynôme $P = X^2 + 1$ est donc réductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Remarques

1. Un polynôme irréductible est toujours non nul.

2. Si $P = a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ avec $a_1 \neq 0$ alors P est un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

[3] Autrement dit, le polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible lorsque les seuls polynômes qui le divisent sont, à un facteur multiplicatif près, $1_{\mathbb{K}[X]}$ et lui-même.

Copyrighted material

Exercice 2 *Soient $(m,p) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $m \geqslant p$ et $a \neq 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $A_m = X^m - a^m$ soit divisible par le polynôme $B_p = X^p - a^p$. Expliciter le quotient et le reste de la division euclidienne de A_m par B_p dans le cas où :*

$$kp \leqslant m < (k+1)p \quad \textit{avec} \quad k \in \mathbb{N}.$$

6.3.3 Division selon les puissances croissantes

Théorème 6.2 (Division selon les puissances croissantes) *Étant donnés un entier k et deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathrm{val}\,(B) = 0$, il existe un unique couple (Q_k, R_k) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que :*

$$A = B \times Q_k + X^{k+1} R_k \quad \textit{et} \quad \deg(Q_k) \leqslant k.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, trouver Q_k et R_k, c'est effectuer la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre k. Les polynômes A et B se nomment respectivement **dividende** *et* **diviseur**. *Les polynômes Q_k et $X^{k+1}R_k$ se nomment respectivement* **quotient** *et* **reste à l'ordre** *k.*

Démonstration Elle se décompose en deux parties : existence (à l'ordre k) des polynômes Q_k et R_k, et unicité (à l'ordre k) du couple (Q_k, R_k).

$\trianglerighteq$ Montrons l'existence en effectuant une récurrence sur l'ordre k. On note respectivement $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ les polynômes A et B tels que $n = \deg(A)$ et $m = \deg(B)$. Commençons par montrer le résultat pour $k = 0$. L'hypothèse $\mathrm{val}\,(B) = 0$ nous assure que $b_0 \neq 0$. Soit Q_0 le polynôme constant de $\mathbb{K}[X]$ défini par $Q_0 = a_0/b_0$. Il est nul si $a_0 = 0$. Intéressons-nous au polynôme $A - B \times Q_0$. Sa valuation est supérieure ou égale à 1. En effet, en notant $A - B \times Q_0 = (c_p)_{p\in\mathbb{N}}$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad c_p = a_p - \frac{a_0}{b_0} b_p$$

et en particulier, $c_0 = a_0 - (a_0/b_0)b_0 = 0$. On peut par conséquent factoriser le polynôme $A - B \times Q_0$ par X, ce qui signifie que

$$\exists R_0 \in \mathbb{K}[X] \quad A - B \times Q_0 = X R_0.$$

Si $a_0 = 0$ alors $Q_0 = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $\deg(Q_0) = -\infty$. Si $a_0 \neq 0$ alors Q_0 est un polynôme constant non nul ; il vérifie $\deg(Q_0) = 0$. Dans les deux cas, $\deg(Q_0) < 1$.

Cela termine la démonstration de la propriété pour $k = 0$ puisqu'on a montré qu'il existe $(Q_0, R_0) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = B \times Q_0 + X R_0$ et $\deg(Q_0) < 1$. Supposons maintenant (c'est notre hypothèse de récurrence) la propriété vraie à l'ordre k :

$$\exists (Q_k, R_k) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \quad A = B \times Q_k + X^{k+1} R_k$$

Copyrighted material

avec $\deg(Q_k) \leqslant k$. Montrons qu'elle est vraie à l'ordre $k+1$, c'est-à-dire montrons que

$$\exists (Q_{k+1}, R_{k+1}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \quad A = B \times Q_{k+1} + X^{k+2} R_{k+1}$$

avec $\deg(Q_{k+1}) \leqslant k+1$. Appliquons sur le polynôme R_k un raisonnement identique à celui que nous avons utilisé pour $k = 0$. On note $(r_p)_{p\in\mathbb{N}}$ le polynôme R_k. On définit le polynôme $\widehat{Q} = r_0/b_0$. C'est un polynôme constant qui est nul si $r_0 = 0$. La valuation du polynôme $R_k - B \times \widehat{Q}$ est alors supérieure ou égale à 1, ce qui montre l'existence d'un polynôme $\widehat{R} \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$R_k - B \times \widehat{Q} = X\widehat{R},$$

autrement dit tel que

$$R_k = B \times \widehat{Q} + X\widehat{R}.$$

En injectant cette dernière égalité dans la relation $A = B \times Q_k + X^{k+1} R_k$ (qui est l'hypothèse de récurrence), il vient

$$A = B \times \left(Q_k + X^{k+1}\widehat{Q}\right) + X^{k+2}\widehat{R}$$

et on a

$$\deg\left(Q_k + X^{k+1}\widehat{Q}\right) \leqslant \max\Big\{\underbrace{\deg(Q_k)}_{\leqslant k}, \underbrace{\deg(X^{k+1})}_{=k+1} + \underbrace{\deg(\widehat{Q})}_{=0}\Big\} = k+1$$

où on a considéré uniquement le cas où le polynôme constant $\widehat{Q} = r_0/b_0$ est non nul (ce qui correspond à $r_0 \neq 0$). Si le scalaire r_0 est nul alors on a $\deg\left(Q_k + X^{k+1}\widehat{Q}\right) = \deg(Q_k) \leqslant k < k+1$. On a donc dans les deux cas

$$\deg\left(Q_k + X^{k+1}\widehat{Q}\right) \leqslant k+1.$$

La démonstration de la propriété à l'ordre $k+1$ est terminée en choisissant $Q_{k+1} = Q_k + X^{k+1}\widehat{Q}$ et $R_{k+1} = \widehat{R}$.

$\trianglerighteq$ Pour montrer que le couple (Q_k, R_k) est unique, on utilise un raisonnement par l'absurde. On suppose qu'il existe deux couples distincts de solutions, c'est-à-dire on suppose qu'il existe $(Q_{k,1}, R_{k,1}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = B \times Q_{k,1} + X^{k+1} R_{k,1} \tag{6}$$

avec $\deg(Q_{k,1}) \leqslant k$, et qu'il existe $(Q_{k,2}, R_{k,2}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = B \times Q_{k,2} + X^{k+1} R_{k,2} \tag{7}$$

avec $\deg(Q_{k,2})$, et que $(Q_{k,1}, R_{k,1}) \neq (Q_{k,2}, R_{k,2})$. On considère seulement le cas où $Q_{k,1} \neq Q_{k,2}$ et $R_{k,1} \neq R_{k,2}$. Les deux autres cas $Q_{k,1} = Q_{k,2}$, $R_{k,1} \neq R_{k,2}$ et $Q_{k,1} \neq Q_{k,2}$, $R_{k,1} = R_{k,2}$ sont immédiats. Par différence de (6) et (7) on a

$$B \times (Q_{k,1} - Q_{k,2}) = X^{k+1}(R_{k,2} - R_{k,1}),$$

Copyrighted material

et, compte tenu que $\mathrm{val}\,(B) = 0$, cela implique que

$$\mathrm{val}\,(Q_{k,1} - Q_{k,2}) = k + 1 + \mathrm{val}\,(R_{k,2} - R_{k,1})\,.$$

L'hypothèse $R_{k,2} \neq R_{k,1}$ impose que

$$\mathrm{val}\,(Q_{k,1} - Q_{k,2}) \geqslant k + 1.$$

Par ailleurs, $\deg(Q_{k,1}) \leqslant k < k+1$ et $\deg(Q_{k,2}) \leqslant k < k+1$. Donc

$$\deg(Q_{k,1} - Q_{k,2}) < k + 1,$$

ce qui est en parfaite contradiction avec le fait que $\mathrm{val}\,(Q_{k,1} - Q_{k,2}) \geqslant k+1$. Ainsi $R_{k,2} = R_{k,1}$. On déduit alors des relations (6) et (7) que $Q_{k,2} = Q_{k,1}$. □

Exemples

1. Soient $A = 4 + X^2$ et $B = 1 + X + X^2$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Effectuons la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre 2. Nous utilisons la disposition suivante :

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{A = 4 + X^2}^{\text{Dividende}} & \overbrace{1 + X + X^2 = B}^{\text{Diviseur}} \\ -(4 + 4X + 4X^2) & \hline\hline \\ \hline -4X - 3X^2 & \underbrace{4 - 4X + X^2}_{\text{Quotient à l'ordre 2}} = Q_2 \\ -(-4X - 4X^2 - 4X^3) & \\ \hline X^2 + 4X^3 & \\ -(X^2 + X^3 + X^4) & \\ \hline X^3 R_2 = \underbrace{3X^3 - X^4}_{\text{Reste}} & \end{array}$$

Nous avons arrêté le processus car la valuation du reste $3X^3 - X^4$ est strictement supérieure à 2 et le degré du quotient est inférieur ou égal à 2 (rappelons qu'ici, 2 est l'ordre de la division). Ainsi, $A = BQ_2 + X^3 R_2$ avec $Q_2 = 4 - 4X + X^2$, $R_2 = 3 - X$ et $\deg(Q_2) = 2$. On a donc l'égalité[4]

$$4 + X^2 = (1 + X + X^2)(4 - 4X + X^2) + 3X^3 - X^4.$$

2. Soient $A = X + X^4$ et $B = 1 + X$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Effectuons la division de A par B selon les puissances croissantes aux ordres $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

- À l'ordre 0, on a : $Q_0 = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $XR_0 = X + X^4$,
- Pour l'ordre $k \geqslant \mathrm{val}(A)$, on utilise la disposition suivante :

$$\begin{array}{r|l} X + X^4 & 1 + X \\ -(X + X^2) & \hline\hline \\ \hline -X^2 + X^4 & X - X^2 + X^3 \\ -(-X^2 - X^3) & \\ \hline X^3 + X^4 & \\ -(X^3 + X^4) & \\ \hline 0_{\mathbb{R}[X]} & \end{array}$$

[4] que l'on peut vérifier en développant le terme de droite (ce qui est d'ailleurs recommandé).

Copyrighted material

On obtient ainsi

· à l'ordre 1 : $Q_1 = X$ et $X^2 R_1 = -X^2 + X^4$,

· à l'ordre 2 : $Q_2 = X - X^2$ et $X^3 R_2 = X^3 + X^4$,

· à l'ordre 3 : $Q_3 = X - X^2 + X^3$ et $X^4 R_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$,

et on en déduit

$$\forall k \geqslant 3 \quad \Big(Q_k = X - X^2 + X^3 \quad \text{et} \quad X^{k+1} R_k = 0_{\mathbb{R}[X]} \Big).$$

Remarque Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et soient Q_k le quotient et $X^{k+1} R_k$ le reste dans la division selon les puissances croissantes à l'ordre k de A par B. On a

$$k < \text{val}(A) \quad \Longrightarrow \quad \big(Q_k = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \text{et} \quad X^{k+1} R_k = A \big).$$

Par exemple, dans $\mathbb{R}[X]$, la division selon les puissances croissantes de $X^2 + X^3$ par $1 + X - 2X^2$ donne

– à l'ordre 0 : $Q_0 = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $XR_0 = X^2 + X^3$:

$$(X^2 + X^3) = (1 + X - 2X^2) \times 0_{\mathbb{R}[X]} + X(X + X^2),$$

– à l'ordre 1 : $Q_1 = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $X^2 R_1 = X^2 + X^3$:

$$(X^2 + X^3) = (1 + X - 2X^2) \times 0_{\mathbb{R}[X]} + X^2(1 + X),$$

– à l'ordre 2 : $Q_2 = X^2$ et $X^3 R_2 = 2X^4$

$$(X^2 + X^3) = (1 + X - 2X^2) \times X^2 + X^3 2X,$$

car

$$\begin{array}{r} X^2 + X^3 \\ \hline -(X^2 + X^3 - 2X^4) \\ \hline 2X^4 \end{array} \Bigg\| \begin{array}{l} 1 + X - 2X^2 \\ \hline\hline X^2 \end{array}$$

ATTENTION Comme l'ont montré les exemples précédents, pour effectuer une division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre k avec $k \geqslant \text{val}(A)$, il est impératif d'écrire les deux polynômes A et B dans le sens des puissances croissantes !

6.4 Dérivation des polynômes

6.4.1 Définition d'un polynôme dérivé

Définition 6.12 *Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n \geqslant 1$. On appelle* **polynôme dérivé de P** *le polynôme de $\mathbb{K}[X]$, noté P', défini par :*

$$P' \overset{\text{déf.}}{=} a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \ldots + n a_n X^{n-1}.$$

Si le polynôme P est de degré 0 alors le polynôme dérivée P' est $0_{\mathbb{K}[X]}$.

Copyrighted material

Autrement dit, si $n \geqslant 1$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P' \overset{déf.}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

Remarque Si $\deg(P) = n$ avec $n \geqslant 1$ alors $\deg(P') = n - 1$.

Exemple Si $P = 3 + 2X^3 + 4X^5$ alors $P' = 6X^2 + 20X^4$.

Lien avec la notion de dérivation en analyse.

Plaçons-nous dans le cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et soit P' son polynôme dérivé. Considérons maintenant les fonctions polynomiales $\widetilde{P}$ et $\widetilde{P'}$ associées respectivement à P et à P'. On constate que $\widetilde{P'}(x)$ correspond à la dérivée de la fonction polynomiale $\widetilde{P}(x)$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{P'}(x) = \frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}x}(x).$$

En effet, la dérivée de $x \longmapsto a_k x^k$ étant $x \longmapsto k a_k x^{k-1}$, si $\widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}x}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \widetilde{P'}(x).$$

On a les propriétés suivantes.

Proposition 6.4 *Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :*

1. $(P+Q)' = P' + Q'$,
2. $(\lambda \cdot P)' = \lambda \cdot P'$,
3. $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$.

Démonstration Les propriétés 1 et 2 sont aisées à démontrer. La démonstration de la propriété 3 s'effectue en deux étapes.

$\trianglerighteq$ Première étape : on montre que la propriété est vraie pour les monômes $P = X^h$ et $Q = X^k$. On a d'une part pour tout $(h,k) \in \mathbb{N}^2$, $P \times Q = X^{h+k}$, d'où

$$(P \times Q)' = (h+k)X^{h+k-1}.$$

D'autre part, on a $P' = hX^{h-1}$ et $Q' = kX^{k-1}$, d'où

$$P' \times Q + Q' \times P = (hX^{h-1}) \times X^k + X^h \times (kX^{k-1}) = (h+k)X^{h+k-1}.$$

On a donc bien

$$P' \times Q + Q' \times P = (P \times Q)'.$$

Copyrighted material

$\trianglerighteq$ Deuxième étape : soient $P = \sum_{h=0}^{n} a_h X^h$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. On a

$$(P \times Q)' = \left(\left(\sum_{h=0}^{n} a_h X^h \right) \times \left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k \right) \right)' = \sum_{h=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m} a_h b_k \left(X^h \times X^k \right)' \right).$$

Or on vient de montrer à l'étape précédente que :

$$(X^h \times X^k)' = (X^h)' \times X^k + X^h \times (X^k)'.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(P \times Q)' &= \sum_{h=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m} a_h b_k \left((X^h)' \times X^k + X^h \times (X^k)' \right) \right) \\
&= \sum_{h=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m} a_h b_k (X^h)' \times X^k \right) + \sum_{h=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m} a_h b_k X^h \times (X^k)' \right) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{h=0}^{n} a_h (X^h)' \right)}_{= P'} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k \right)}_{= Q} + \underbrace{\left(\sum_{h=0}^{n} a_h X^h \right)}_{= P} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{m} b_k (X^k)' \right)}_{= Q'}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q',$$

ce qui termine la démonstration. □

Les deux premières propriétés de la proposition 6.4 s'énoncent comme suit : la dérivée de la somme de deux polynômes est égale à la somme de leurs dérivées et la dérivée du produit d'un polynôme par un scalaire est égale au produit de la dérivée de ce polynôme par ce même scalaire. En ce sens, on dit que l'opération de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ est ***linéaire*** ou encore que la dérivation est une ***application linéaire*** de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

6.4.2 Dérivées successives - formule de Taylor

Définition 6.13 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le* ***polynôme dérivé d'ordre*** *n du polynôme P, que l'on note $P^{(n)}$, comme suit :*

$$P^{(0)} \overset{déf.}{=} P \quad et \quad \left(\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad P^{(k)} \overset{déf.}{=} \left(P^{(k-1)} \right)' \right).$$

On a successivement $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = (P')'$, $P^{(3)} = (P'')'$, *etc*, et on note $P^{(2)} = P''$. On montre par récurrence sur l'ordre k (la rédaction est laissée en exercice) que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(P + Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)} \qquad \text{et} \qquad (\lambda \cdot P)^{(k)} = \lambda \cdot P^{(k)}$$

Copyrighted material

et on dit que l'opération de dérivation à l'ordre k sur $\mathbb{K}[X]$ est ***linéaire***.

Étudions la dérivée d'ordre h du monôme X^k. On vérifie

$$\begin{aligned}
(X^k)^{(1)} &= kX^{k-1},\\
(X^k)^{(2)} &= k(k-1)X^{k-2},\\
(X^k)^{(3)} &= k(k-1)(k-2)X^{k-3},\\
&\vdots\\
(X^k)^{(h)} &= k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)X^{k-h} = \frac{k!}{(k-h)!}X^{k-h} \quad \text{si } h \leqslant k.
\end{aligned}$$

En particulier, en prenant $h = k$,

$$(X^k)^{(k)} = \underbrace{k \times (k-1) \times (k-2) \times \ldots \times 2 \times 1}_{=k!} X^0,$$

c'est-à-dire $(X^k)^{(k)} = k!$ puisque $X^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}$. C'est un polynôme constant. Ses dérivées d'ordre supérieur strictement à k sont donc nulles :

$$h > k \quad \Longrightarrow \quad (X^k)^{(h)} = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

Considérons maintenant le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de degré n et déterminons le polynôme dérivé d'ordre h de P. En dérivant terme à terme et en appliquant les résultats concernant les monômes, on obtient pour $h \leqslant n$:

$$P^{(h)} = \sum_{k=h}^{n} \Big(a_k k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)X^{k-h} \Big)$$

et en particulier, en prenant $h = n$,

$$P^{(n)} = a_n \times \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}_{=n!} X^0 = a_n \times n!.$$

C'est un polynôme constant. Ainsi,

$$h > n \quad \Longrightarrow \quad P^{(h)} = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 6.5 (Formule de MacLaurin pour les polynômes) *Soit* $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ *un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$. *On a*

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad a_k = \frac{\widetilde{P^{(k)}}(0)}{k!}$$

où $\widetilde{P^{(k)}}$ *est la fonction polynomiale associée à* $P^{(k)}$. *En d'autres termes, si* P *est un polynôme de degré* n *alors*

$$P = \widetilde{P}(0) + \frac{\widetilde{P'}(0)}{1!}X + \frac{\widetilde{P''}(0)}{2!}X^2 + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(0)}{n!}X^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(0)}{k!}X^k.$$

Copyrighted material

Démonstration Pour $h \leqslant n$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\widetilde{P^{(h)}}(x) &= \sum_{k=h}^{n}\Big(a_k \times k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)x^{k-h}\Big)\\ &= a_h \times h! + \sum_{k=h+1}^{n}\Big(a_k k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)x^{k-h}\Big).\end{aligned}$$

Choisissons $x = 0$. On en déduit que : $\widetilde{P^{(h)}}(0) = a_h \times h!$ pour $h \leqslant n$. On vérifie de plus que $\widetilde{P}(0) = a_0$, ce qui termine la démonstration. □

Plus généralement, on a la formule de Taylor pour les polynômes (on remarque qu'en prenant $c = 0$, on retrouve la formule de MacLaurin pour les polynômes).

Théorème 6.3 (Formule de Taylor pour les polynômes) *Soient c un scalaire de $\mathbb{K}$ et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$. On a*

$$P = \widetilde{P}(c) + \frac{\widetilde{P'}(c)}{1!}(X-c) + \frac{\widetilde{P''}(c)}{2!}(X-c)^2 + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(c)}{n!}(X-c)^n$$

où, pour tout entier k compris entre 0 et n, $\widetilde{P^{(k)}}$ désigne la fonction polynomiale associée au polynôme $P^{(k)}$.

Démonstration Comme nous l'avons fait pour la démonstration de la troisième propriété de la proposition 6.4, nous commençons par montrer que la propriété est vraie pour le monôme X^k où $k \in \mathbb{N}$. Soit $c \in \mathbb{K}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, on vérifie que l'on a

$$X^k = (X-c+c)^k = \sum_{\ell=0}^{k}\frac{k!}{(k-\ell)!\times\ell!}c^{k-\ell}(X-c)^\ell = \sum_{\ell=0}^{k}\frac{\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell$$

où on a utilisé que $\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c) = \dfrac{k!}{(k-\ell)!}c^{k-\ell}$ pour tout $\ell \in \{0,1,\dots,k\}$ puisque

$$\forall \ell \in \{0,1,\dots,k\} \quad (X^k)^{(\ell)} = \frac{k!}{(k-\ell)!}X^{k-\ell}.$$

Nous considérons à présent le polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ et nous notons $\widetilde{P}$ sa fonction polynomiale. D'après ce qui précède, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n}a_kX^k = \sum_{k=0}^{n}\left(a_k\sum_{\ell=0}^{k}\frac{\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell\right).$$

Puisque $\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c) = 0$ pour tout entier ℓ strictement supérieur à k, on a

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n\} \quad \sum_{\ell=0}^{k}\frac{\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell = \sum_{\ell=0}^{n}\frac{\widetilde{\left(X^k\right)^{(\ell)}}(c)}{\ell!}(X-c)^\ell.$$

Copyrighted material

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\widetilde{(X^k)^{(\ell)}}(c)}{\ell!} (X-c)^\ell \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \left(\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \widetilde{(X^k)^{(\ell)}}(c) \right) \frac{1}{\ell!} (X-c)^\ell \right) \end{aligned}$$

où, dans un premier temps, on a fait entrer le coefficient a_k dans la somme indicée par ℓ, puis interverti les deux sommes et enfin factorisé dans la deuxième somme par $\frac{1}{\ell!}(X-c)^\ell$. D'après la propriété de linéarité de la dérivation d'ordre ℓ,

$$a_0 (X^0)^{(\ell)} + \ldots + a_n (X^n)^{(\ell)} = (a_0 X^0 + \ldots + a_n X^n)^{(\ell)} = P^{(\ell)},$$

d'où

$$a_0 \widetilde{(X^0)^{(\ell)}}(c) + \ldots + a_n \widetilde{(X^n)^{(\ell)}}(c) = \widetilde{P^{(\ell)}}(c).$$

Finalement, on en déduit

$$P = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\widetilde{P^{(\ell)}}(c)}{\ell!} (X-c)^\ell = \widetilde{P}(c) + \frac{\widetilde{P'}(c)}{1!}(X-c) + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(c)}{n!}(X-c)^n,$$

ce qui termine la démonstration. □

Exercice 3 *Trouver un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que :*

$$\widetilde{P}(1) = 3, \quad \widetilde{P'}(1) = 4, \quad \widetilde{P''}(1) = 5 \quad \textit{et} \quad \widetilde{P^{(n)}}(1) = 0 \ \forall n \geqslant 3.$$

6.5 Racines d'un polynôme

6.5.1 Définition d'une racine

Définition 6.14 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que l'élément $\alpha \in \mathbb{K}$ est une* **racine** *du polynôme P si :*

$$\widetilde{P}(\alpha) = 0$$

où $\widetilde{P}$ désigne la fonction polynomiale associée au polynôme formel P de $\mathbb{K}[X]$.

Il est important de noter que les racines d'un polynôme appartiennent, par définition, au corps sur lequel le polynôme est défini. Ainsi, les racines d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ appartiennent nécessairement toutes à $\mathbb{R}$. Cependant,

Copyrighted material

il arrive fréquemment que l'équation $\widetilde{P}(\alpha) = 0$ admette des solutions α complexes. Dans ce cas-là, on dira encore que α est une racine de P mais en prenant garde de préciser clairement que cette racine appartient non pas à $\mathbb{R}$ mais à $\mathbb{C}$. Par exemple, le polynôme $P = X^2 + 1$ appartient $\mathbb{R}[X]$ et il n'admet aucune racine (sous-entendu dans $\mathbb{R}$). On vérifie cependant que :

$$\widetilde{P}(\mathrm{i}) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

On dit alors que i est une racine de P dans $\mathbb{C}$. Cette situation arrive aussi lorsque l'on manipule des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, le polynôme $P = X^2 - 2$ appartient à $\mathbb{Q}[X]$ et il n'admet aucune racine (sous-entendu dans $\mathbb{Q}$). En revanche, on vérifie que :

$$\widetilde{P}(\sqrt{2}) = 0 \quad \text{avec} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

On dit alors que $\sqrt{2}$ est une racine de P dans $\mathbb{R}$ pour lever toute ambiguïté.

On appelle ***équation algébrique*** d'inconnue x sur $\mathbb{K}$ une équation de la forme :

$$\widetilde{P}(x) = 0$$

où $\widetilde{P}$ est la fonction polynomiale associée à un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$. D'une manière générale, résoudre une équation sur $\mathbb{K}$, c'est trouver tous les éléments de $\mathbb{K}$ qui vérifient cette équation. En particulier, résoudre l'équation algébrique $\widetilde{P}(x) = 0$ sur $\mathbb{K}$, c'est trouver (toutes) les racines de P appartenant à $\mathbb{K}$.

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un scalaire soit racine d'un polynôme.

Proposition 6.6 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. L'élément α de $\mathbb{K}$ est une racine de P si, et seulement si, $X - \alpha$ divise P. En d'autres termes :*

$$\widetilde{P}(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists Q \in \mathbb{K}[X] \quad P = (X - \alpha) \times Q \big).$$

Démonstration En effectuant la division euclidienne de P par $X - \alpha$, on obtient l'existence et l'unicité de deux polynômes Q et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$P = (X - \alpha) \times Q + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < 1.$$

Le polynôme R est donc un polynôme constant ; il est donné par

$$R = \widetilde{P}(\alpha)$$

puisque $\widetilde{P}(\alpha) = \widetilde{R}(\alpha)$. Cela s'obtient simplement en prenant $x = \alpha$ dans la relation $\widetilde{P}(x) = (x - \alpha)\widetilde{Q}(x) + \widetilde{R}(x)$ valable pour tout x appartenant à $\mathbb{K}$. On en déduit qu'il y a équivalence entre le fait que α soit une racine de P et le fait que $X - \alpha$ divise P. En effet,

$$\widetilde{P}(\alpha) = 0 \iff \widetilde{R}(\alpha) = 0 \iff R = 0 \iff P = (X - \alpha) \times Q.$$

La démonstration est terminée. □

Copyrighted material

Exemples

1. Le polynôme $P = 5X^2 - 25X + 30 \in \mathbb{R}[X]$ admet la factorisation suivante

$$P = 5\,(X-2)\,(X-3)\,.$$

On en déduit que P admet deux racines $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 3$ puisque

$$\widetilde{P}(2) = \widetilde{P}(3) = 0.$$

2. Le polynôme $P = X^2 + 1$ de $\mathbb{R}[X]$ n'admet aucune racine (sous-entendu dans $\mathbb{R}$).

Exercice 4 *Pour quelles valeurs de l'entier n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?*

Il n'existe pas de méthode systématique pour déterminer les racines d'un polynôme de degré supérieur à 4. En revanche, il existe des types particuliers de polynômes dont on peut déterminer certaines racines (voire toutes) de manière algorithmique. C'est le cas des polynômes à coefficients entiers dont on peut déterminer toutes les racines rationnelles.

Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers ($a_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$) et p, q deux entiers relatifs non nuls sans diviseur commun autre que 1 et -1 dans $\mathbb{Z}$. Nous allons démontrer le résultat suivant : une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que le nombre rationnel p/q soit racine de P est que p divise[(5)] a_0 et que q divise a_n.

D'après la définition, p/q est racine de P si $\widetilde{P}(p/q) = 0$, autrement dit si

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + \cdots + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par q^n on obtient que si p/q est racine de P alors

$$a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} q = -a_n p^n. \tag{8}$$

– Remarquons que q divise le terme de gauche de l'égalité ; il divise donc nécessairement le terme de droite $-a_n p^n$. Comme p et q sont sans diviseur commun, il en va de même de p^n et de q. Ainsi, puisque q divise $-a_n p^n$, il divise obligatoirement a_n. On a donc établi que si p/q est racine de P alors q divise a_n dans $\mathbb{Z}$.

[(5)] c'est-à-dire que le reste de la division entière de p par a_0 soit nul.

Copyrighted material

– Pour établir la seconde condition, il suffit de remarquer que l'égalité (8) peut s'écrire

$$-a_0 q^n = a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n$$

et utiliser un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait. Puisque p divise le terme de droite de l'égalité, il divise nécessairement le terme de gauche $-a_0 q^n$. Comme p et q sont sans diviseur commun, il en va de même de p et de q^n. Ainsi, puisque p divise $-a_0 q^n$, il divise obligatoirement a_0. On a donc établi que si p/q est racine de P alors p divise a_0 dans $\mathbb{Z}$.

Voyons maintenant comment utiliser ce résultat pour déterminer les racines rationnelles du polynôme

$$P = 2X^3 - X^2 - X - 3.$$

Si P admet une racine p/q appartenant à $\mathbb{Q}$ alors p devra nécessairement diviser (dans $\mathbb{Z}$) $a_0 = -3$ et q devra nécessairement diviser (dans $\mathbb{Z}$) $a_3 = 2$. Les valeurs possibles pour p sont donc $-3, -1, 1, 3$ et les valeurs possibles pour q sont $-2, -1, 1, 2$. Si P possède des racines dans $\mathbb{Q}$, cela ne peut être que les nombres rationnels suivants :

$$-3, \quad -\frac{3}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad 3.$$

On trouve

$$P(-3) = -63, \quad P(-3/2) = -\frac{21}{2}, \quad P(-1) = -5, \quad P(-1/2) = -3$$

et

$$P(3) = -39, \quad P(3/2) = 0, \quad P(1) = -3, \quad P(1/2) = -\frac{7}{2}.$$

On en déduit que le polynôme $P = 2X^3 - X^2 - X - 3$ possède une unique racine dans $\mathbb{Q}$ qui est $3/2$.

On prendra garde qu'un polynôme à coefficients entiers n'a pas nécessairement de racine dans $\mathbb{Q}$ (c'est le cas par exemple de $X^3 + 2$).

6.5.2 Multiplicité d'une racine

Définition 6.15 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.*

✗ *On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité h de P s'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que*

$$P = (X - \alpha)^h \times Q \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}(\alpha) \neq 0.$$

*L'entier naturel h s'appelle alors l'**ordre de multiplicité** (ou la **multiplicité**) de la racine α.*

✗ *Dans le cas particulier où $h = 1$, la racine est appelée **racine simple** de P et dans le cas où $h > 1$, la racine est appelée **racine multiple** de P.*

Copyrighted material

Par exemple, si $h = 2$ alors α est une racine double, si $h = 3$ alors α est une racine triple.

Exemple Le polynôme $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1$ de $\mathbb{R}[X]$ admet une racine simple qui est -1 et une racine double qui est 1. En effet,

$$P = (X+1)(\overbrace{X^4 - X^3 - X + 1}^{=Q_1}) \text{ avec } \widetilde{Q}_1(-1) \neq 0,$$
$$P = (X-1)^2(\overbrace{X^3 + 2X^2 + 2X + 1}^{=Q_2}) \text{ avec } \widetilde{Q}_2(1) \neq 0.$$

Proposition 6.7 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de $\mathbb{K}$ sont des racines* ***distinctes*** *de P, de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_m$, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :*

$$P = (X-\alpha_1)^{h_1} \times \ldots \times (X-\alpha_m)^{h_m} \times Q \overset{not.}{=} \left(\prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i)^{h_i}\right) \times Q$$

avec $\widetilde{Q}(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Démonstration Elle s'effectue par récurrence sur le nombre m de racines distinctes considérées. La propriété est évidente pour $m = 1$. Supposons la propriété vraie pour un entier m et montrons qu'elle est alors vraie pour l'entier $m+1$. L'hypothèse de récurrence est la suivante : si P est un polynôme admettant pour racines distinctes sur $\mathbb{K}$ les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_m$, alors il existe un polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X-\alpha_1)^{h_1} \times \ldots \times (X-\alpha_m)^{h_m} \times T$$

avec $\widetilde{T}(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Supposons que ce polynôme P admette aussi pour racine sur $\mathbb{K}$ l'élément α_{m+1} de multiplicité h_{m+1}. Cela signifie qu'il existe un polynôme P_{m+1} de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X-\alpha_{m+1})^{h_{m+1}} \times P_{m+1} \quad \text{avec } \widetilde{P}_{m+1}(\alpha_{m+1}) \neq 0,$$

ou, de manière équivalente, que $(X-\alpha_{m+1})^{h_{m+1}}$ divise P. D'après la factorisation du polynôme P explicitée dans l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $(X-\alpha_{m+1})^{h_{m+1}}$ divise nécessairement T puisqu'il ne divise aucun des polynômes $(X-\alpha_1)^{h_1}, \ldots, (X-\alpha_m)^{h_m}$. Par conséquent,

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X] \quad T = (X-\alpha_{m+1})^{h_{m+1}} \times Q.$$

En combinant ce dernier résultat avec l'hypothèse de récurrence, on aboutit à la nouvelle factorisation de P :

$$P = (X-\alpha_1)^{h_1} \times \ldots \times (X-\alpha_m)^{h_m} \times (X-\alpha_{m+1})^{h_{m+1}} \times Q.$$

Copyrighted material

Il reste maintenant à vérifier que $\widetilde{Q}(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m+1\}$. Commençons par considérer les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Pour tout entier i compris entre 1 et m, on a $\widetilde{T}(\alpha_i) \neq 0$ (d'après notre hypothèse de récurrence) et

$$\widetilde{T}(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_{m+1})^{h_{m+1}} \times \widetilde{Q}(\alpha_i).$$

On en déduit alors que $\widetilde{Q}(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ puisque les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ sont tous distincts. Intéressons-nous maintenant à α_{m+1}. On vérifie facilement que le polynôme P_{m+1} se factorise sous la forme

$$P_{m+1} = (X - \alpha_1)^{h_1} \times \ldots \times (X - \alpha_m)^{h_m} \times Q$$

avec $\widetilde{P}_{m+1}(\alpha_{m+1}) \neq 0$. On en déduit que $\widetilde{Q}(\alpha_{m+1}) \neq 0$, ce qui termine la démonstration. □

Exemple Reprenons l'exemple du polynôme $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Ce polynôme admet -1 pour racine simple et 1 pour racine double et

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X] \quad P = (X+1)(X-1)^2 \underbrace{(X^2 + X + 1)}_{= Q} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \widetilde{Q}(-1) \neq 0 \\ \widetilde{Q}(1) \neq 0 \end{cases}$$

Remarque On déduit de la proposition 6.7 que :

$$\deg(P) = h_1 + h_2 + \ldots + h_m + \deg(Q).$$

Ainsi, la somme des multiplicités des racines distinctes d'un polynôme est inférieure ou égale au degré de ce dernier :

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_m \leqslant \deg(P).$$

Par conséquent :

- tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ possède *au plus* n racines distinctes ;
- tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n possédant $n+1$ racines distinctes est nécessairement nul.

6.5.3 Multiplicité d'une racine et polynômes dérivés

Commençons par le lemme suivant.

Lemme 6.1 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Si α est une racine de multiplicité $h > 1$ de P alors α est une racine de multiplicité $h-1$ de P'.*

Copyrighted material

Démonstration Par définition, le scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité $h > 1$ de P si, et seulement si, il existe un polynôme Q_1 de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)^h \times Q_1.$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} P' &= h(X-\alpha)^{h-1} \times Q_1 + (X-\alpha)^h \times Q_1' \\ &= (X-\alpha)^{h-1} \times Q_2 \quad \text{avec} \quad Q_2 = hQ_1 + (X-\alpha) \times Q_1'. \end{aligned}$$

et on vérifie que l'on a

$$\widetilde{Q_2}(\alpha) = h\widetilde{Q_1}(\alpha) \neq 0 \ \text{ car } \ \widetilde{Q_1}(\alpha) \neq 0.$$

On a ainsi exhibé un polynôme $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P' = (X-\alpha)^{h-1} \times Q_2$ avec $\widetilde{Q_2}(\alpha) \neq 0$, autrement dit on a montré que α est une racine de P' de multiplicité $h-1$. □

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un scalaire soit une racine de multiplicité h d'un polynôme.

Proposition 6.8 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Le scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité h de P si, et seulement si,*

$$\widetilde{P}(\alpha) = \widetilde{P'}(\alpha) = \widetilde{P''}(\alpha) = \ldots = \widetilde{P^{(h-1)}}(\alpha) = 0 \qquad \textit{et} \qquad \widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0.$$

Démonstration Elle s'effectue en deux étapes (implication et réciproque). Commençons par montrer l'implication. Si α est une racine de P de multiplicité $h > 1$ alors, d'après le lemme 6.1, α est une racine de P' de multiplicité $h-1$. En réitérant le raisonnement, on obtient que α est une racine de P'' de multiplicité $h-2$, et ainsi de suite .... On obtient finalement que α est une racine de $P^{(h-1)}$ de multiplicité 1 (c'est une racine simple) dont on déduit qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P^{(h-1)} = (X-\alpha) \times Q \qquad \text{avec} \quad \widetilde{Q}(\alpha) \neq 0.$$

En dérivant, on obtient :

$$P^{(h)} = (X-\alpha) \times Q' + Q \qquad \text{avec} \quad \widetilde{P^{(h)}}(\alpha) = \widetilde{Q}(\alpha) \neq 0.$$

Pour montrer la réciproque, on utilise la formule de Taylor. On suppose d'une part que α est une racine de P, P', P'', ..., $P^{(h-2)}$, $P^{(h-1)}$ et d'autre part que $\widetilde{P}^{(h)}(\alpha) \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} P &= \frac{\widetilde{P^{(h)}}(\alpha)}{h!}(X-\alpha)^h + \frac{\widetilde{P^{(h+1)}}(\alpha)}{(h+1)!}(X-\alpha)^{h+1} + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n \\ &= (X-\alpha)^h \left(\frac{\widetilde{P^{(h)}}(\alpha)}{h!} + \frac{\widetilde{P^{(h+1)}}(\alpha)}{(h+1)!}(X-\alpha) + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^{n-h} \right). \end{aligned}$$

Copyrighted material

En notant Q le polynôme entre parenthèses, on a :

$$P = (X-\alpha)^h \times Q \qquad \text{avec} \quad \widetilde{Q}(\alpha) = \widetilde{P^{(h)}}(\alpha)/h!$$

et le scalaire $\widetilde{Q}(\alpha)$ est non nul puisque, par hypothèse, $\widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0$. Ainsi α est une racine de multiplicité h de P. □

Exemple Considérons le polynôme $P = X^3 - 3X + 2 \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$P' = 3X^2 - 3 \quad \text{et} \quad P'' = 6X.$$

P admet 1 pour racine double car $\widetilde{P}(1) = \widetilde{P'}(1) = 0$ et $\widetilde{P''}(1) = 6 \neq 0$.

6.5.4 Relations entre coefficients et racines d'un polynôme

Considérons un polynôme P de degré 2 à coefficients réels

$$P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \quad \text{avec} \quad a_2 \in \mathbb{R}^*, \quad a_1 \in \mathbb{R}, \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

Un résultat fait cas de relations entre la somme, le produit des deux racines (si elles existent) α_1 et α_2 de P dans $\mathbb{R}$, avec ses coefficients a_2, a_1, a_0. Quelles sont-elles ? Pour les retrouver, il suffit de développer le terme de droite dans l'égalité

$$a_2X^2 + a_1X + a_0 = a_2\,(X-\alpha_1)\,(X-\alpha_2)\,.$$

Après identification, on obtient les deux formules classiques (dites ***formules de Viète***, du nom du mathématicien français François Viète) :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 \times \alpha_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Remarquons que les deux racines α_1 et α_2 ne sont pas nécessairement distinctes. Par exemple, le trinôme $P = 2X^2 - 12X + 18$ de $\mathbb{R}[X]$ admet pour unique racine le réel 3. Cette racine est double. Les deux racines α_1 et α_2 sont confondues ($\alpha_1 = \alpha_2 = 3$) et elles vérifient les formules de Viète :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3 + 3 = -\frac{(-12)}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 \times \alpha_2 = 3 \times 3 = \frac{18}{2}.$$

Il est possible de généraliser les formules de Viète au cas de polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$ et de degré n avec $n \geqslant 1$. Pour cela, commençons par la définition d'un polynôme scindé.

Définition 6.16 *Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ et de degré n est dit* ***scindé sur*** *$\mathbb{K}$ (ou* ***scindable*** *sur $\mathbb{K}$) s'il existe $\beta \in \mathbb{K}^*$ et n scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non nécessairement distincts deux à deux appartenant à $\mathbb{K}$ tels que :*

$$P = \beta \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)\,.$$

Copyrighted material

VIÈTE, François (1540, Fontenay-le-Comte - 1603, Paris).

Juriste et conseiller auprès du Parlement de Bretagne (à Rennes) puis de Tours, Viète introduit les notations littérales utilisant des voyelles pour les inconnues et des consonnes pour les quantités connues. On lui doit aussi des travaux en trigonométrie, entre autre les expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ comme fonction polynomiale de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ obtenues par des constructions géométriques. Durant la guerre contre l'Espagne, il offrit ses services à Henri IV, Roi de France et de Navarre, en décodant les messages (en écriture chiffrée) qui étaient interceptés.

Il est évident que la notion de polynôme scindé dépend étroitement du corps $\mathbb{K}$ considéré, comme on peut le vérifier avec les deux exemples suivants.

Exemples

1. Le polynôme $P = X^2 - 2$ peut être considéré comme un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$. Il n'est pas scindé sur $\mathbb{Q}$. Il est en revanche scindé sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ car

$$P = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}).$$

2. Le polynôme $P = 2X^2 + 2$ appartient aussi à $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$. Il n'est scindé ni sur $\mathbb{Q}$, ni sur $\mathbb{R}$. Il est en revanche scindé sur $\mathbb{C}$ car

$$P = 2(X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{i}^2 = -1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Lorsqu'un polynôme de degré n est scindé, il existe des relations entre ses coefficients et ses n racines. À titre d'exemple, intéressons-nous au cas $n = 3$. Soient

$$P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$ et α_1, α_2 et α_3 ses racines (distinctes ou confondues). En développant le terme de droite dans l'égalité

$$a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = a_3\,(X - \alpha_1)\,(X - \alpha_2)\,(X - \alpha_3)\,,$$

et après identification, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ (\alpha_1 \times \alpha_2) + (\alpha_1 \times \alpha_3) + (\alpha_2 \times \alpha_3) = \dfrac{a_1}{a_3} \\ \alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}.$$

Copyrighted material

Exemple Le polynôme $P = 2X^3 - 10X^2 + 16X - 8$ de $\mathbb{R}[X]$ admet pour racines les scalaires 2 (racine double) et 1 (racine simple) puisque

$$\widetilde{P}(1) = \widetilde{P}(2) = \widetilde{P}'(2) = 0 \qquad \text{et} \qquad \widetilde{P}''(2) \neq 0.$$

Parmi les trois racines α_1, α_2 et α_3, deux sont confondues ($\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = 1$) et on a :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 + 2 + 1 = -\dfrac{(-10)}{2} \\ (\alpha_1 \times \alpha_2) + (\alpha_1 \times \alpha_3) + (\alpha_2 \times \alpha_3) = (2 \times 2) + (2 \times 1) + (2 \times 1) = \dfrac{16}{2} \\ \alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 = 2 \times 2 \times 1 = -\dfrac{(-8)}{2} \end{cases}.$$

Les formules reliant les coefficients et les racines d'un polynôme sont relativement faciles à retrouver pour $n = 2$ ou pour $n = 3$. Lorsque n augmente ces relations, au nombre de n, deviennent vite fastidieuses à écrire. Pour vous en convaincre, exercez-vous avec $n = 4$, puis avec $n = 5$. Dans le cas général d'un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ de degré n,

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

et scindé sur $\mathbb{K}$, les première et dernière relations donnant l'expression de la somme et celle du produit des racines restent simples. On a :

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignent les racines (distinctes ou confondues) sur $\mathbb{K}$ de P. On retrouve l'égalité de gauche (respectivement de droite) en développant l'expression factorisée

$$P = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_n),$$

et en identifiant le terme de degré $n - 1$ avec a_{n-1} (resp. le terme de degré 0 avec a_0).

Exercice 5 *Déterminer le nombre complexe λ pour que l'équation algébrique*

$$x^3 + 2x^2 + 3x + \lambda = 0$$

ait deux de ses racines dont le produit vaut 2.

6.6 Étude des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$

Dans la pratique, les calculs s'effectuent généralement en considérant comme corps de référence le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ou le corps $\mathbb{R}$ des nombres

Copyrighted material

réels. Nous portons ainsi une attention particulière aux polynômes à coefficients complexes dans un premier temps, et aux polynômes à coefficients réels dans un second temps.

6.6.1 Polynômes de $\mathbb{C}[X]$

Le théorème suivant que les anglo-saxons appellent ***théorème fondamental de l'algèbre*** est aussi appelé théorème de d'Alembert-Gauss, du nom du mathématicien français Jean Le Rond d'Alembert (il fut le premier à l'avoir énoncé sous une forme complète ; il en donna une démonstration peu convaincante) et du mathématicien allemand Karl Friedrich Gauss (il le démontra en 1799). [6]

Théorème 6.4 (de d'Alembert-Gauss) *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration Admise. □

D'ALEMBERT, Jean Le Rond (1717, Paris - 1783, Paris).

Philosophe, ami de Diderot (avec qui il co-dirigea l'Encyclopédie) et de Voltaire, d'Alembert fut l'un des mathématiciens et physiciens les plus renommés du XVIIIe siècle. Il entra à 24 ans à l'Académie de Sciences comme adjoint astronome, puis, 13 ans plus tard, à l'Académie française. Son œuvre est considérable. Nous lui devons un théorie mathématique des cordes vibrantes. Son existence avait pourtant mal commencée puisque, nouveau-né, il avait été recueilli sur les marches de la chapelle Saint-Jean-Le-Rond, attenant à la tour nord de Notre-Dame, d'ou le nom qui lui fut donné.

Il résulte du théorème de d'Alembert-Gauss que :

- tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ possède n racines (comptées avec leurs multiplicités[7]) dans $\mathbb{C}$;
- les seuls polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ;
- tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$;

On dit que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est ***algébriquement clos***.

Si on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les m *racines distinctes* de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_m$, du polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$, alors

$$m \leqslant n \quad \text{et} \quad h_1 + \ldots + h_m = n,$$

[6] Citons aussi l'ingénieur français Albert Girard (1595-1632) qui avait déjà énoncé ce théorème dès 1629, sans pourtant réussir à le démontrer.

[7] Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n possède ainsi n racines distinctes ou confondues.

Copyrighted material

et le polynôme P se factorise sous la forme :

$$P = a_n(X-\alpha_1)^{h_1} \times \ldots \times (X-\alpha_m)^{h_m} \overset{not.}{=} a_n \prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i)^{h_i}.$$

Il est à noter la présence du coefficient a_n (nécessairement non nul puisque $\deg(P) = n$) dans cette factorisation. On dit que l'on a effectué la ***décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans*** $\mathbb{C}[X]$.

Exemple Les racines du polynôme unitaire $P = X^5 - X^3 - X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ sont -1 (racine simple), j (racine simple), $\bar{\mathrm{j}}$ (racine simple) et 1 (racine double). La factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$P = (X+1)(X-1)^2(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}).$$

Exercice 6 *1 - Déterminer les racines deuxièmes de* $8+6\mathrm{i}$, *puis résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation*

$$(\mathrm{E}_1) \quad \mathrm{i}z^2 - (1+\mathrm{i})z + 2\mathrm{i} - 1 = 0.$$

2 - On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation*

$$(\mathrm{E}_2) \quad \mathrm{i}z^3 + (2\mathrm{i}-1)z^2 - (\mathrm{i}+4)z + 3(2\mathrm{i}-1) = 0.$$

Montrer que si cette équation admet une solution réelle r alors cette solution vérifie

$$\begin{cases} r^2 + 4r + 3 = 0 \\ r^3 + 2r^2 - r + 6 = 0 \end{cases}$$

Indiquer si l'équation (E_2) *admet des solutions réelles. Combien l'équation* (E_2) *admet-elle de solutions ? Trouver toutes les solutions de l'équation* (E_2).

6.6.2 Polynômes de $\mathbb{R}[X]$

Puisque $\mathbb{R}$ est inclus, *via* l'injection canonique, dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (voir p. 23), tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut s'interpréter comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et on peut lui appliquer le théorème de d'Alembert-Gauss. Ainsi, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n possède n racines (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{C}$.

Proposition 6.9 *Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Le scalaire $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité h de P dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, $\overline{\alpha}$ est une racine de multiplicité h de P dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration On commence par vérifier que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $\widetilde{P}(\overline{\alpha}) = \overline{\widetilde{P}(\alpha)}$. C'est immédiat (la rédaction est laissée en exercice). D'après le

Copyrighted material

résultat de la proposition 6.8, le scalaire α est une racine de multiplicité h de P si, et seulement si, $\widetilde{P}(\alpha) = 0$, $\widetilde{P'}(\alpha) = 0$, ..., $\widetilde{P^{(h-1)}}(\alpha) = 0$ et $\widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0$. En procédant par équivalence, on vérifie que l'on a pour tout entier k variant de 0 à $h-1$:

$$\widetilde{P^{(k)}}(\alpha) = 0 \iff \overline{\widetilde{P^{(k)}}(\alpha)} = 0 \iff \widetilde{P^{(k)}}(\overline{\alpha}) = 0$$

En s'intéressant à la dérivée h-ième, on a

$$\widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0 \iff \overline{\widetilde{P^{(h)}}(\alpha)} \neq 0 \iff \widetilde{P^{(h)}}(\overline{\alpha}) \neq 0,$$

ce qui termine la démonstration. □

Les racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ne sont pas toujours toutes réelles. Par exemple, le trinôme

$$P = aX^2 + bX + c \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

possède des racines réelles seulement dans le cas où $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Dans le cas où $b^2 - 4ac < 0$, les racines appartiennent à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Contrairement au corps $\mathbb{C}$, le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas algébriquement clos. Un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n n'est pas nécessairement scindé. Il l'est à la condition qu'il possède n racines réelles comptées avec leurs multiplicités (c'est-à-dire n racines distinctes ou confondues).

Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair

Montrons qu'un polynôme de degré 3 à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Considérons dans un premier temps le cas où P admet trois racines distinctes α_1, α_2, α_3 dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Puisque par hypothèse le polynôme P a tous ses coefficients dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\widetilde{P}(\alpha_1) = 0 \iff \widetilde{P}(\overline{\alpha_1}) = 0,$$

ce qui signifie que $\overline{\alpha_1}$ est une racine de P. Elle appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et elle est distincte de α_1 puisque $\mathrm{Im}(\alpha_1) \neq 0$. La racine $\overline{\alpha_1}$ est nécessairement une des deux autres racines de P. On a donc $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$ ou $\alpha_3 = \overline{\alpha_1}$. Sans perte de généralité, on suppose que $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$. Il reste alors la racine α_3. Procédons comme pour la racine α_1. Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\widetilde{P}(\alpha_3) = 0 \iff \widetilde{P}(\overline{\alpha_3}) = 0.$$

Ainsi $\overline{\alpha_3}$ est aussi une racine de P. Puisque $\overline{\alpha_3}$ est nécessairement différente des deux autres racines α_1 et $\overline{\alpha_1}$, la seule possibilité est que $\overline{\alpha_3}$ soit égale à α_3, c'est-à-dire que α_3 soit réelle. Le polynôme P possède donc (au moins) une racine réelle.

Copyrighted material

Considérons maintenant le cas où P admet dans $\mathbb{C}$ une seule racine α de multiplicité 3. Puisque le polynôme P est à coefficients dans $\mathbb{R}$, on a

$$\widetilde{P}(\alpha) = 0 \iff \widetilde{P}(\overline{\alpha}) = 0.$$

Ainsi, $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P. On a alors nécessairement $\overline{\alpha} = \alpha$, c'est-à-dire $\alpha \in \mathbb{R}$.

Considérons enfin le cas où P admet deux racines distinctes α_1 et α_2 dans $\mathbb{C}$, avec α_1 une racine simple et α_2 une racine double. Alors puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{\alpha_2}$ est nécessairement une racine double de P. On en déduit nécessairement que $\overline{\alpha_2}$ est égale à α_2 (le contraire est impossible car P est un polynôme de degré 3), c'est-à-dire que $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Plus généralement, on a le résultat suivant (dont on admet la démonstration).

Proposition 6.10 *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont :

- les polynômes de degré 1, c'est-à-dire les polynômes de la forme

$$aX + b \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R},$$

- les polynômes de degré 2 ne possédant aucune racine réelle, c'est-à-dire les polynômes de la forme

$$aX^2 + bX + c \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b^2 - 4ac < 0.$$

On montre facilement que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 3 est nécessairement réductible.

Factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Considérons un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n.$$

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P possède n racines (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{C}$. Nous ne nous intéressons ici qu'aux racines distinctes. Supposons que certaines de ces racines soient réelles. Notons-les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et notons $h_1, h_2, \ldots, h_m$ leurs multiplicités respectives. Les autres racines appartiennent nécessairement à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (c'est-à-dire elles ont des parties imaginaires non nulles). D'après la proposition 6.9, nous pouvons les classer par couples de racines complexes conjuguées $(\beta_1, \overline{\beta}_1), (\beta_2, \overline{\beta}_2), \ldots, (\beta_{m'}, \overline{\beta}_{m'})$, de multiplicités respectives $s_1, s_2, \ldots, s_{m'}$. On a nécessairement :

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_m + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_{m'}) = n$$

Copyrighted material

et le polynôme P se factorise sur $\mathbb{C}$ de la manière suivante :

$$P = a_n \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{m}(X-\alpha_k)^{h_k}\right)}_{\text{racines dans } \mathbb{R}} \times \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{m'}(X-\beta_k)^{s_k}(X-\overline{\beta}_k)^{s_k}\right)}_{\text{racines dans } \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}.$$

Pour tout entier k variant de 1 à m', on vérifie

$$\begin{aligned}(X-\beta_k)(X-\overline{\beta_k}) &= X^2-(\beta_k+\overline{\beta_k})X+\beta_k\overline{\beta_k}\\ &= X^2-2\,\mathrm{Re}(\beta_k)X+|\beta_k|^2,\end{aligned}$$

d'où $(X-\beta_k)(X-\overline{\beta_k}) \in \mathbb{R}[X]$ puisque $\mathrm{Re}(\beta_k)$ et $|\beta_k|^2$ appartiennent à $\mathbb{R}$. Par conséquent, la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P = a_n\left(\prod_{k=1}^{m}(X-\alpha_k)^{h_k}\right)\times\left(\prod_{k=1}^{m'}(X^2+p_kX+q_k)^{s_k}\right)$$

où, pour tout entier k variant de 1 à m', le polynôme $X^2+p_kX+q_k$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifie $p_k^2-4q_k<0$ et admet β_k et $\overline{\beta}_k$ pour racines dans $\mathbb{C}$.

Exemple Reprenons le polynôme $P=X^5-X^3-X^2+1$. Il appartient à $\mathbb{R}[X]$. Ses racines dans $\mathbb{R}$ sont -1 (racine simple) et 1 (racine double). Ses racines dans $\mathbb{C}$ sont -1, j et $\bar{\mathrm{j}}$ (racines simples) et 1 (racine double). La factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$P=(X+1)(X-1)^2(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}).$$

Développons le produit $(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}})$. On a

$$\begin{aligned}(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}) &= X^2-(\mathrm{j}+\bar{\mathrm{j}})X+\mathrm{j}\times\bar{\mathrm{j}}\\ &= X^2-2\,\mathrm{Re}(\mathrm{j})X+|\mathrm{j}|^2\\ &= X^2+X+1.\end{aligned}$$

La factorisation irréductible de P dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit ainsi

$$P=(X+1)(X-1)^2(X^2+X+1).$$

Remarque Certains polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ ne possèdent aucune racine réelle. C'est le cas par exemple de $P=X^4+1$. Les racines sont toutes de partie imaginaire non nulle. Elles peuvent toutes être classées par couples de racines complexes conjuguées $(\beta_1,\overline{\beta}_1)$, $(\beta_2,\overline{\beta}_2)$, …, $(\beta_{m'},\overline{\beta}_{m'})$. En notant $s_2,\ldots,s_{m'}$ leurs multiplicités respectives et n le degè de P, on a alors :

$$2(s_1+s_2+\ldots+s_{m'})=n$$

Copyrighted material

et la factorisation irréductible de P dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P = a_n \prod_{k=1}^{m'} (X^2 + p_k X + q_k)^{s_k} \qquad \text{avec} \quad p_k^2 - 4q_k < 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, m'\}$$

où, pour tout $k \in \{1, \ldots, m'\}$, le polynôme $X^2 + p_k X + q_k$ de $\mathbb{R}[X]$ admet β_k et $\overline{\beta}_k$ pour racines dans $\mathbb{C}$. Par exemple, la factorisation irréductible de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit

$$X^4 + 1 = (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}).$$

On a les égalités suivantes :

$$(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}) = X^2 - \sqrt{2}X + 1,$$
$$(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}) = X^2 + \sqrt{2}X + 1.$$

On en déduit la factorisation irréductible de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

Exercice 7 *Donner une factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes*
1 - $P = X^6 + 1$,
2 - $Q = X^8 + X^4 + 1$,
3 - $R = X^6 - 2X^3 \cos\varphi + 1$ avec $\varphi \in [0, \pi[$.

6.7 Exercices de synthèse

Exercice 8 *Soit n un entier naturel non nul.*

1 - Résoudre $z^{4n} - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$. On notera $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{4n-1}$ les racines. En particulier, préciser les valeurs des quatre racines z_0, z_n, z_{2n} et z_{3n}.

2 - Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad 1 - z^{4n} = (1 - z^4) \sum_{k=0}^{n-1} z^{4k}$.

3 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{4k} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\left(z^2 - 2\mathrm{i}z \sin\frac{k\pi}{2n} - 1 \right) \left(z^2 + 2\mathrm{i}z \sin\frac{k\pi}{2n} - 1 \right) \right).$$

4 - En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Copyrighted material

Exercice 9 *On appelle* polynômes de Bernoulli *les polynômes* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définis par*

$$B_0 = 1 \quad et \qquad \forall n \geqslant 1 \left(B_n' = nB_{n-1} \quad et \quad \int_0^1 \widetilde{B}_n(x)\mathrm{d}x = 0 \right),$$

où pour tout $n \geqslant 1$, $\widetilde{B}_n$ *désigne la fonction polynomiale associée à* B_n. *On admettra que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, B_n *est un polynôme normalisé de degré* n *et à coefficients dans* $\mathbb{Q}$.

1 - Calculer B_1, B_2, B_3 *et* B_4.

2 - Montrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad \widetilde{B}_n(0) = \widetilde{B}_n(1)$.

3 - Pour $n \geqslant 1$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $\widetilde{Q}_n(x) = \widetilde{B}_n(x+1) - \widetilde{B}_n(x)$. *Montrer par récurrence que*

$$\forall n \geqslant 1 \quad Q_n = nX^{n-1}.$$

4 - Pour $n \geqslant 1$ *et* $k \geqslant 1$, *on pose* $S_{k,n} = 1 + 2^n + 3^n + \ldots + k^n$. *Déduire de la question précédente que*

$$S_{k,n} = \frac{1}{n+1}\left(\widetilde{B}_{n+1}(k+1) - \widetilde{B}_{n+1}(1)\right).$$

5 - Calculer $S_{k,1}$, $S_{k,2}$ *et* $S_{k,3}$.

6 - Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{B}_n(1-x) = (-1)^n \widetilde{B}_n(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $b_n = \widetilde{B}_n(0)$. *Ces nombres sont appelés* nombres de Bernoulli. *Déduire de ce qui précède que* $b_{2p+1} = 0$ *pour* $p \geqslant 1$.

7 - Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \widetilde{B}_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \widetilde{B}_{n-k}(x) y^k \quad où \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

8 - Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k x^{n-k}$ *et*

$$\forall n \geqslant 2 \quad \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k b_k = 0.$$

Exercice 10 *On considère* $n+1$ *points* $\mathcal{M}_j$ *de coordonnées* (x_j, y_j) *où* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *et où les* x_j *sont tous distincts. On cherche à interpoler les points* $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, ..., $\mathcal{M}_n$ *par une fonction polynomiale. On va pour cela chercher un polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *dont la courbe représentative passe exactement par les* $n+1$ *points* $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ *ce qui revient à écrire*

$$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad \widetilde{P}(x_j) = y_j.$$

Copyrighted material

1 - Montrer que s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant n$ tel que $\widetilde{P}(x_j) = y_j$ pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, alors il est unique.

2 - Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ fixé, déterminer l'unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}[X]$, de degré $\leqslant n$ qui vérifie $\widetilde{L}_i(x_i) = 1$ et

$$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad \Big(j \neq i \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{L}_i(x_j) = 0 \Big).$$

3 - En déduire l'expression du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant n$ solution du problème d'interpolation. Le polynôme P est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange *des $n+1$ points $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$.*

4 - Application : déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange des quatre points

$$\mathcal{M}_0(-1,-1), \quad \mathcal{M}_1(0,0), \quad \mathcal{M}_2(1,1) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_3(2,0).$$

6.8 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - On vérifie que l'on a

$$\begin{aligned} A_2 = X^2 \sin\phi - X \sin 2\phi + \sin\phi &= X^2 \sin\phi - 2X \sin\phi \cos\phi + \sin\phi \\ &= (X^2 - 2X\cos\phi + 1)\sin\phi = B \sin\phi. \end{aligned}$$

Effectuons la division euclidienne de A_3 par B. On a

$$\begin{array}{l|l} A_3 = X^3 \sin\phi - X \sin 3\phi + \sin 2\phi & X^2 - 2X\cos\phi + 1 \\ \quad -(X^3 \sin\phi - 2X^2 \sin\phi\cos\phi + X\sin\phi) & \hline X\sin\phi + \sin 2\phi = Q_3 \\ \hline 2X^2 \sin\phi\cos\phi - X(\sin 3\phi + \sin\phi) + \sin 2\phi & \\ \quad = X^2 \sin 2\phi - 2X \sin 2\phi \cos\phi + \sin 2\phi & \\ \quad -(X^2 \sin 2\phi - 2X \sin 2\phi \cos\phi + \sin 2\phi) & \\ \hline R_3 = 0 & \end{array}$$

c'est-à-dire, $A_3 = B(X\sin\phi + \sin 2\phi)$. Effectuons maintenant la division euclidienne de A_4 par $B = X^2 - 2X\cos\phi + 1$. On a

$$\begin{array}{l|l} A_4 = X^4 \sin\phi - X \sin 4\phi + \sin 3\phi & B \\ \quad -(X^4 \sin\phi - 2X^3 \sin\phi\cos\phi + X^2 \sin\phi) & \hline X^2\sin\phi \\ \hline 2X^3 \sin\phi\cos\phi - X^2\sin\phi - X\sin 4\phi + \sin 3\phi & +X\sin 2\phi \\ \quad = X^3 \sin 2\phi - X^2 \sin\phi - X\sin 4\phi + \sin 3\phi & +\sin 3\phi \\ \quad -(X^3 \sin 2\phi - 2X^2 \sin 2\phi\cos\phi + X\sin 2\phi) & = Q_4 \\ \hline X^2(2\sin 2\phi\cos\phi - \sin\phi) - X(\sin 2\phi + \sin 4\phi) + \sin 3\phi & \\ \quad = X^2 \sin 3\phi - 2X \sin 3\phi \cos\phi + \sin 3\phi & \\ \quad -(X^2 \sin 3\phi - 2X \sin 3\phi \cos\phi + \sin 3\phi) & \\ \hline R_4 = 0 & \end{array}$$

c'est-à-dire, $A_4 = B(X^2 \sin\phi + X\sin 2\phi + \sin 3\phi)$.

Copyrighted material

2 - D'après la question précédente, la propriété est vraie au rang 2 (nous avons même vérifié qu'elle était vraie aux rangs 3 et 4) Supposons-la vraie au rang n, c'est-à-dire supposons que $A_n = BQ_n$ (c'est l'hypothèse de récurrence) et déduisons-en qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $A_{n+1} = BQ_{n+1}$ ou

$$B\left(X^{n-1}\sin\phi + X^{n-2}\sin 2\phi + \ldots + X\sin(n-1)\phi + \sin n\phi\right) \\ = X^{n+1}\sin\phi - X\sin(n+1)\phi + \sin n\phi.$$

Commençons par faire apparaître Q_n dans l'expression de Q_{n+1}. On a

$$Q_{n+1} = XQ_n + \sin n\phi.$$

Calculons maintenant BQ_{n+1}. On vérifie

$$BQ_{n+1} = B\left(XQ_n + \sin n\phi\right) = XBQ_n + B\sin n\phi.$$

Or, $BQ_n = A_n$. Ainsi

$$\begin{aligned} BQ_{n+1} &= X\left(X^n\sin\phi - X\sin n\phi + \sin(n-1)\phi\right) \\ &\quad +(X^2 - 2X\cos\phi + 1)\sin n\phi \\ &= X^{n+1}\sin\phi - X\left(2\cos\phi\sin n\phi - \sin(n-1)\phi\right) + \sin n\phi = A_{n+1} \end{aligned}$$

car $2\cos\phi\sin n\phi - \sin(n-1)\phi = \sin n\phi\cos\phi + \sin\phi\cos n\phi = \sin(n+1)\phi$.

Solution de l'exercice 2

Étape 1 : par hypothèse, on a supposé $m \geqslant p$. Effectuons la division euclidienne de A_m par B_p. On obtient

$$A_m = B_pX^{m-p} + R_1 \quad \text{avec} \quad R_1 = a^pX^{m-p} - a^m.$$

- Si $m = p$ alors le reste R_1 est nul (*i.e.*, A_m est divisible par B_p).
- Supposons maintenant $m > p$. Si de plus $m-p < p$, *i.e.*, si $p < m < 2p$, alors la division est terminée et le reste R_1 est non nul (A_m n'est pas divisible par B_p). En revanche, si $m-p \geqslant p$, *i.e.*, si $m \geqslant 2p$, alors on doit poursuivre la division.

Étape 2 : supposons donc $m \geqslant 2p$ et poursuivons la division. On obtient

$$A_m = B_p(X^{m-p} + a^pX^{m-2p}) + R_2 \quad \text{avec} \quad R_2 = a^{2p}X^{m-2p} - a^m.$$

- Si $m = 2p$ alors $R_1 = 0$.
- On suppose maintenant $m > 2p$. Si $m-2p < p$, *i.e.*, si $2p < m < 3p$, alors la division est terminée et $R_2 \neq 0$. En revanche, si $m-2p \geqslant p$, *i.e.*, si $m \geqslant 3p$ alors on doit encore poursuivre la division.

Étape 3 : supposons donc $m \geqslant 2p$ et poursuivons la division. On obtient

$$A_m = B_p(X^{m-p} + a^pX^{m-2p} + a^{2p}X^{m-3p}) + R_3 \quad \text{avec} \quad R_3 = a^{3p}X^{m-3p} - a^m.$$

Copyrighted material

- Si $m = 3p$ alors $R_3 = 0$.
- On suppose maintenant $m > 3p$. Si $m - 3p < p$, *i.e.*, si $3p < m < 4p$, alors la division est terminée et $R_3 \neq 0$. En revanche, si $m - 3p \geqslant p$, *i.e.*, si $m \geqslant 4p$ on doit encore poursuivre la division.

On obtient à l'étape 4 que lorsque $3p \leqslant m < 4p$,

$$A_m = B_p(X^{m-p} + a^p X^{m-2p} + a^{2p} X^{m-3p} + a^{3p} X^{m-4p}) + R_4$$

avec $R_4 = a^{4p} X^{m-4p} - a^m$. Soient $\alpha_\ell = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\ell\pi/p}$, $0 \leqslant \ell \leqslant p-1$, les racines complexes du polynôme $X^p - a^p$. Puisqu'elles sont simples, une condition nécessaire et suffisante pour que $B_p = X^p - a^p$ divise $A_m = X^m - a^m$ est que α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ soient aussi racines de $X^m - a^m$. On vérifie

$$\left(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\ell\pi/p}\right)^m - a^m = 0 \iff a^m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\ell\pi m/p} - 1) = 0 \iff m/p = k \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que $A_m = X^m - a^m$ soit divisible par $B_p = X^p - a^p$ est que $m = kp$ avec $k \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, on obtient

$$A_m = B_p Q_k + R_k \text{ avec } \begin{cases} Q_k = X^{m-p} + a^p X^{m-2p} + \ldots + a^{(k-1)p} X^{m-kp} \\ R_k = a^{kp} X^{m-kp} - a^m \end{cases}$$

si $kp \leqslant m < (k+1)p$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 3

Soit P un polynôme de degré m. Appliquons la formule de Taylor. On a

$$P = \widetilde{P}(1) + \widetilde{P'}(1)(X-1) + \frac{\widetilde{P''}(1)}{2}(X-1)^2 + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(m)}}(1)}{m!}(X-1)^m$$

Or $\widetilde{P}(1) = 3$, $\widetilde{P'}(1) = 4$, $\widetilde{P''}(1) = 5$ et $\widetilde{P^{(n)}}(1) = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 3. On en déduit alors trivialement que

$$P = 3 + 4(X-1) + \frac{5}{2}(X-1)^2 = \frac{5}{2}X^2 - X + \frac{3}{2}.$$

Solution de l'exercice 4

Considérons dans un premier temps le cas où $n = 0$, puis le cas où $n = 1$.

- Si $n = 0$ alors $(X+1)^0 - X^0 - 1 = -1$. Son degré est inférieur strictement à celui de $X^2 + X + 1$; il n'est donc pas divisible par $X^2 + X + 1$.
- Si $n = 1$ alors $(X+1)^1 - X^1 - 1 = 0$. Le polynôme nul étant divisible par n'importe quel polynôme, il est donc divisible par le polynôme $X^2 + X + 1$.

Copyrighted material

Supposons à présent $n \geqslant 2$. Les racines du polynôme X^2+X+1 sont j et $\bar{\mathrm{j}}$ avec $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. On sait que $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^{-1}$. De plus on vérifie facilement que $\mathrm{j}^3 = 1$ ou plus généralement, pour tout $\in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{j}^{3k} = 1$, $\mathrm{j}^{3k+1} = \mathrm{j}$ et $\mathrm{j}^{3k+2} = \mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$. Dire que le polynôme $P = (X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 équivaut à dire que j racine de P ou $\bar{\mathrm{j}}$ racine de P (puisque $P \in \mathbb{R}[X]$). Calculons $\tilde{P}(\mathrm{j})$:

$$\tilde{P}(\mathrm{j}) = (\mathrm{j}+1)^n - \mathrm{j}^n - 1 = (-1)^n \mathrm{j}^{2n} - \mathrm{j}^n - 1$$

où on a utilisé que $\mathrm{j}+1 = -\mathrm{j}^2$. Posons $n = 3k+r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0,1,2\}$. Par conséquent $\mathrm{j}^n = \mathrm{j}^r$ et

$$\tilde{P}(\mathrm{j}) = (-1)^{3k+r}\mathrm{j}^{2r} - \mathrm{j}^r - 1.$$

Nous procédons maintenant à une discussion sur r :

- Le premier cas $r = 0$ est impossible car $\tilde{P}(\mathrm{j}) = (-1)^{3k} - 2 \neq 0$.
- Le deuxième cas $r = 1$ conduit à $\tilde{P}(\mathrm{j}) = (-1)^{3k+1}\mathrm{j}^2 - \mathrm{j} - 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{P}(\mathrm{j}) = 0$ est $(-1)^{3k+1} = -1$, *i.e.*, $3k$ pair, *i.e.*, $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. On en déduit alors que $n = 6p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$.
- Le troisième cas $r = 2$ conduit à $\tilde{P}(\mathrm{j}) = (-1)^{3k+2}\mathrm{j} - \mathrm{j}^2 - 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{P}(\mathrm{j}) = 0$ est $(-1)^{3k+2} = -1$, *i.e.*, $3k$ impair, *i.e.*, $k = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$ On en déduit alors que $n = 6p+5$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 5

On note P le polynôme défini par $P = X^3 + 2X^2 + 3X + \lambda$. On note α_1, α_2 et α_3 les trois racines de P. Écrivons les trois relations entre les coefficients et les racines de P. On a

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= -2 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= 3 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= -\lambda \end{cases}.$$

Par hypothèse, le produit de deux de ses racines (prenons par exemple α_1 et α_2) vaut 2, c'est-à-dire $\alpha_1\alpha_2 = 2$. On réécrit alors la deuxième équation sous la forme $\alpha_1 + \alpha_2 = 1/\alpha_3$. En injectant l'expression de $\alpha_1 + \alpha_2$ dans la première équation, on obtient

$$\alpha_3^2 + 2\alpha_3 + 1 = 0 \iff (\alpha_3+1)^2 = 0.$$

On en déduit $\alpha_3 = -1$, d'où $\lambda = 2$. Remarquons que l'on a $\alpha_1\alpha_2 = 2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$. Les deux autres racines α_1 et α_2 sont racines du polynôme X^2+X+2. On en déduit les valeurs $\alpha_1 = (-1+\mathrm{i}\sqrt{7})/2$ et $\alpha_2 = (-1-\mathrm{i}\sqrt{7})/2$.

Solution de l'exercice 6

1 - Les racines deuxièmes de $8+6\mathrm{i}$ sont les complexes de la forme $a+ib$ où

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 8 \\ 2ab &= 6 \\ a^2 + b^2 &= 10 \end{cases}.$$

Copyrighted material

Ce système admet pour solutions les couples (a, b) suivants : $(3, 1)$ et $(-3, -1)$. Les deux racines deuxièmes de $8 + 6\mathrm{i}$ sont donc $\delta = 3 + \mathrm{i}$ et $\delta' = -3 - \mathrm{i}$. Le discriminant de l'équation (E_1) vaut $8 + 6\mathrm{i}$. On en déduit que les solutions de l'équation (E_1) sont

$$s_1 = \frac{(1+\mathrm{i}) + \delta}{2\mathrm{i}} = 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{(1+\mathrm{i}) + \delta'}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$$

2 - a) Supposons que le réel r soit solution de l'équation (E_2). On a alors $\mathrm{i}r^3 + (2\mathrm{i} - 1)r^2 - (4 + \mathrm{i})r + 3(2\mathrm{i} - 1) = 0$, c'est-à-dire

$$-(r^2 + 4r + 3) + \mathrm{i}(r^3 + 2r^2 - r + 6) = 0.$$

Deux nombres complexes étant égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, r est solution de l'équation (E_2) si, et seulement si, il est solution du système

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} r^2 + 4r + 3 & = & 0 \\ r^3 + 2r^2 - r + 6 & = & 0 \end{cases}.$$

b) L'équation (E_2) admet une solution réelle si le système (S) admet une solution. Considérons la première équation de ce système. Elle admet deux solutions réelles qui sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$. On a $r_1^3 + 2r_1^2 - r_1 + 6 = 8 \neq 0$ et $r_2^3 + 2r_2^2 - r_2 + 6 = 0$. On en déduit que le système (S), et par conséquent que l'équation (E_2), admet une unique solution réelle $r_2 = -3$.

c) Les solutions de l'équation (E_2) sont les racines du polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par

$$P = \mathrm{i}X^3 + (2\mathrm{i} - 1)X^2 - (\mathrm{i} + 4)X + 3(2\mathrm{i} - 1).$$

Ce polynôme est de degré 3. D'après le théorème de D'Alembert, il admet 3 racines, comptées avec leurs multiplicités, dans $\mathbb{C}$. Puisque -3 est racine de P (d'après la question b), il existe un unique $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X+3)Q$. On obtient l'expression de Q, par exemple, en effectuant la division euclidienne de P par $X + 3$ (on peut également procéder par identification) :

$$Q = \mathrm{i}X^2 - (\mathrm{i} + 1)X + (2\mathrm{i} - 1).$$

D'après la question 1, Q admet pour racines $s_1 = 1 - 2\mathrm{i}$ et $s_2 = \mathrm{i}$. On a donc la décomposition en produit de facteurs irréductibles suivante pour $P \in \mathbb{C}[X]$

$$P = \mathrm{i}(X + 3)(X - \mathrm{i})(X - (1 - 2\mathrm{i})).$$

On peut finalement conclure que les racines de (E_2) sont -3, i et $1 - 2\mathrm{i}$.

Solution de l'exercice 7

1 - Première méthode : dans $\mathbb{C}$, les racines de $X^6 + 1$ sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$. Le polynôme P se factorise alors dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme irréductible

$$P = (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6})$$

Copyrighted material

dont on déduit la factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ suivante

$$P = (X^2 - X\sqrt{3} + 1)(X^2 + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1).$$

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} P &= X^6 - X^4 + X^4 + X^2 - X^2 + 1 \\ &= X^2(X^4 - X^2 + 1) + X^4 - X^2 + 1 \\ &= (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) \\ &= (X^2 + 1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2) \\ &= (X^2 + 1)\left((X^2 + 1)^2 - 3X^2\right) \\ &= (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

2 - Première méthode : en posant $Y = X^4$, le polynôme $Q = X^8 + X^4 + 1$ s'écrit $Y^2 + Y + 1$ dont les deux racines (complexes) sont j et $\bar{\mathrm{j}}$. Il convient alors de calculer les racines quatrièmes de j et celles de $\bar{\mathrm{j}}$. Les racines quatrièmes de j sont les nombres complexes

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

c'est-à-dire les nombres complexes

$$z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}, \quad z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3} = \mathrm{j}, \quad z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6} \quad \text{et} \quad z_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}.$$

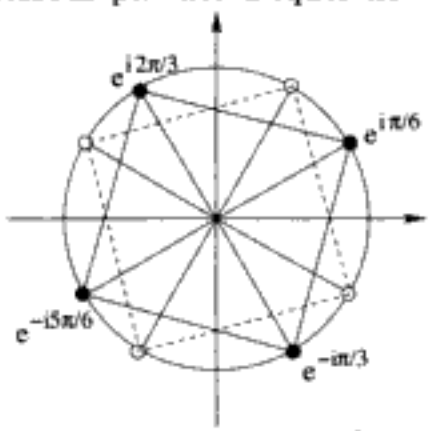
Leurs images sont représentées sur la figure ci-dessous par des disques noirs.

Les racines quatrièmes de $\bar{\mathrm{j}}$ sont les conjugués des racines quatrièmes de j. Autrement dit, les racines quatrièmes de $\bar{\mathrm{j}}$ sont les complexes

$$\overline{z}_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}, \quad \overline{z}_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3} = \bar{\mathrm{j}},$$

$$\overline{z}_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6} \quad \text{et} \quad \overline{z}_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}.$$

Leurs images sont représentées sur la figure ci-contre par des disques blancs.



Il suffit alors de factoriser, puis de regrouper les complexes conjugués deux à deux. On obtient la factorisation irréductible de Q dans $\mathbb{R}[X]$ suivante

$$\begin{aligned} Q &= (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3})(X - \mathrm{j})(X - \bar{\mathrm{j}})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}) \\ &\quad \times (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6}) \\ &= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

Copyrighted material

Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} Q &= X^8 + 2X^4 + 1 - X^4 \\ &= (X^4+1)^2 - X^4 \\ &= (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) \\ &= (X^4 + 2X^2 + 1 - X^2)(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2) \\ &= \left((X^2+1)^2 - X^2\right)\left((X^2+1)^2 - 3X^2\right) \\ &= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

3 - On commence par poser $Y = X^3$. Les racines de $Y^2 - 2Y\cos\varphi + 1$ sont $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$. Pour obtenir les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme R, il suffit alors de résoudre les deux équations $X^3 = e^{i\varphi}$ et $X^3 = e^{-i\varphi}$. Les solutions sont $e^{\pm i\varphi/3}$, $e^{\pm i(\varphi+2\pi)/3}$ et $e^{\pm i(\varphi-2\pi)/3}$. On en déduit alors la factorisation irréductible de R dans $\mathbb{R}[X]$ suivante

$$\begin{aligned} R &= \left(X^2 - 2X\cos\frac{\varphi}{3} + 1\right)\left(X^2 - 2X\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} + 1\right) \\ &\quad \times \left(X^2 - 2X\cos\frac{\varphi-2\pi}{3} + 1\right). \end{aligned}$$

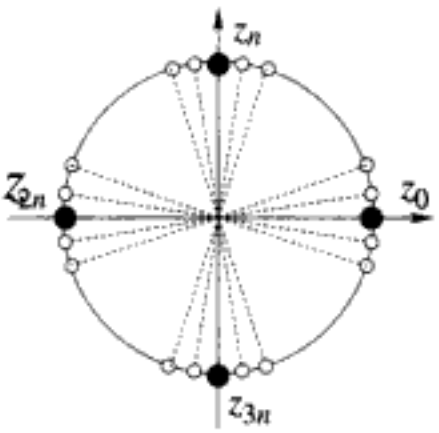
Solution de l'exercice 8

1 - Les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{4n} - 1 = 0$ sont

$$z_k = e^{ik\pi/2n}$$

avec k un entier variant de 0 à $4n-1$. En particulier,

$$z_0 = 1,\ z_n = i,\ z_{2n} = -1 \quad \text{et} \quad z_{3n} = -i.$$



On a :

$$z_0^4 = z_n^4 = z_{2n}^4 = z_{3n}^4 = 1.$$

2 - Pour vérifier l'égalité $z^{4n} - 1 = (z^4 - 1)\sum_{k=0}^{n-1} z^{4k}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de développer le terme de droite. Remarquons que si $z \in \{1, i, -1, -i\}$ alors $\sum_{k=0}^{n-1} z^{4k} = n$. Sinon, par sommation d'une suite géométrique de raison z^4 et de premier terme 1, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^{4k} = \sum_{k=0}^{n-1} (z^4)^k = \frac{z^{4n} - 1}{z^4 - 1}.$$

3 - Considérons le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par $P = X^{4n} - 1$. Ce polynôme admet $4n$ racines distinctes sur $\mathbb{C}$. Elles ont été calculées à la question 1. Son terme de plus haut degré ayant pour coefficient 1, la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$X^{4n} - 1 = \prod_{k=0}^{4n-1} (X - e^{ik\pi/2n}).$$

Copyrighted material

Réécrivons cette factorisation sous une autre forme. Procédons pour cela en plusieurs étapes. Commençons par extirper les deux racines réelles $z_0 = 1$ et $z_{2n} = -1$. En remarquant que $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$, on obtient

$$X^{4n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) \underbrace{\prod_{k=2n+1}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})}_{k' = 4n-k}.$$

Comme indiqué sous l'accolade, on effectue le changement d'indice $k' = 4n - k$ uniquement dans le deuxième produit. On a

$$\prod_{k=2n+1}^{4n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) = \prod_{k'=2n-1}^{1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(4n-k')\pi/2n}) = \prod_{k'=1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\pi/2n}).$$

Puisque l'indice k' est muet, il peut être remplacé par k. On obtient

$$\begin{aligned} X^{4n} - 1 &= (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n}) \prod_{k=1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n}) \\ &= (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n}). \end{aligned}$$

Extirpons maintenant les racines imaginaires pures $z_n = \mathrm{i}$ et $z_{3n} = -\mathrm{i}$. En remarquant que $(X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i}) = X^2 + 1$, on obtient

$$\begin{aligned} X^{4n} - 1 = \underbrace{(X^2 - 1)(X^2 + 1)}_{X^4 - 1} & \prod_{k=1}^{n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n}) \\ & \times \underbrace{\prod_{k=n+1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})}_{k' = 2n-k}. \end{aligned}$$

Comme indiqué sous l'accolade, on effectue le changement d'indice $k' = 2n - k$ uniquement dans le deuxième produit. On a

$$\begin{aligned} & \prod_{k=n+1}^{2n-1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n}) \\ &= \prod_{k'=n-1}^{1} (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-k')\pi/2n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-k')\pi/2n}) \\ &= \prod_{k'=1}^{n-1} (X + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\pi/2n})(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\pi/2n}). \end{aligned}$$

Copyrighted material

L'indice k' étant muet, on le remplace par k. On obtient ainsi

$$X^{4n}-1=(X^4-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})(X+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n})(X+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}(X-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n}) &= X^2-2\mathrm{i}X\sin\frac{k\pi}{2n}-1,\\ (X+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/2n})(X-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/2n}) &= X^2+2\mathrm{i}X\sin\frac{k\pi}{2n}-1,\end{aligned}$$

on obtient

$$X^{4n}-1=(X^4-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2\mathrm{i}X\sin\frac{k\pi}{2n}-1)(X^2+2\mathrm{i}X\sin\frac{k\pi}{2n}-1).$$

Enfin, d'après l'égalité établie à la question 2, on obtient pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}z^{4k}=\prod_{k=1}^{n-1}(z^2-2\mathrm{i}z\sin\frac{k\pi}{2n}-1)(z^2+2\mathrm{i}z\sin\frac{k\pi}{2n}-1).$$

4 - Il suffit de prendre $z=1$ dans l'égalité démontrée à la question 3.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(-2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)\times\left(2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)=2^{2(n-1)}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n},$$

dont on déduit

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Solution de l'exercice 9

En préambule à l'exercice, bien que cela ne soit pas demandé, on vérifie que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le polynôme B_n (de degré n) est à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et normalisé (son coefficient de plus haut degré vaut 1). Le cas $n=0$ est immédiat car $B_0=1$. On suppose (hypothèse de récurrence) que $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k$ avec $b_0,b_1,\ldots,b_n$ appartenant à $\mathbb{Q}^{n+1}$ et $b_n=1$, et on pose

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}a_kX^k.\quad\text{On a alors}\quad B'_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_kkX^{k-1}=\sum_{k'=0}^{n}a_{k'+1}(k'+1)X^{k'}$$

où on a effectué le changement d'indice $k'=k-1$. La relation $B'_{n+1}=(n+1)B_n$ qui s'écrit aussi $B'_{n+1}-(n+1)B_n=0$ donne

$$\sum_{k=0}^{n}\big(a_{k+1}(k+1)-(n+1)b_k\big)X^k=0.$$

Copyrighted material

On en déduit que $a_{k+1} = (n+1)b_k/(k+1)$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ puisqu'un polynôme est nul si tous ses coefficients sont nuls. On conclut alors que les coefficients a_1, a_2, $\ldots$, a_{n+1} appartiennent à $\mathbb{Q}$ puisque les coefficients b_0, b_1, $\ldots$, b_n appartiennent à $\mathbb{Q}$. On a aussi $a_{n+1} = b_n = 1$. Par ailleurs,

$$\int_0^1 \widetilde{B}_{n+1}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n+1}\left(a_k \int_0^1 x^k \mathrm{d}x\right) = a_0 + \sum_{k=0}^{n+1}\frac{a_k}{k+1}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{B}_{n+1}(x)\mathrm{d}x = 0$. Ainsi, $\displaystyle a_0 = -\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{k+1}$, ce qui implique $a_0 \in \mathbb{Q}$.

1 - On trouve

$$B_1 = X - 1/2, \quad B_2 = X^2 - X + 1/6,$$
$$B_3 = X^3 - 3/2X^2 + 1/2X, \quad B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - 1/30.$$

2 - La démonstration s'effectue par récurrence sur n. Le cas $n = 2$ est immédiat puisque d'après le calcul précédent

$$\widetilde{B}_2(0) = 1/6 = \widetilde{B}_2(1).$$

De l'égalité $B'_{n+1} = (n+1)B_n$ on déduit[8]

$$\widetilde{B}_{n+1}(1) - \widetilde{B}_{n+1}(0) = \int_0^1 \widetilde{B}'_{n+1}(x)\mathrm{d}x = (n+1)\int_0^1 \widetilde{B}_n(x)\mathrm{d}x.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{B}_n(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $\widetilde{B}_{n+1}(1) = \widetilde{B}_{n+1}(0)$.

3 - On vérifie que $\forall n \geqslant 1$, $Q_n = nX^{n-1}$ par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est immédiat. Supposons que $Q_n = nX^{n-1}$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et considérons le polynôme $\widetilde{Q}_{n+1}$ tel que $\widetilde{Q}_{n+1}(x) = \widetilde{B}_{n+1}(x+1) - \widetilde{B}_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant l'égalité $\widetilde{Q}_{n+1}(x) = \widetilde{B}_{n+1}(x+1) - \widetilde{B}_{n+1}(x)$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}'_{n+1}(x) &= \widetilde{B}'_{n+1}(x+1) - \widetilde{B}'_{n+1}(x)\\ &= (n+1)\widetilde{B}_n(x+1) - (n+1)\widetilde{B}_n(x) = (n+1)\widetilde{Q}_n(x),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$Q'_{n+1} = (n+1)nX^{n-1},$$

d'où $Q_{n+1} = (n+1)X^n + \beta$ où β est une constante à déterminer. Puisque $\widetilde{Q}_{n+1}(0) = \widetilde{B}_{n+1}(1) - \widetilde{B}_{n+1}(0) = 0$, on obtient $\beta = 0$, ce qui termine la récurrence.

4 - On a : $\widetilde{Q}_{n+1}(1) = 1$ et on vérifie que

$$\widetilde{Q}_{n+1}(2) = (n+1)2^n, \quad \widetilde{Q}_{n+1}(3) = (n+1)3^n, \quad \ldots, \quad \widetilde{Q}_{n+1}(k) = (n+1)k^n.$$

[8] Pour toute fonction f dérivable sur $[a, b]$ on a $\displaystyle f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$.

Copyrighted material

On en déduit que

$$1+2^n+3^n+\ldots+k^n=\frac{1}{n+1}\left(\widetilde{Q}_{n+1}(1)+\widetilde{Q}_{n+1}(2)+\ldots+\widetilde{Q}_{n+1}(k)\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}S_{k,n} &= \frac{1}{n+1}\left(\widetilde{Q}_{n+1}(1)+\widetilde{Q}_{n+1}(2)+\ldots+\widetilde{Q}_{n+1}(k)\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\Big(\widetilde{B}_{n+1}(2)-\widetilde{B}_{n+1}(1)+\widetilde{B}_{n+1}(3)-\widetilde{B}_{n+1}(2)+\ldots\\ &\qquad +\widetilde{B}_{n+1}(k+1)-\widetilde{B}_{n+1}(k)\Big)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\widetilde{B}_{n+1}(k+1)-\widetilde{B}_{n+1}(1)\right).\end{aligned}$$

5 - En utilisant les résultats de la question 1, on trouve

$$S_{k,1}=\frac{(k+1)k}{2},\quad S_{k,2}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\quad\text{et}\quad S_{k,3}=\frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

6 - Le résultat s'obtient par récurrence sur n. Le cas $n=0$ est immédiat puisque $B_0=1$ et $(-1)^0=1$. Supposons que $\widetilde{B}_n(1-x)=(-1)^n\widetilde{B}_n(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ (c'est notre hypothèse de récurrence). On obtient en dérivant l'application $x\in\mathbb{R}\longmapsto\widetilde{B}_{n+1}(1-x)$ par la formule de dérivation des fonctions composées

$$\left(\widetilde{B}_{n+1}(1-x)\right)'=-\widetilde{B}'_{n+1}(1-x)=-(n+1)\widetilde{B}_n(1-x)$$

car les polynômes de Bernoulli vérifient $B'_{n+1}=(n+1)B_n$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\left(\widetilde{B}_{n+1}(1-x)\right)'=(-1)^{n+1}(n+1)\widetilde{B}_n(x)=(-1)^{n+1}\left(\widetilde{B}_{n+1}(x)\right)'.$$

On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\widetilde{B}_{n+1}(1-x)=(-1)^{n+1}\widetilde{B}_{n+1}(x)+\alpha$ où α est une constante à déterminer. Cela implique que

$$\int_0^1\widetilde{B}_{n+1}(1-x)\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\int_0^1\widetilde{B}_n(x)\mathrm{d}x+\alpha.$$

L'intégrale du membre de droite est nulle (c'est une des propriétés des polynômes de Bernoulli). Celle du membre de gauxhe est nulle aussi puisque en effectuant le changement de variable $y=1-x$, on obtient

$$\int_0^1\widetilde{B}_{n+1}(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\widetilde{B}_{n+1}(y)\mathrm{d}y.$$

Ainsi, $\alpha=0$. On a par conséquent démontré que pour tout entier naturel n, $\widetilde{B}_n(1-x)=(-1)^n\widetilde{B}_n(x)$ et ce pour tout $x\in\mathbb{R}$. En particulier, en prenant $x=0$, on a

$$\widetilde{B}_n(1)=(-1)^n\widetilde{B}_n(0).$$

Copyrighted material

Ainsi, $\widetilde{B}_n(1) = \widetilde{B}_n(0)$ si $n = 2p$ et $\widetilde{B}_n(1) = -\widetilde{B}_n(0)$ si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. En combinant ce résultat avec $\widetilde{B}_n(0) = \widetilde{B}_n(1)$ pour tout $n \geqslant 2$, on en déduit que $b_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.

7 - D'après la formule de Taylor, on a

$$\widetilde{B}_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\widetilde{B_n^{(k)}}(x)}{k!} y^k.$$

Il suffit alors de vérifier que $\widetilde{B_n^{(k)}}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}\widetilde{B}_{n-k}(x)$, c'est-à-dire que

$$\widetilde{B}_n^{(k)}(x) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)\widetilde{B}_{n-k}(x).$$

Partant de la relation $B_n' = nB_{n-1}$ définissant les polynômes de Bernoulli, on trouve successivement

$$\begin{array}{rcl} B_n'' & = & n \times (n-1)B_{n-2} \\ B_n''' & = & n \times (n-1) \times (n-2)B_{n-3} \\ & \vdots & \\ B_n^{(k)} & = & n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)B_{n-k}. \end{array}$$

On aurait pu démontrer ce résultat par récurrence.

8 - La première égalité s'obtient en prenant $x = 0$ dans l'égalité

$$\widetilde{B}_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \widetilde{B}_{n-k}(x) y^k.$$

La deuxième s'obtient en effectuant un changement d'indice dans la sommation. Par ailleurs,

$$\widetilde{B}_n(1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k b_k + b_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k b_k + \widetilde{B}_n(0).$$

Or $\widetilde{B}_n(1) = \widetilde{B}_n(0)$ dès que $n \geqslant 2$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k b_k = 0.$$

Solution de l'exercice 10

1 - Raisonnons par l'absurde. Considérons deux polynômes distincts P et Q de $\mathbb{R}[X]$ et de degré $\leqslant n$ tels que $\widetilde{P}(x_j) = y_j$ et $\widetilde{Q}(x_j) = y_j$ pour tout entier j compris entre 0 et n. On en déduit que $\widetilde{P}(x_j) - \widetilde{Q}(x_j) = 0$ pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, ou, de manière équivalente, que

$$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad \widetilde{(P-Q)}(x_j) = 0,$$

Copyrighted material

ce qui signifie que le polynôme non nul $P - Q$, de degré $\leqslant n$, possède $n+1$ racines, ce qui est impossible. L'unicité est démontrée.

2 - Soit $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ fixé. Le polynôme $L_i \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant n$ et défini par $\widetilde{L}_i(x_i) = 1$ et pour tout $j \neq i$, $\widetilde{L}_i(x_j) = 0$ admet pour racines $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, c'est-à-dire x_j avec $j \in \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. On en dénombre n. Le polynôme L_i se factorise donc sous la forme suivante

$$L_i = \alpha_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - x_j) \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Or $\widetilde{L}_i(x_i) = 1$. Ainsi, $\alpha_i = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$. On en déduit pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

3 - Le polynôme d'interpolation s'écrit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i L_i$. On a en effet $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\deg(P) \leqslant n \qquad \text{et} \qquad \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad \widetilde{P}(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \widetilde{L}_i(x_j) = y_j.$$

4 - On a $P = -X(X^2 - 4)/3$ et

$$L_0 = -\frac{X(X-1)(X-2)}{6}, \quad L_1 = \frac{(X+1)(X-1)(X-2)}{2},$$
$$L_2 = -\frac{X(X+1)(X-2)}{2}, \quad L_3 = \frac{X(X-1)(X+1)}{6}.$$

Copyrighted material

Copyrighted material

Chapitre 7

Le corps des fractions rationnelles

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous avons vu que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ possède une structure d'anneau commutatif. De plus, si le produit de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est nul alors l'un ou l'autre de ces deux polynômes est nécessairement nul (l'anneau des polynômes est un anneau intègre). Malheureusement, $\mathbb{K}[X]$ ne possède pas une structure de corps car seuls les polynômes constants et différents du polynôme nul sont inversibles (c'est-à-dire symétrisable pour la multiplication). Nous allons définir dans ce chapitre un nouvel ensemble, que nous noterons $\mathbb{K}(X)$ (remarquer la présence de parenthèses à la place des crochets), qui « englobe » $\mathbb{K}[X]$ et qui possède, lui, une structure de corps (commutatif). Afin d'alléger les notations, on note par la même lettre un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

7.1 Les fractions rationnelles

7.1.1 Définition d'une fraction rationnelle

On note $\mathbb{K}[X]^*$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ privé de $0_{\mathbb{K}[X]}$. Autrement dit,

$$\mathbb{K}[X]^* \overset{not.}{=} \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}.$$

On considère sur l'ensemble $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ la relation $\mathcal{R}$ définie comme suit : deux couples (A_1, B_1) et (A_2, B_2) de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ sont en relation par $\mathcal{R}$, et on note $(A_1, B_1)\mathcal{R}(A_2, B_2)$, si

$$A_1 \times B_2 = A_2 \times B_1.$$

La relation $\mathcal{R}$ vérifie les trois propriétés suivantes.

- Elle est réflexive : pour tout $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$, $(A, B)\mathcal{R}(A, B)$ (c'est immédiat).

Copyrighted material

- De plus, elle est symétrique : pour tous $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ appartenant à $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$,

$$(A_1, B_1)\mathcal{R}(A_2, B_2) \quad \Longrightarrow \quad (A_2, B_2)\mathcal{R}(A_1, B_1).$$

  Cela se déduit de la propriété de symétrie de l'égalité.
- Enfin, elle est transitive. Pour s'en convaincre, prenons (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) trois couples de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ tels que

$$(A_1, B_1)\mathcal{R}(A_2, B_2) \quad \text{et} \quad (A_2, B_2)\mathcal{R}(A_3, B_3),$$

  c'est-à-dire tels que

$$A_1 \times B_2 = A_2 \times B_1, \tag{1}$$
$$A_2 \times B_3 = A_3 \times B_2. \tag{2}$$

  On vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcccl} (A_1 \times B_3) \times B_2 & = & (A_1 \times B_2) \times B_3 & = & (A_2 \times B_1) \times B_3 \quad \text{d'après (1)} \\ & = & (A_2 \times B_3) \times B_1 & = & (A_3 \times B_2) \times B_1 \quad \text{d'après (2)} \\ & = & (A_3 \times B_1) \times B_2. & & \end{array}$$

  On a donc obtenu l'égalité :

$$\Big((A_1 \times B_3) - (A_3 \times B_1)\Big) \times B_2 = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

  Puisque $B_2 \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et puisqu'il n'existe pas de diviseur de zéro dans $\mathbb{K}[X]$, on en déduit que

$$A_1 \times B_3 = A_3 \times B_1,$$

  c'est-à-dire que

$$(A_1, B_1)\mathcal{R}(A_3, B_3).$$

La relation $\mathcal{R}$ définit ainsi une ***relation d'équivalence*** (voir la définition 2.28, p. 55) sur $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$. Cela donne un sens à la définition suivante.

Définition 7.1 ✗ *Pour tout $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$, on appelle* **fraction rationnelle sur** $\mathbb{K}$, *et on note A/B, la classe d'équivalence du couple (A, B) modulo $\mathcal{R}$. En d'autres termes,*

$$\frac{A}{B} \overset{\text{déf.}}{=} \left\{(C, D) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^* \;\middle|\; A \times D = C \times B\right\}.$$

Le couple (A, B) de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ est alors un représentant de la fraction rationnelle A/B. Le polynôme A se nomme le **numérateur** *et B le* **dénominateur**.

✗ *On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble quotient de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. En d'autres termes,*

$$\mathbb{K}(X) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{\frac{A}{B} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*\right\}.$$

Copyrighted material

On déduit des propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité de $\mathcal{R}$ (voir la remarque p. 55, chap. 2), qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux fractions rationnelles A/B et C/D soient égales est que l'on ait $A \times D = C \times B$. Autrement dit, pour tous (A, B), (C, D) appartenant à $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff A \times D = C \times B.$$

On rappelle que tous les éléments d'une même classe d'équivalence sont représentants de la classe à laquelle ils appartiennent. Tout couple (C, D) de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ vérifiant $A \times D = C \times B$ peut donc être considéré comme représentant de la fraction rationnelle A/B. Un représentant de la fraction rationnelle A/B s'écrit sous la forme

$$(P \times A, P \times B)$$

avec P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Par exemple, les deux fractions

$$F_1 = \frac{X^5 - 3X^4 - X^3 + 3X^2}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6} \quad \text{et} \quad F_2 = \frac{X^4 - X^2}{X^2 - 3X + 2}$$

sont égales car

$$X^5 - 3X^4 - X^3 + 3X^2 = (X - 3)(X^4 - X^2),$$

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 3)(X^2 - 3X + 2).$$

Définition 7.2 *On appelle* ***représentant irréductible*** *(ou* ***forme irréductible****) d'une fraction rationnelle non nulle F de $\mathbb{K}(X)$ tout couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$, $B \neq 0$ et tel que A et B ne possèdent pas de diviseurs communs.*

Toute fraction rationnelle F non nulle possède un représentant irréductible (ce résultat est admis). Si le couple (A, B) désigne ce représentant alors tout couple de la forme $(\lambda A, \lambda B)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est aussi un représentant irréductible de F. On dit que F admet pour forme irréductible la fraction rationnelle A/B.

Exemple La fraction rationnelle $F = A/B$ de $\mathbb{R}(X)$ avec

$$A = X^4 - X^2 \quad \text{et} \quad B = X^2 - 3X + 2$$

admet pour forme irréductible le couple $\left(X^2(X + 1), X - 2\right)$ car

$$\frac{X^4 - X^2}{X^2 - 3X + 2} = \frac{X^2(X - 1)(X + 1)}{(X - 1)(X - 2)} = \frac{X^2(X + 1)}{X - 2}.$$

Copyrighted material

Opérations sur $\mathbb{K}(X)$

On munit l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ de deux lois de composition interne, l'addition et la multiplication, notées respectivement $+$ et $\times$, et définies pour tous A_1/B_1, A_2/B_2 appartenant à $\mathbb{K}(X)$ par :

$$\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{A_1 \times B_2 + B_1 \times A_2}{B_1 \times B_2} \quad \text{et} \quad \frac{A_1}{B_1} \times \frac{A_2}{B_2} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{A_1 \times A_2}{B_1 \times B_2}.$$

Ces deux lois sont légitimes car elles ne dépendent pas des représentants choisis pour chacune des fractions. Elles vérifient de plus les propriétés suivantes.

- La loi $+$ est associative et commutative sur $\mathbb{K}(X)$. Elle admet pour élément neutre l'élément $0_{\mathbb{K}[X]}/1_{\mathbb{K}[X]}$ car pour tout $A/B \in \mathbb{K}(X)$

$$\frac{A}{B} + \frac{0_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]}} = \frac{A \times 1_{\mathbb{K}[X]} + 0_{\mathbb{K}[X]} \times B}{B \times 1_{\mathbb{K}[X]}} = \frac{A \times 1_{\mathbb{K}[X]}}{B \times 1_{\mathbb{K}[X]}} = \frac{A}{B}.$$

  Tout élément A/B de $\mathbb{K}(X)$ admet pour opposé la fraction rationnelle $(-A)/B$ que l'on note $-(A/B)$.
- La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$.
- La loi $\times$ est associative et commutative sur $\mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $1_{\mathbb{K}[X]}/1_{\mathbb{K}[X]}$ est l'élément neutre pour la loi $\times$ car pour tout $A/B \in \mathbb{K}(X)$

$$\frac{A}{B} \times \frac{1_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]}} = \frac{A \times 1_{\mathbb{K}[X]}}{B \times 1_{\mathbb{K}[X]}} = \frac{A}{B}.$$

  Toute fraction rationnelle A/B non nulle admet un inverse. C'est la fraction rationnelle B/A.

Muni de ces deux lois, l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ possède une structure de corps commutatif.

Injection canonique de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$

Considérons l'application Φ définie de l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$ dans l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnnelles sur $\mathbb{K}$ par

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \Phi(P) = \frac{P}{1_{\mathbb{K}[X]}}.$$

Cette application est injective puisque si $\Phi(P) = \Phi(Q)$ alors, par définition de l'application Φ, on a $P/1_{\mathbb{K}[X]} = Q/1_{\mathbb{K}[X]}$, ou, de manière équivalente,

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = Q \times 1_{\mathbb{K}[X]},$$

c'est-à-dire $P = Q$. On l'appelle l'***injection canonique de*** $\mathbb{K}[X]$ ***dans*** $\mathbb{K}(X)$. Par l'intermédiaire de cette injection, on identifie tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ à la fraction rationnelle $P/1_{\mathbb{K}[X]}$ de $\mathbb{K}(X)$ et on note

$$\frac{P}{1_{\mathbb{K}[X]}} \overset{\text{not.}}{=} P$$

Copyrighted material

où Φ est sous-entendue, l'écriture correcte étant « $P/1_{\mathbb{K}[X]} = \Phi(P)$ ». On dit que l'on immerge l'ensemble des polynômes dans l'ensemble des fractions rationnelles et on note[1]

$$\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X).$$

Ce faisant, on procède d'une manière analogue à celle utilisée lors de la construction du corps commutatif $\mathbb{Q}$ à partir de l'anneau commutatif intègre $\mathbb{Z}$.

7.1.2 Racines et pôles d'une fraction rationnelle

Commençons par définir les racines d'une fraction rationnelle.

Définition 7.3 *Soit $F = A/B \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible et non nulle.*

✗ *On appelle* **racine** *de la fraction F toute racine du polynôme A dans $\mathbb{K}[X]$.*

✗ *On appelle* **ordre de multiplicité de la racine** *α de F l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de A dans $\mathbb{K}[X]$.*

Définissons maintenant les pôles d'une fraction rationnelle.

Définition 7.4 *Soit $F = A/B \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible et non nulle.*

✗ *L'élément β de $\mathbb{K}$ est appelé* **pôle** *de F s'il est une racine du polynôme B dans $\mathbb{K}[X]$.*

✗ *On appelle* **ordre de multiplicité du pôle** *β de F l'ordre de multiplicité de β en tant que racine de B dans $\mathbb{K}[X]$.*

Exemples

1. La fraction $X^2(X+1)/(X-2)$ de $\mathbb{R}(X)$ admet pour racine -1 (racine simple) et 0 (racine double), et pour pôle 2 (pôle simple).

2. La fraction $(X-4)^3/(X^2+X+1)$ de $\mathbb{R}(X)$ admet pour racine 4 (racine triple). Elle n'admet aucun pôle (sous-entendu sur $\mathbb{R}$).

Remarque Comme c'était le cas pour les polynômes, les notions de racine et de pôle d'une fraction rationnelle dépendent du corps $\mathbb{K}$ considéré. Considérons par exemple la fraction rationnelle irréductible suivante :

$$F = \frac{X^2+1}{X^2+X+1}.$$

– Cette fraction rationnelle appartient à $\mathbb{R}(X)$. Elle ne possède aucune racine et aucun pôle sur $\mathbb{R}$.

[1] Là encore, nous commettons un abus de notation. Nous devrions écrire $\Phi(\mathbb{K}[X]) \subset \mathbb{K}(X)$.

Copyrighted material

– Elle peut aussi s'interpréter comme un élément de $\mathbb{C}(X)$. Dans ce cas-là, elle admet pour racine (sur $\mathbb{C}$) les complexes i et $-$i (racines simples) et pour pôle (sur $\mathbb{C}$) les complexes j et $\bar{\mathrm{j}}$ (pôles simples).

Définition 7.5 *À toute fraction rationnelle $F = A/B$ de $\mathbb{K}(X)$ on associe la fonction $\widetilde{F} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout x appartenant à $\mathbb{K}$ distinct des pôles de F par*

$$\widetilde{F}(x) = \frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)}.$$

Cette fonction est appelée ***fonction rationnelle associée à*** F.

Remarque Contrairement à la fonction polynomiale $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ associée à un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, qui est définie pour tout $x \in \mathbb{K}$ (on pourrait dans ce cas parler d'application plutôt que de fonction), la fonction rationnelle $\widetilde{F} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ associée à une fraction rationnelle F de $\mathbb{K}(X)$ n'est définie que sur l'ensemble $\mathbb{K}$ privé des pôles de F. Si la fraction rationnelle possède au moins un pôle, alors son ensemble de définition est strictement inclus dans son ensemble de départ.

Comme nous l'avons fait pour les polynômes, et ce afin d'alléger les notations, nous convenons de noter par la même lettre F la fraction rationnelle F de $\mathbb{K}[X]$ et sa fonction rationnelle associée $\widetilde{F} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.

7.2 Décomposition d'une fraction rationnelle

7.2.1 Partie entière d'une fraction rationnelle

Soit $A/B \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible. La division euclidienne de A par B dans l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$ nous assure l'existence et l'unicité de deux polynômes Q et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$A = B \times Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

On obtient alors, dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$,

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

puisque

$$Q + \frac{R}{B} = \frac{Q}{1_{\mathbb{K}[X]}} + \frac{R}{B} = \frac{Q \times B + R \times 1_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]} \times B} = \frac{Q \times B + R}{B} = \frac{A}{B}.$$

La fraction rationnelle A/B étant irréductible, la fraction rationnelle R/B est elle-même irréductible et le degré de son numérateur est strictement inférieur à celui de son dénominateur. Le polynôme Q se nomme ***partie entière de la fraction rationnelle*** A/B. Il est nul si $\deg(A) < \deg(B)$.

Copyrighted material

7.2.2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$

Commençons par deux résultats préliminaires. Le premier, qui fait l'objet du lemme 7.1, nous permet de décomposer une fraction rationnelle R/B telle que $\deg(R) < \deg(B)$, en une somme de fractions rationnelles irréductibles de la forme

$$\frac{L}{P^n} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \deg(L) < \deg(P^n).$$

Lemme 7.1 *Soit R/B une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$, irréductible, telle que $\deg(R) < \deg(B)$ et telle que le dénominateur B admet une décomposition en facteurs premiers de $\mathbb{K}[X]$ de la forme*

$$B = P_1^{n_1} \times P_2^{n_2} \times \ldots \times P_m^{n_m}.$$

Alors il existe m polynômes $L_1, L_2, \ldots, L_m$ appartenant à $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\frac{R}{B} = \frac{L_1}{P_1^{n_1}} + \frac{L_2}{P_2^{n_2}} + \ldots + \frac{L_m}{P_m^{n_m}}$$

avec $\deg(L_k) < \deg\left(P_k^{n_k}\right)$ pour tout entier k compris entre 1 et m. Cette décomposition est unique.

La démonstration de ce lemme s'effectue en utilisant une récurrence sur m. Elle utilise un résultat puissant d'arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$, le théorème de Bézout, dont l'énoncé et la démonstration dépassent le cadre de cet ouvrage. Le lemme 7.1 est donc à admettre. Nous l'illustrons toutefois dans l'exemple suivant.

Exemple Considérons dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante

$$\frac{R}{B} = \frac{4X}{(X^2 - 2X + 1)(X^2 + 1)^2}.$$

La décomposition de B en produit de facteurs premiers de $\mathbb{R}[X]$ est

$$B = P_1^2 \times P_2^2 \quad \text{avec} \quad P_1 = X - 1 \quad \text{et} \quad P_2 = X^2 + 1.$$

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur. Ainsi, le résultat du lemme 7.1 nous assure l'existence de deux polynômes L_1 et L_2 de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$\deg(L_1) < \deg(P_1^2) = 2 \quad \text{et} \quad \deg(L_2) < \deg(P_2^2) = 4$$

et tels que

$$\frac{R}{B} = \frac{L_1}{P_1^2} + \frac{L_2}{P_2^2}.$$

Ces deux polynômes s'écrivent $L_1 = 2 - X$ et $L_2 = X^3 + X - 2$ puisqu'on peut vérifier (en réduisant au même dénominateur) que

$$\frac{2 - X}{(X - 1)^2} + \frac{X^3 + X - 2}{(X^2 + 1)^2} = \frac{4X}{(X - 1)^2(X^2 + 1)^2}. \tag{3}$$

Copyrighted material

Le deuxième résultat qui fait l'objet du lemme 7.2, va nous permettre de poursuivre la décomposition.

Lemme 7.2 *Soit $L/P^n \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible telle que* $\deg(L) < \deg(P^n)$. *Alors il existe n polynômes $S_1, S_2, \ldots, S_n$ appartenant à* $\mathbb{K}[X]$ *tels que*

$$\frac{L}{P^n} = \frac{S_1}{P} + \frac{S_2}{P^2} + \ldots + \frac{S_n}{P^n}$$

avec $\deg(S_k) < \deg(P)$ *pour tout entier k compris entre* 1 *et n. Cette décomposition est unique.*

Démonstration Utilisons une récurrence sur n.

$\trianglerighteq$ Le cas $n = 1$ est immédiat : on a $S_1 = L$.

$\trianglerighteq$ Supposons le résultat vrai pour un entier n (c'est notre hypothèse de récurrence) et montrons-le pour l'entier $n + 1$. Soit $L/P^{n+1} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible telle que

$$\deg(L) < \deg(P^{n+1}).$$

Effectuons la division euclidienne de L par P. Il existe un unique couple $(L_n, S_{n+1}) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$L = P \times L_n + S_{n+1} \quad \text{et} \quad \deg(S_{n+1}) < \deg(P).$$

On en déduit l'égalité

$$\frac{L}{P^{n+1}} = \frac{L_n}{P^n} + \frac{S_{n+1}}{P^{n+1}}.$$

Remarquons que $\deg(L) = \deg(P)+\deg(L_n)$ (cette égalité sur les degrés est une conséquence de la division euclidienne de L par P). Par conséquent, puisque $\deg(L) < \deg(P^{n+1})$, on a $\deg(P) + \deg(L_n) < \deg(P^{n+1})$, soit

$$\deg(P) + \deg(L_n) < \deg(P^n) + \deg(P),$$

et en simplifiant à gauche et à droite de l'inégalité par $\deg(P)$, on obtient

$$\deg(L_n) < \deg(P^n).$$

Cela nous autorise à utiliser pour la fraction L_n/P^n notre hypothèse de récurrence : il existe n polynômes $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\frac{L_n}{P^n} = \frac{S_1}{P} + \frac{S_2}{P^2} + \ldots + \frac{S_n}{P^n}$$

avec $\deg(S_k) < \deg(P)$ pour tout entier k compris entre 1 et n, et cette décomposition est unique. On a ainsi obtenu l'existence de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}[X]$ (qui sont $S_1, S_2, \ldots, S_n$ et S_{n+1}) tels que

$$\frac{L}{P^{n+1}} = \frac{S_1}{P} + \frac{S_2}{P^2} + \ldots + \frac{S_n}{P^n} + \frac{S_{n+1}}{P^{n+1}}$$

avec $\deg(S_k) < \deg(P)$ pour tout entier k compris entre 1 et $n+1$. La propriété est vérifiée pour $n + 1$, ce qui achève la récurrence. □

Copyrighted material

Exemple Reprenons l'exemple précédent et appliquons le résultat du lemme 7.2 sur chacune des fractions rationnelles présentes dans le terme de droite de l'égalité (3). Considérons dans un premier temps la fraction rationnelle

$$\frac{L_1}{P_1^2} = \frac{2-X}{(X-1)^2}.$$

D'après le lemme 7.2, il existe deux polynômes $S_{1,1}$ et $S_{1,2}$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\frac{L_1}{P_1^2} = \frac{S_{1,1}}{P_1} + \frac{S_{1,2}}{P_1^2} \quad \text{avec} \quad \deg(S_{1,k}) < \deg(P_1) = 1 \quad \text{pour} \quad k \in \{1,2\}.$$

Le degré des deux polynômes $S_{1,1}$ et $S_{1,2}$ est nécessairement nul. Ce sont donc des polynômes constants : $S_{1,1} = \alpha$ et $S_{1,2} = \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On obtient $\alpha = -1$ et $\beta = 1$, d'où

$$\frac{2-X}{(X-1)^2} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}. \tag{4}$$

Nous nous intéressons dans un deuxième temps à la fraction rationnelle

$$\frac{L_2}{P_2^2} = \frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2}.$$

Toujours d'après le lemme 7.2, il existe deux polynômes $S_{2,1}$ et $S_{2,2}$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\frac{L_2}{P_2^2} = \frac{S_{2,1}}{P_2} + \frac{S_{2,2}}{P_2^2} \quad \text{avec} \quad \deg(S_{2,k}) < \deg(P_2) = 2 \quad \text{pour} \quad k \in \{1,2\}.$$

Les deux polynômes $S_{2,1}$ et $S_{2,2}$ s'écrivent nécessairement

$$\begin{cases} S_{2,1} = \gamma X + \delta & \text{avec} \quad (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2 \\ S_{2,2} = \mu X + \eta & \text{avec} \quad (\mu, \eta) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

puisque leur degré est strictement inférieur à 2. On obtient $\gamma = 1$, $\delta = 0$, $\mu = 0$ et $\eta = -2$, d'où

$$\frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2} = \frac{X}{X^2+1} + \frac{-2}{(X^2+1)^2}. \tag{5}$$

En regroupant chacune des deux décompositions (4) et (5) dans l'égalité (3), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} &= \frac{2-X}{(X-1)^2} + \frac{X^3+X-2}{(X^2+1)^2} \\ &= \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X}{X^2+1} + \frac{-2}{(X^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Copyrighted material

D'une manière plus générale, on a le résultat suivant.

Théorème 7.1 *Soit $A/B \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible dont le dénominateur B admet une décomposition dans $\mathbb{K}[X]$ en produit de polynômes irréductibles de la forme :*

$$B = P_1^{n_1} \times \ldots \times P_m^{n_m}.$$

La fraction rationnelle A/B se décompose alors de manière unique sous la forme :

$$\frac{A}{B} = Q + \underbrace{\frac{S_{1,1}}{P_1} + \frac{S_{1,2}}{P_1^2} + \ldots + \frac{S_{1,n_1}}{P_1^{n_1}}}_{\text{somme partielle relative à } P_1} + \ldots + \underbrace{\frac{S_{m,1}}{P_m} + \frac{S_{m,2}}{P_m^2} + \ldots + \frac{S_{m,n_m}}{P_m^{n_m}}}_{\text{somme partielle relative à } P_m}$$

où le polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ est la partie entière et, pour tout k variant de 1 à m, les polynômes $S_{k,1}, S_{k,2}, \ldots, S_{k,n_k}$ appartiennent à $\mathbb{K}[X]$ et vérifient :

$$\forall k \in \{1, \ldots, m\} \quad \begin{cases} deg(S_{k,1}) & < & deg(P_k) \\ deg(S_{k,2}) & < & deg(P_k) \\ & \vdots & \\ deg(S_{k,n_k}) & < & deg(P_k) \end{cases}.$$

Lorsque l'on a déterminé cette somme, on dit que l'on a effectué la ***décomposition en éléments simples sur*** $\mathbb{K}$ *de la fraction A/B.*

Démonstration La division euclidienne de A par B permet d'écrire de manière unique la fraction irréductible A/B de $\mathbb{K}(X)$ sous la forme

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \tag{6}$$

où Q et R sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(R) < \deg(B)$ (voir § 7.2.1 p. 274) et où la fraction R/B est irréductible. D'après le lemme 7.1, puisque $B = P_1^{n_1} \times \ldots \times P_m^{n_m}$, il existe m polynômes $L_1, \ldots, L_m$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\frac{R}{B} = \frac{L_1}{P_1^{n_1}} + \ldots + \frac{L_m}{P_m^{n_m}} \tag{7}$$

avec $\deg(L_k) < \deg\left(P_k^{n_k}\right)$ pour tout entier k compris entre 1 et m et cette décomposition est unique. En injectant (7) dans (6), on obtient

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{L_1}{P_1^{n_1}} + \ldots + \frac{L_m}{P_m^{n_m}}. \tag{8}$$

En appliquant alors le lemme 7.2 sur chacune des m fractions rationnelles $L_1/P_1^{n_1}, \ldots, L_m/P_m^{n_m}$ présentes dans le terme de droite de l'égalité (8), on

Copyrighted material

obtient pour tout entier k compris entre 1 et m l'existence de n_k polynômes $S_{k,1}$, $S_{k,2}$, …, S_{k,n_k} de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\frac{L_k}{P_k^{n_k}} = \frac{S_{k,1}}{P_k} + \frac{S_{k,2}}{P_k^2} + \ldots + \frac{S_{k,n_k}}{P_k^{n_k}} \tag{9}$$

avec $\deg(S_{k,\ell}) < \deg(P_k)$ pour tout $\ell \in \{1, 2, \ldots, n_k\}$, et cette décomposition est unique. En injectant pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$ l'expression (9) dans (8), on obtient

$$\frac{A}{B} = Q + \left(\frac{S_{1,1}}{P_1} + \frac{S_{1,2}}{P_1^2} + \ldots + \frac{S_{1,n_1}}{P_1^{n_1}}\right) + \ldots + \left(\frac{S_{m,1}}{P_m} + \frac{S_{m,2}}{P_m^2} + \ldots + \frac{S_{m,n_m}}{P_m^{n_m}}\right).$$

Cette dernière décomposition correspond à la décomposition en éléments simples de la fraction A/B sur $\mathbb{K}$, ce qui termine la démonstration. □

Remarques

1. La somme partielle relative au polynôme irréductible P_k est aussi appelée ***partie relative au polynôme*** P_k. En particulier, lorsque $P_k = X - \alpha$, c'est-à-dire lorsque $\alpha \in \mathbb{K}$ est un pôle, alors la somme partielle est appelée ***partie polaire relative à*** α ou ***partie relative au pôle*** α.

2. Le polynôme Q correspond à la partie entière de A/B. Ce polynôme est nul si $\deg(A) < \deg(B)$. Dans le cas contraire, il s'obtient en effectuant la division euclidienne de A par B.

7.2.3 Décomposition sur $\mathbb{C}$

Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Ainsi, tout polynôme

$$B = b_n X^n + \ldots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0 \in \mathbb{C}[X], \quad b_n \neq 0,$$

admet une décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de la forme :

$$B = b_n (X - \alpha_1)^{h_1} (X - \alpha_2)^{h_2} \ldots (X - \alpha_m)^{h_m}$$

où α_1, α_2, …, α_m sont les racines (dans $\mathbb{C}$) de B, de multiplicités respectives h_1, h_2, …, h_m. Par conséquent tout élément simple de $\mathbb{C}(X)$ est du type :

$$\frac{\lambda}{(X-\alpha)^k} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ d'une fraction rationnelle irréductible A/B de $\mathbb{C}(X)$ s'écrit

$$\frac{A}{B} = Q + \underbrace{\frac{\lambda_{1,1}}{X-\alpha_1} + \ldots + \frac{\lambda_{1,h_1}}{(X-\alpha_1)^{h_1}}}_{\text{partie relative au pôle } \alpha_1} + \ldots + \underbrace{\frac{\lambda_{m,1}}{X-\alpha_m} + \ldots + \frac{\lambda_{m,h_m}}{(X-\alpha_m)^{h_m}}}_{\text{partie relative au pôle } \alpha_m}$$

Copyrighted material

où, pour tout entier k compris entre 1 et m, les coefficients $\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,h_k}$ appartiennent à $\mathbb{C}$. Dans la partie relative à chaque pôle, le coefficient correspondant à l'élément simple de plus haut degré est nécessairement non nul. En d'autres termes,

$$\lambda_{1,h_1} \neq 0, \quad \ldots, \quad \lambda_{m,h_m} \neq 0.$$

Exemples

1. Soit $3/(X^3-1) \in \mathbb{C}(X)$. Le degré du numérateur étant strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière $Q \in \mathbb{C}[X]$ de la décomposition en éléments simples est nulle. La factorisation irréductible du dénominateur dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$X^3 - 1 = (X-1)(X-\mathrm{j})(X-\bar{\mathrm{j}}).$$

Les pôles 1, j et $\bar{\mathrm{j}}$ sont tous les trois de multiplicité 1. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$\frac{3}{X^3-1} = \frac{1}{X-1} + \frac{\mathrm{j}}{X-\mathrm{j}} + \frac{\bar{\mathrm{j}}}{X-\bar{\mathrm{j}}}.$$

Cette égalité se vérifie en réduisant au même dénominateur les trois dernières fractions rationnelles.

2. Soit $4/(X^2+1)^2 \in \mathbb{C}(X)$. La partie entière de la décomposition en éléments simples est nulle puisque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur. La décomposition du dénominateur en produits de polynômes irréductibles est

$$(X^2+1)^2 = (X+\mathrm{i})^2(X-\mathrm{i})^2.$$

Les pôles i et $-\mathrm{i}$ sont tous les deux d'ordre 2. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$\frac{4}{(X^2+1)^2} = \underbrace{\frac{-\mathrm{i}}{X-\mathrm{i}} + \frac{-1}{(X-\mathrm{i})^2}}_{\text{partie relative à i}} + \underbrace{\frac{\mathrm{i}}{X+\mathrm{i}} + \frac{-1}{(X+\mathrm{i})^2}}_{\text{partie relative à } -\mathrm{i}}.$$

7.2.4 Décomposition sur $\mathbb{R}$

Contrairement à $\mathbb{C}$, le corps $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes non nuls de degré 1 et les polynômes de degré 2 ne possédant aucune racine réelle, c'est-à-dire les polynômes de la forme

$$aX^2 + bX + c \quad \text{avec} \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad b^2 - 4ac < 0.$$

Par conséquent, on peut dire que dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$, il y a deux types d'éléments simples :

- les éléments simples dits de ***première espèce*** qui sont de la forme

$$\frac{\lambda}{(X-\alpha)^k} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N}^*;$$

Copyrighted material

– les éléments simples dits de ***seconde espèce*** qui sont de la forme

$$\frac{\lambda X+\mu}{(aX^2+bX+c)^k} \text{ avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ k\in\mathbb{N}^*\ \text{ et }\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad b^2-4ac<0.$$

Ainsi, dans la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ d'une fraction irréductible A/B de $\mathbb{R}(X)$, on trouvera deux sortes de sommes partielles.

– Dans le cas où la fraction $A/B\in\mathbb{R}(X)$ admet pour pôle de multiplicité h le réel α, on trouvera des sommes partielles de la forme

$$\frac{\lambda_1}{X-\alpha}+\frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2}+\ldots+\frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ appartenant à $\mathbb{R}$.

– Dans le cas où la décomposition en produit de polynômes irréductibles de B fait apparaître le facteur $(aX^2+bX+c)^n$ avec aX^2+bX+c un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ (c'est-à-dire tel que $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $b^2-4ac<0$), on trouvera des sommes partielles de la forme

$$\frac{\lambda_1 X+\mu_1}{aX^2+bX+c}+\frac{\lambda_2 X+\mu_2}{(aX^2+bX+c)^2}+\ldots+\frac{\lambda_n X+\mu_n}{(aX^2+bX+c)^n}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ appartenant à $\mathbb{R}$.

Exemple Reprenons la fraction rationnelle $F = 4X/(X-1)^2(X^2+1)^2$ de $\mathbb{R}(X)$, qui nous a servi d'exemple d'illustration des lemmes 7.1 et 7.2. Cette fraction rationnelle est irréductible dans $\mathbb{R}(X)$ et elle n'admet pour pôle (sous-entendu sur $\mathbb{R}$) que le réel 1. La décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$ s'écrit[(2)]

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}=\underbrace{\frac{\lambda}{X-1}+\frac{\mu}{(X-1)^2}}_{\text{partie relative au pôle 1}}+\underbrace{\frac{\alpha X+\beta}{X^2+1}+\frac{\gamma X+\delta}{(X^2+1)^2}}_{\text{partie relative à } X^2+1}$$

où la partie entière est nulle. On vérifie que $\lambda=-1$, $\mu=1$, $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$ et $\delta=-2$ conviennent (les calculs permettant de trouver ces valeurs sont détaillés au paragraphe 7.3.2). On a ainsi

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}=\frac{-1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{X}{X^2+1}+\frac{-2}{(X^2+1)^2}.$$

(2) Nous appliquons directement le théorème 7.1. Il est en effet inutile d'appliquer successivement les deux lemmes 7.1 et 7.2 comme nous l'avons fait au § 7.2.2 puisque le théorème 7.1 en est une synthèse.

Copyrighted material

7.3 Techniques de décomposition d'une fraction rationnelle

7.3.1 Cas d'un pôle simple

Soit A/B une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$, irréductible, possédant (au moins) un pôle simple $\alpha \in \mathbb{K}$. Le dénominateur B se factorise alors sous la forme

$$B = (X - \alpha) \times C \quad \text{avec} \quad C(\alpha) \neq 0.$$

La partie relative au pôle α ne contient qu'un seul élément simple ; elle s'écrit sous la forme $\lambda/(X - \alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\lambda \neq 0$. Calculons λ. La méthode que nous exposons maintenant est dite ***méthode de multiplication et de remplacement***. On a

$$\frac{A}{(X - \alpha) \times C} = \frac{\lambda}{X - \alpha} + \frac{T}{C}$$

où T désigne un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Multiplions par $X - \alpha$ cette égalité. On obtient

$$\frac{A}{C} = \lambda + \frac{(X - \alpha) \times T}{C}.$$

En évaluant la fonction rationnelle en α, on obtient $\lambda = \dfrac{A(\alpha)}{C(\alpha)}$.

Remarque Dérivons chacun des termes présents dans l'égalité $B = (X-\alpha)\times C$. On a $B' = C + (X - \alpha)C'$, dont on déduit

$$B'(\alpha) = C(\alpha).$$

La valeur de $B'(\alpha)$ est non nulle car celle de $C(\alpha)$ est elle-même non nulle. On en déduit la formule de ***dérivation*** suivante :

$$\lambda = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}.$$

Cette formule est pratique lorsque le dénominateur B est donné sous une forme non factorisée.

Exemple Soit $X/(X-1)(X-2) \in \mathbb{R}(X)$. Sa décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{X}{(X - 1)(X - 2)} = \frac{\lambda}{X - 1} + \frac{\mu}{X - 2} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

Calculons les coefficients λ et μ. En multipliant par $X - 1$, on obtient

$$\frac{X}{X - 2} = \lambda + \frac{\mu(X - 1)}{X - 2},$$

puis en remplaçant X par 1, on obtient : $\lambda = -1$. De même, en multipliant par $X - 2$, on obtient

$$\frac{X}{X - 1} = \frac{\lambda(X - 2)}{X - 1} + \mu,$$

Copyrighted material

puis en remplaçant X par 2, on obtient : $\mu = 2$. Ainsi,

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{2}{X-2}.$$

On peut utiliser la formule de *dérivation* définie précédemment avec $A = X$ et $B = (X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 3$, ce qui implique $B' = 2X - 3$. Ainsi

$$\lambda = \frac{A(1)}{B'(1)} = -1 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{A(2)}{B'(2)} = 2.$$

Exercice 1 *Décomposer* $\dfrac{X^4}{X^4-1}$ *en éléments simples dans* $\mathbb{C}(X)$, *puis* $\mathbb{R}(X)$.

7.3.2 Cas d'un pôle multiple

Nous nous intéressons ici au cas d'une fraction $F = A_1/B_1 \in \mathbb{K}(X)$, irréductible, possédant (au moins) un pôle $\alpha \in \mathbb{K}$ d'ordre $h \geqslant 2$. Le dénominateur B_1 se factorise sous la forme

$$B_1 = (X-\alpha)^h \times C_1 \quad \text{avec} \quad C_1(\alpha) \neq 0$$

où C_1 est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Dans la décomposition de cette fraction en éléments simples sur $\mathbb{K}$, la partie relative au pôle α s'écrit

$$\frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h}$$

où parmi les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ de $\mathbb{K}$, seul λ_h est nécessairement non nul. Le coefficient λ_1 est appelé ***résidu*** au pôle α.

Calcul du coefficient λ_h

Le calcul du coefficient λ_h présent dans l'élément simple $\lambda_h/(X-\alpha)^h$, peut être mené indépendamment de celui des autres coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{h-1}$. La méthode consiste en une adaptation de la méthode de *multiplication et de remplacement* présentée pour le calcul dans le cas d'un pôle simple (voir § 7.3.1). On a

$$\frac{A}{(X-\alpha)^h \times C} = \frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \ldots + \frac{\lambda_{h-1}}{(X-\alpha)^{h-1}} + \frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h} + \frac{T}{C}$$

où T désigne un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. En multipliant par $(X-\alpha)^h$ cette égalité, on obtient

$$\frac{A}{C} = \lambda_1(X-\alpha)^{h-1} + \ldots + \lambda_{h-1}(X-\alpha) + \lambda_h + \frac{(X-\alpha)^h \times T}{C},$$

et en évaluant la fonction fraction rationnelle en α, on obtient

$$\lambda_h = \frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}.$$

Copyrighted material

Calcul simultané des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$

Il est possible de calculer les h coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ simultanément. La méthode se décompose en 3 étapes.

• Étape 1 : elle consiste en un changement d'indéterminée :

$$Y = X - \alpha.$$

On désigne par A_2 (respectivement par C_2) le polynôme de $\mathbb{K}[Y]$ obtenu à partir du polynôme A_1 (resp. du polynôme C_1) de $\mathbb{K}[X]$ en effectuant le changement d'indéterminée ci-dessus. On a

$$\frac{A_1}{(X-\alpha)^h \times C_1} = \frac{A_2}{Y^h \times C_2}.$$

• Étape 2 : en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre $h-1$ du polynôme A_2 de $\mathbb{K}[Y]$ par le polynôme C_2 de $\mathbb{K}[Y]$ (ce qui est possible car $C_2(0) = C_1(\alpha) \neq 0$), on obtient :

$$A_2 = C_2 \times \left(q_0 + q_1 Y + q_2 Y^2 + \ldots + q_{h-1} Y^{h-1}\right) + Y^h R_2$$

où $q_0, q_1, \ldots, q_{h-1}$ appartiennent à $\mathbb{K}$ et où R_2 est un polynôme de $\mathbb{K}[Y]$.

• Étape 3 : on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{A_2}{Y^h \times C_2} &= \frac{C_2 \times \left(q_0 + q_1 Y + q_2 Y^2 + \ldots + q_{h-1} Y^{h-1}\right) + Y^h R_2}{Y^h \times C_2} \\
&= \frac{q_0 + q_1 Y + q_2 Y^2 + \ldots + q_{h-1} Y^{h-1}}{Y^h} + \frac{R_2}{C_2} \\
&= \frac{q_0}{Y^h} + \frac{q_1}{Y^{h-1}} + \ldots + \frac{q_{h-1}}{Y} + \frac{R_2}{C_2}.
\end{aligned}$$

On effectue alors le changement d'indéterminée inverse. En notant R_1 le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ obtenu à partir du polynôme R_2 de $\mathbb{K}[Y]$ en effectuant le changement d'indéterminée inverse, on trouve :

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_1}{(X-\alpha)^h \times C_1} = \underbrace{\frac{q_0}{(X-\alpha)^h} + \frac{q_1}{(X-\alpha)^{h-1}} + \ldots + \frac{q_{h-1}}{X-\alpha}}_{\text{partie relative au pôle } \alpha} + \frac{R_1}{C_1}.$$

Les éléments $q_0, q_1, \ldots, q_{h-1}$ de $\mathbb{K}$ ainsi déterminés sont les coefficients de la somme partielle relative au pôle $\alpha \in \mathbb{K}$ de la fraction $A_1/B_1 \in \mathbb{K}(X)$:

$$\lambda_h = q_0, \quad \lambda_{h-1} = q_1, \quad \lambda_{h-2} = q_2, \quad \ldots, \quad \lambda_1 = q_{h-1}.$$

ATTENTION L'ordre dans lequel apparaissent les coefficients dans la division selon les puissances croissantes est inversé par rapport à l'ordre usuel des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ dans l'écriture de la partie relative au pôle α. En effet, le premier coefficient que l'on obtient en effectuant la division est le coefficient λ_h et non pas le coefficient λ_1, le deuxième est le coefficient λ_{h-1} et non pas le coefficient λ_2, *etc.*

Copyrighted material

Exemple Appliquons cette méthode pour déterminer la somme partielle relative au pôle $\alpha = 1$ de la fraction

$$F = \frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}.$$

On a $A_1 = 4X$ et $B_1 = (X-1)\times(X^2+1)^2 = (X-1)\times C_1$ avec $C_1 = (X^2+1)^2$. Effectuons le changement d'indéterminée $Y = X - 1$, c'est-à-dire $X = Y + 1$. On a

$$A_2 = 4(Y+1) = 4Y + 1,$$
$$C_2 = ((Y+1)^2+1)^2 = 4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4.$$

Procédons au calcul de la division selon les puissances croissantes à l'ordre 1 de A_2 par C_2. On a

$$\begin{array}{l} A_2 = 4 + 4Y \\ \quad -(4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4) \\ \hline \quad = -4Y - 8Y^2 - 4Y^3 - Y^4 \\ \quad -(-4Y - 8Y^2 - 8Y^3 - 4Y^4 - Y^5) \\ \hline \qquad 4Y^3 + 3Y^4 + Y^5 = R_2 \end{array} \Bigg\| \begin{array}{l} 4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4 = C_2 \\ \hline 1 - Y \end{array}$$

Ainsi, on peut écrire $A_2 = C_2 \times (1-Y) + Y^2(4Y + 3Y^2 + Y^3)$, et

$$\frac{A_2}{Y^2 \times C_2} = \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Y} + \frac{4Y + 3Y^2 + Y^3}{C_2}.$$

Effectuons le changement d'indéterminée inverse, c'est-à-dire posons $Y = X - 1$. On obtient

$$\frac{A_1}{(X-1)^2 \times C_1} = \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{X^3 + X - 2}{(X^2+1)^2}.$$

Remarquons que la partie relative au polynôme $X^2 + 1$ s'obtient alors très facilement à partir de la dernière fraction rationnelle de l'égalité ci-dessus. En effet, puisque $X^3 + X - 2 = X(X^2+1) - 2$, on a

$$\frac{X^3 + X - 2}{(X^2+1)^2} = \frac{X(X^2+1) - 2}{(X^2+1)^2} = \frac{-2}{(X^2+1)^2} + \frac{X}{(X^2+1)^2}.$$

On en déduit alors la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} = \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{-2}{(X^2+1)^2} + \frac{X}{(X^2+1)^2}.$$

7.3.3 Techniques de réduction du nombre des coefficients

Utilisation de la parité

Soit F une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) possédant un pôle $\alpha \in \mathbb{K}$ de multiplicité $h \geqslant 1$. Dans la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{K}$, la partie relative au pôle α s'écrit :

$$\frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h) \in \mathbb{K}^h.$$

Copyrighted material

Si de plus la fonction rationnelle associée à F, que l'on note encore F, est paire ou impaire alors $-\alpha$ est également un pôle de F, de même multiplicité que α, la partie relative à $-\alpha$ s'écrivant :

$$\frac{\lambda'_1}{X+\alpha} + \frac{\lambda'_2}{(X+\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda'_h}{(X+\alpha)^h} \quad \text{avec} \quad (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_h) \in \mathbb{K}^h.$$

Supposons que F soit paire. En remplaçant X par $-X$ dans la partie relative au pôle α, on a

$$\frac{\lambda_1}{-X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(-X-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_h}{(-X-\alpha)^h} = \frac{-\lambda_1}{X+\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X+\alpha)^2} + \ldots + \frac{(-1)^h \lambda_h}{(X+\alpha)^h}.$$

Par unicité de la décomposition, on obtient :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, h\} \quad \lambda'_k = (-1)^k \lambda_k.$$

En procédant de manière analogue, on vérifie que si F est impaire alors

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, h\} \quad \lambda'_k = (-1)^{k-1} \lambda_k.$$

Exemple Considérons la fraction rationnelle $F = (2X^2+5)/(X^2-1)^3$ de $\mathbb{R}(X)$. La factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ du dénominateur s'écrit :

$$(X^2-1)^3 = (X-1)^3 (X+1)^3.$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$\frac{2X^2+5}{(X^2-1)^3} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \frac{\lambda_3}{(X-1)^3} + \frac{\lambda'_1}{X+1} + \frac{\lambda'_2}{(X+1)^2} + \frac{\lambda'_3}{(X+1)^3}.$$

En remplaçant X par $-X$, par unicité de la décomposition, on obtient

$$\lambda'_1 = -\lambda_1, \quad \lambda'_2 = \lambda_2 \quad \text{et} \quad \lambda'_3 = -\lambda_3.$$

Ainsi,

$$\frac{2X^2+5}{(X^2-1)^3} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \frac{\lambda_3}{(X-1)^3} + \frac{-\lambda_1}{X+1} + \frac{\lambda_2}{(X+1)^2} + \frac{-\lambda_3}{(X+1)^3}.$$

Il faut calculer seulement trois coefficients (λ_1, λ_2 et λ_3) au lieu des six coefficients initiaux. En utilisant la méthode exposée au paragraphe 7.3.2, les coefficients se calculent simultanément. On trouve $\lambda_1 = 13/16$, $\lambda_2 = -13/16$ et $\lambda_3 = 7/8$, d'où

$$\frac{2X^2+5}{(X^2-1)^3} = \frac{\frac{13}{16}}{X-1} + \frac{-\frac{13}{16}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{7}{8}}{(X-1)^3} + \frac{-\frac{13}{16}}{X+1} + \frac{-\frac{13}{16}}{(X+1)^2} + \frac{-\frac{7}{8}}{(X+1)^3}.$$

Copyrighted material

Utilisation de la conjugaison

Supposons qu'une fraction rationnelle possède pour pôles les complexes conjugués α et $\overline{\alpha}$ et que cette fraction rationnelle soit à coefficients réels. Dans la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$, la partie relative au pôle $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ s'écrit :

$$\frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_h}{(X-\alpha)^h} \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h) \in \mathbb{C}^h$$

et celle relative au pôle conjugué, $\overline{\alpha}$, s'écrit

$$\frac{\beta_1}{X-\overline{\alpha}} + \frac{\beta_2}{(X-\overline{\alpha})^2} + \ldots + \frac{\beta_h}{(X-\overline{\alpha})^h} \quad \text{avec} \quad (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h) \in \mathbb{C}^h.$$

Puisque F est à coefficients réels, on a $\overline{F} = F$. Ainsi, en conjuguant la partie relative au pôle α et par unicité de la décomposition, on obtient que

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, h\} \quad \beta_k = \overline{\lambda_k}.$$

Exemple Considérons la fraction rationnelle $F = (X^2+1)/(X^2+X+1)^2$ de $\mathbb{C}(X)$. Ses pôles sur $\mathbb{C}$ sont les deux complexes conjugués j et $\bar{\mathrm{j}}$ (leur ordre de multiplicité est 2) car

$$(X^2+X+1)^2 = (X-\mathrm{j})^2(X-\bar{\mathrm{j}})^2,$$

et sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$\frac{X^2+1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{\lambda_1}{X-\mathrm{j}} + \frac{\lambda_2}{(X-\mathrm{j})^2} + \frac{\beta_1}{X-\bar{\mathrm{j}}} + \frac{\beta_2}{(X-\bar{\mathrm{j}})^2}$$

où les quatre scalaires λ_1, λ_2, β_1 et β_2 appartiennent à $\mathbb{C}$. En conjuguant les deux membres de cette égalité, en prenant en compte que la fraction rationnelle est à coefficients réels, et par unicité de la décomposition, on obtient

$$\beta_1 = \overline{\lambda_1} \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = \overline{\lambda_2}.$$

Ainsi,

$$\frac{X^2+1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{\lambda_1}{X-\mathrm{j}} + \frac{\lambda_2}{(X-\mathrm{j})^2} + \frac{\overline{\lambda_1}}{X-\bar{\mathrm{j}}} + \frac{\overline{\lambda_2}}{(X-\bar{\mathrm{j}})^2}.$$

En utilisant la méthode exposée au paragraphe 7.3.2, on trouve $\lambda_2 = \mathrm{j}/3$ et $\lambda_1 = -4\sqrt{3}\mathrm{i}/9$. On obtient finalement

$$\frac{X^2+1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{-4\sqrt{3}\mathrm{i}/9}{X-\mathrm{j}} + \frac{\mathrm{j}/3}{(X-\mathrm{j})^2} + \frac{4\sqrt{3}\mathrm{i}/9}{X-\bar{\mathrm{j}}} + \frac{\bar{\mathrm{j}}/3}{(X-\bar{\mathrm{j}})^2}.$$

Copyrighted material

Exercice 2 *1 - Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *les fractions suivantes :*

$$F_1 = \frac{X}{(X-1)^2(X-2)} \quad et \quad F_2 = \frac{4}{(X^2-1)^2}.$$

2 - En effectuant des divisions euclidiennes successives, retrouver la décomposition sur $\mathbb{R}$ *suivante :*

$$\frac{X^5+2}{(X^2+X+1)^3} = \frac{X-2}{X^2+X+1} + \frac{X+3}{(X^2+X+1)^2} + \frac{-X+1}{(x^2+X+1)^3}.$$

7.4 Exercices de synthèse

Exercice 3 *On considère dans* $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme*

$$P = X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2.$$

1 - Vérifier que 1 *est une racine multiple de* P*, donner sa multiplicité et factoriser* P *sous forme d'un produit de polynômes irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$ *et dans* $\mathbb{C}[X]$*.*

2 - Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ *la fraction*

$$F = \frac{X^2+3}{X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2}.$$

Exercice 4 *1 - Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{R}$*, en utilisant une division euclidienne, la fraction*

$$\frac{X^3 - X^2 + 2X - 3}{(X^2+X+1)^2}.$$

2 - Soit P *le polynôme de* $\mathbb{R}[X]$ *défini par*

$$P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + 8X^2 + 4X + 1.$$

Sans utiliser la factorisation de P *donnée ci-dessous, vérifier que* -1 *est une racine double (dans* $\mathbb{R}$*) de* P *et que* j *et* $\bar{\mathrm{j}}$ *sont deux racines doubles (dans* $\mathbb{C}$*) de* P*. En déduire*

$$P = (X+1)^2(X^2+X+1)^2.$$

3 - Soit $F = \dfrac{X^2-3X-2}{X^6+4X^5+8X^4+10X^3+8X^2+4X+1} \in \mathbb{R}(X)$*. Vérifier que*

$$F = \frac{X^2-3X-2}{(X-\alpha)^2C^2} \quad avec \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad et \quad C \in \mathbb{R}[X]$$

Copyrighted material

En utilisant une division selon les puissances croissantes, calculer $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *et* $R \in \mathbb{R}[X]$ *tels que*

$$F = \frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \frac{R}{C^2}.$$

Terminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ *de* F.

Exercice 5 *1 - Décomposer en éléments simples dans* $\mathbb{R}$ *la fraction rationnelle*

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)}.$$

Soit n *un entier non nul. En déduire*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

2 - Soient n *et* p *deux entiers non nuls. Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

En déduire l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

7.5 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

On note $F = X^4/(X^4-1)$. La partie entière dans la décomposition de F n'est pas nulle. On a

$$\frac{X^4}{X^4-1} = \frac{X^4-1+1}{X^4-1} = 1 + \frac{1}{X^4-1}.$$

La fraction rationnelle $1/(X^4-1)$ admet pour pôle les racines quatrièmes de l'unité. On note α, β, γ et δ les résidus aux quatre pôles 1, i, -1 et $-\mathrm{i}$. Ils s'obtiennent facilement en utilisant la formule de dérivation. On a

$$(X^4-1)' = 4X^3,$$

d'où

$$\alpha = \left(1/(4X^3)\right)\big|_{X=1} = 1/4, \qquad \beta = \left(1/(4X^3)\right)\big|_{X=\mathrm{i}} = \mathrm{i}/4,$$
$$\gamma = \left(1/(4X^3)\right)\big|_{X=-1} = -1/4, \quad \delta = \left(1/(4X^3)\right)\big|_{X=-\mathrm{i}} = -\mathrm{i}/4.$$

Copyrighted material

On obtient la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$

$$F = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{\mathrm{i}}{X-\mathrm{i}} + \frac{-1}{X+1} + \frac{-\mathrm{i}}{X+\mathrm{i}}\right).$$

En réduisant au même dénominateur les éléments simples relatifs aux deux pôles complexes conjugués i et $-\mathrm{i}$, on en déduit la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{R}$

$$F = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{-1}{X+1} + \frac{-2}{X^2+1}\right).$$

Solution de l'exercice 2

1 - La décomposition en éléments simples de F_1 sur $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme

$$\frac{X}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{\lambda}{X-2}.$$

Le coefficient λ s'obtient en multipliant par $X-2$ puis en remplaçant X par 2. On obtient $\lambda = 2$. Le coefficient a s'obtient en multipliant par $(X-1)^2$ puis en remplaçant X par 1. On obtient $a = -1$. Enfin, le coefficient b s'obtient en multipliant par X et en faisant tendre X vers l'infini :

$$\overbrace{\lim_{X\to+\infty} \frac{X^2}{(X-1)^2(X-2)}}^{=0} = \overbrace{\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{-X}{(X-1)^2} + \frac{bX}{X-1} + \frac{2X}{X-2}\right)}^{=b+2},$$

d'où $b = -2$. Ainsi

$$\frac{X}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{-1}{(X-1)^2} + \frac{-2}{X-1} + \frac{2}{X-2}.$$

En utilisant la parité de $F_2 = 4/(X^2-1)^2$, sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme

$$\frac{4}{(X^2-1)^2} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{-b}{X+1}.$$

Le coefficient a s'obtient en multipliant par $(X-1)^2$ puis en remplaçant X par 1. On trouve $a = 1$. On otient

$$\frac{4}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{-b}{X+1}.$$

Le coefficient b s'obtient en remplaçant X par 0. On trouve $b = -1$. Ainsi,

$$\frac{4}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+1}.$$

Copyrighted material

2 - En effectuant la division euclidienne de X^5+2 par X^2+X+1, on obtient

$$X^5+2=(X^3-X^2+1)(X^2+X+1)+(-X+1).$$

De même, en effectuant la division euclidienne de X^3-X^2+1 par X^2+X+1, on obtient

$$X^3-X^2+1=(X-2)(X^2+X+1)+(X+3).$$

Ainsi, dans $\mathbb{R}(X)$, on a :

$$\frac{X^5+2}{(X^2+X+1)^3}=\frac{X-2}{X^2+X+1}+\frac{X+3}{(X^2+X+1)^2}+\frac{-X+1}{(X^2+X+1)^3}.$$

Solution de l'exercice 3

1 - On vérifie que $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$ et $P^{(3)}(1)\neq 0$. Ainsi 1 est une racine de P de multiplicité 3. Pour factoriser P sous forme d'un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on peut utiliser les deux méthodes suivantes.

Première méthode : on effectue la division euclidienne de P par $(X-1)^3$, le reste devant être nul (d'après la question précédente). On obtient

$$P=(X-1)^3(X^2+2),$$

et il n'est alors pas utile de poursuivre car X^2+2 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Deuxième méthode : on cherche à faire apparaître le polynôme $(X-1)^3$, soit l'expression X^3-3X^2+3X-1, dans celle de P. On a

$$\begin{aligned}
&X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2\\
&=X^5-3X^4+3X^3+2X^3-X^2-6X^2+6X-2\\
&=X^2(X^3-3X^2+3X-1)+2(X^3-3X^2+3X-1)\\
&=(X^2+2)(X^3-3X^2+3X-1)=(X^2+2)(X-1)^3.
\end{aligned}$$

La factorisation irréductible de P sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$P=(X-1)^3(X^2+2).$$

La factorisation irréductible de P sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$P=(X-1)^3(X-\mathrm{i}\sqrt{2})(X+\mathrm{i}\sqrt{2}).$$

2 - Pour décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction F, on calcule d'abord la somme partielle relative au pôle 1 (c'est un pôle triple). On pose $X-1=Y$, d'où

$$\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{Y^2+2Y+4}{Y^3(Y^2+2Y+3)}.$$

Copyrighted material

Effectuons la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $4+2Y+Y^2$ par $3+2Y+Y^2$. On obtient

$$4+2Y+Y^2=(3+2Y+Y^2)\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{9}Y+\frac{1}{27}Y^2\right)+\frac{1}{27}Y^3(4-Y).$$

Ainsi,

$$\frac{Y^2+2Y+4}{Y^3(Y^2+2Y+3)}=\frac{\frac{4}{3}}{Y^3}-\frac{\frac{2}{9}}{Y^2}+\frac{\frac{1}{27}}{Y}+\frac{\frac{1}{27}(4-Y)}{3+2Y+Y^2}.$$

On en déduit alors

$$\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{\frac{4}{3}}{(X-1)^3}-\frac{\frac{2}{9}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{27}}{X-1}+\frac{\frac{1}{27}(-X+5)}{X^2+2}.$$

Solution de l'exercice 4

1 - La division euclidienne de X^3-X^2+2X-3 par X^2+X+1 permet d'écrire

$$X^3-X^2+2X-3=(X^2+X+1)(X-2)+(3X-1).$$

On en déduit

$$\frac{X^3-X^2+2X-3}{(X^2+X+1)^2}=\frac{X-2}{X^2+X+1}+\frac{3X-1}{(X^2+X+1)^2}.$$

2 - On a $P'=6X^5+20X^4+32X^3+30X^2+16X+4$ et on vérifie que $\widetilde{P}(-1)=\widetilde{P'}(-1)=0$ et $\widetilde{P''}(-1)\neq 0$. De même, on vérifie que $\widetilde{P}(\mathrm{j})=\widetilde{P'}(\mathrm{j})=0$ et $\widetilde{P''}(\mathrm{j})\neq 0$. Il est inutile de faire de même pour $\bar{\mathrm{j}}$ puisque le polynôme P est à coefficients réels. On remarque que

$$(X-\mathrm{j})^2(X-\bar{\mathrm{j}})^2=(X^2+X+1)^2.$$

Bilan, le polynôme P est factorisable par $(X+1)^2$ (polynôme de degré 2) et par $(X^2+X+1)^2$ (polynôme de degré 4). Puisque P est de degré 6 et puisque $(X+1)^2$ et $(X^2+X+1)^2$ sont premiers entre eux, on obtient

$$P=\alpha(X+1)^2(X^2+X+1)^2 \quad \text{avec} \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Puisque P est unitaire, $\alpha=1$. Ce résultat se vérifie en développant le terme de droite.

3 - D'après ce qui précède, on a $F=(X^2-3X-2)/(X-\alpha)^2C^2$ avec $\alpha=-1$ et $C=X^2+X+1$. On note $F=A/B$. On effectue le changement d'indéterminée suivant :

$$Y=X+1.$$

Le polynôme $A=X^2-3X-2$ devient $2-5Y+Y^2$ et le polynôme $C=(X^2+X+1)^2$ devient $1-2Y+3Y^2-2Y^3+Y^4$. En effectuant une division selon les puissances croissances à l'ordre 1, on obtient

$$2-5Y+Y^2=(1-2Y+3Y^2-2Y^3+Y^4)(2-Y)-7Y^2+7Y^3-4Y^4+Y^5.$$

Copyrighted material

On en déduit

$$\frac{2-5Y+Y^2}{Y^2(1-2Y+3Y^2-2Y^3+Y^4)} = \frac{-1}{Y} + \frac{2}{Y^2} + \frac{-7+7Y-4Y^2+Y^3}{1-2Y+3Y^2-2Y^3+Y^4}.$$

En revenant à l'indéterminée X, on a

$$\frac{X^2-3X-2}{(X+1)^2(X^2+X+1)^2} = \frac{-1}{X+1} + \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{X^3-X^2+2X-3}{(X^2+X+1)^2}.$$

En regroupant ce dernier résultat et celui de la première question, on en déduit

$$\frac{X^2-3X-2}{(X+1)^2(X^2+X+1)^2} = \frac{-1}{X+1} + \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{X-2}{X^2+X+1} + \frac{3X-1}{(X^2+X+1)^2}.$$

Solution de l'exercice 5

1 - La décomposition en éléments simples de $1/X(X+1)(X+2)$ s'écrit

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}.$$

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. On en déduit l'égalité

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}}_{(\star)} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}}_{(\star\star)}.$$

En effectuant le changement d'indice

1. $k' = k+1$ dans la somme $(\star)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k'=2}^{n+1}\frac{1}{k'}$,

2. $k'' = k+2$ dans la somme $(\star\star)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = \sum_{k''=3}^{n+2}\frac{1}{k''}$,

et compte tenu que les indices sont muets (on remplace k' et k'' par k), on obtient

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).
\end{aligned}$$

Copyrighted material

Finalement,

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

2 - De $\dfrac{1}{(X-1)X} = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X-1}$ (c'est immédiat), on déduit

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} &= \sum_{k=1}^{p} \left(-\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k-1} \right) \\ &= -\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k-1}.\end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $k' = k-1$ dans la dernière somme, puis en remplaçant l'indice muet k' par k, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} &= -\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{n+k} \\ &= -\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+p} \right) + \left(\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{n+k} \right) \\ &= -\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n} \underbrace{-\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{n+k}}_{=0} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.\end{aligned}$$

Pour tous entiers n, p non nuls, on a $n+k-1 < n+k$. D'où

$$(n+k-1)(n+k) < (n+k)^2,$$

et ainsi $\dfrac{1}{(n+k)^2} < \dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$. Finalement,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

Copyrighted material

Quatrième partie

Algèbre linéaire

Copyrighted material

Copyrighted material

CHAPITRE 8

Les espaces vectoriels

En accord avec la notation utilisée dans les chapitres précédents, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, muni de l'addition $+_{\mathbb{K}}$ et de la multiplication $\times_{\mathbb{K}}$. Ce corps peut être $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note 0 et 1 les éléments neutres pour l'addition et pour la multiplication. Il nous arrivera parfois de les noter $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$ pour marquer leur appartenance au corps $\mathbb{K}$.

8.1 Structure d'espace vectoriel

8.1.1 Définition d'un espace vectoriel

On considère un ensemble E muni d'une ***loi de composition interne*** $+$:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E \times E \longmapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in E,$$

et muni d'une ***loi de composition externe*** $\cdot$ (sur le corps $\mathbb{K}$) :

$$(\alpha, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{K} \times E \longmapsto \alpha \cdot \boldsymbol{x} \in E.$$

Définition 8.1 *On dit que E est un* ***espace vectoriel sur $\mathbb{K}$*** *si :*

1. *$(E, +)$ est un groupe commutatif,*
2. *la loi externe $\cdot$ possède les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{lll}
\forall \alpha \in \mathbb{K} & \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E^2 & \alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}, \\
\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 & \forall \boldsymbol{x} \in E & (\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}, \\
\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 & \forall \boldsymbol{x} \in E & \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x}) = (\alpha \times_{\mathbb{K}} \beta) \cdot \boldsymbol{x}, \\
 & \forall \boldsymbol{x} \in E & 1_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.
\end{array}$$

Les éléments de E sont appelés ***vecteurs*** *et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés* ***scalaires****.*

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est aussi appelé $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou encore $\mathbb{K}$-espace.[1]

[1] Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur le corps $\mathbb{K}$, on utilise l'expression d'espace vectoriel au lieu de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Copyrighted material

C'est au mathématicien et logicien italien Giuseppe Peano que nous devons la première définition axiomatique d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

PEANO, Giuseppe (1858, Cuneo - 1932, Turin).

Professeur de mathématiques à l'Université de Turin, il enseigna aussi à l'Académie Militaire. C'est en relisant les travaux abscons de Grassmann qu'il dégagea la notion d'espace vectoriel abstrait (sur $\mathbb{R}$) et en donna le premier, en 1888, une définition axiomatique (et claire !). Nous lui devons aussi le définition formelle d'une application linéaire. Profondément intéressé par la linguistique, il voulut imposer, sans succès, une langue artificielle appelée *Latino sine flexione*, qui se voulait universelle et qui était basée sur le Latin et dont les mots étaient empruntés à l'Anglais, l'Allemand, le Français et le Latin. Il alla même jusqu'à rédiger la dernière édition de son œuvre *Formulario Mathematico* dans cette langue.

Remarques

1. Afin de faciliter la distinction entre les scalaires et les vecteurs, nous avons convenu de noter en gras les vecteurs. Par exemple, les éléments $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ désignent des vecteurs et α, β, γ, a, b, c des scalaires.[2]

2. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul.[3] C'est un vecteur de E, c'est-à-dire $\mathbf{0}_E \in E$. Il ne faut pas le confondre avec le zéro du corps $\mathbb{K}$.

3. On vérifie que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même, tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

8.1.2 Principaux exemples d'espaces vectoriels

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets

Soit n un entier non nul. On munit l'ensemble $\mathbb{K}^n$ défini par

$$\mathbb{K}^n \overset{déf.}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{K}, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}$$

des deux lois $+$ et $\cdot$ définies pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ et pour tout $(y_1, \ldots, y_n)$ appartenant à $\mathbb{K}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ par :

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &\overset{déf.}{=} (x_1 +_{\mathbb{K}} y_1, \ldots, x_n +_{\mathbb{K}} y_n), \quad \textit{(loi interne)} \\ \alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) &\overset{déf.}{=} (\alpha \times_{\mathbb{K}} x_1, \ldots, \alpha_n \times_{\mathbb{K}} x_n). \quad \textit{(loi externe)} \end{aligned}$$

---

[2] Un vecteur se note parfois avec une flèche au dessus, par exemple $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

[3] Remarquons qu'un espace vectoriel n'est jamais vide puisqu'il y a une structure de groupe et qu'un groupe n'est jamais vide. Un espace vectoriel contient au moins l'élément neutre $\mathbf{0}_E$ pour l'addition.

Copyrighted material

Muni de ces deux lois, l'ensemble produit $\mathbb{K}^n$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Il est qualifié d'***espace produit***. Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est un n-uplet et on le note $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. L'élément neutre pour l'addition est le vecteur $\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n} = (0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}) \in \mathbb{K}^n$, que l'on note plus simplement $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. Le corps $\mathbb{K}$ est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La loi interne est l'addition définie sur $\mathbb{K}$ et la loi externe est la multiplication définie sur $\mathbb{K}$. On ne peut pas, dans ce cas, faire la distinction entre les vecteurs (de l'espace $\mathbb{K}$) et les scalaires (du corps $\mathbb{K}$).

L'ensemble produit $E_1 \times \ldots \times E_n$

Considérons les espaces $E_1, \ldots, E_n$ sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $+_{E_i}$ et $\cdot_{E_i}$ les deux lois relatives à l'espace E_i. On peut alors enrichir l'ensemble produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ défini par

$$E_1 \times \ldots \times E_n \overset{déf.}{=} \{(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_1 \in E_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in E_n\}$$

d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Il suffit de munir $E_1 \times \ldots \times E_n$ des deux lois $+$ et $\cdot$ définies pour tout $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ et pour tout $(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$ appartenant à $E_1 \times \ldots \times E_n$ et pour tout α appartenant à $\mathbb{K}$ par :

$$(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) + (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \overset{déf.}{=} (\boldsymbol{x}_1 +_{E_1} \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n +_{E_n} \boldsymbol{y}_n), \textit{ (loi interne)}$$

$$\alpha \cdot (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \overset{déf.}{=} (\alpha \cdot_{E_1} \boldsymbol{x}_1, \ldots, \alpha \cdot_{E_n} \boldsymbol{x}_n). \textit{ (loi externe)}$$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel ainsi défini est alors qualifié d'***espace produit*** des $\mathbb{K}$-espaces $E_1, \ldots, E_n$. En notant $\mathbf{0}_{E_i}$ l'élément neutre de E_i pour l'addition $+_{E_i}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'élément $\mathbf{0}_{E_1 \times \ldots \times E_n}$ de $E_1 \times \ldots \times E_n$ défini par

$$\mathbf{0}_{E_1 \times \ldots \times E_n} \overset{déf.}{=} (\mathbf{0}_{E_1}, \ldots, \mathbf{0}_{E_n})$$

est l'élément neutre de $E_1 \times \ldots \times E_n$ pour l'addition $+$.

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{K}$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La loi de composition interne sur $\mathbb{K}[X]$ est l'addition de polynômes et la loi de compostion externe est la multiplication d'un polynôme par un élément de $\mathbb{K}$. Les vecteurs de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes et les scalaires sont les éléments de $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est le polynôme

$$0_{\mathbb{K}[X]} \overset{déf.}{=} (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}, \ldots) \in \mathbb{K}[X].$$

L'ensemble des applications de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$

Soit $\mathcal{I}$ un ensemble non vide. Considérons l'ensemble des applications de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$, que l'on note $\mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$, muni des deux lois $+$ et $\cdot$.

Copyrighted material

- La première loi $+$ est une loi de composition interne. À partir des applications $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$, on définit une nouvelle application $f+g : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ de la manière suivante

$$\forall x \in \mathcal{I} \quad (f+g)(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(x) +_{\mathbb{K}} g(x).$$

- La deuxième loi $\cdot$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{K}$. À partir d'une application $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ et d'un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit la nouvelle application $\alpha \cdot f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ comme suit

$$\forall x \in \mathcal{I} \quad (\alpha \cdot f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \alpha \times_{\mathbb{K}} f(x).$$

L'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (s'en convaincre). Les vecteurs de $\mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ sont ici les applications de $\mathcal{I}$ vers $\mathbb{K}$ et les scalaires sont les éléments du corps $\mathbb{K}$. Il ne faut pas confondre une application $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ (c'est un vecteur de $\mathcal{A}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$) avec sa valeur $f(x)$ en un élément x de $\mathcal{I}$, qui est un scalaire. Le vecteur nul est l'application qui à tout $x \in \mathcal{I}$ associe $0_{\mathbb{K}}$. On l'appelle l'application nulle.

Plus généralement, considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni des lois $+_E$ (loi interne) et $\cdot_E$ (loi externe). L'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{I}, E)$ des applications de $\mathcal{I}$ vers E muni des deux opérations $+$ et $\cdot$ définies pour tous $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{I}, E)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ par

$$\forall x \in \mathcal{I} \quad \Big((f+g)(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(x) +_E g(x) \ \text{ et } \ (\alpha \cdot f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \alpha \cdot_E f(x) \Big)$$

possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est l'application $x \in \mathcal{I} \longmapsto \mathbf{0}_E \in E$.

L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$

L'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ représente l'ensemble des suites à valeurs réelles (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou à valeurs complexes (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On rappelle que l'addition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{déf.}}{=} (u_n +_{\mathbb{K}} v_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

et la multiplication de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la suite $\alpha \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\alpha \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{déf.}}{=} (\alpha \times_{\mathbb{K}} u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Muni de ces deux lois, l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un vecteur est ici une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Le vecteur nul est la suite de terme général nul.

Copyrighted material

Pourquoi parlons-nous d'espaces vectoriels et de vecteurs ?

Les vecteurs de l'espace réel à trois dimensions de la géométrie classique possèdent une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^3$ cet ensemble. De même, l'ensemble des vecteurs du plan réel de la géométrie classique est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On le note $\mathbb{R}^2$. Ce sont là les origines de la terminologie employée (« espaces vectoriels » et « vecteurs »). Les deux opérations (addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur par un scalaire) sont familières. Elles sont illustrées sur la figure 1.

Fig. 1 Illustration de l'addition de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (dessin de gauche) et de la multiplication d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par un scalaire (dessin de droite).

On rappelle que deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur. Ainsi deux vecteurs sont égaux si on peut passer de l'un à l'autre par une simple translation. Bien que l'ouvrage se veuille d'une portée plus générale, nous utiliserons des illustrations graphiques dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$.

Il ne faut pas confondre les *points* constituant le plan réel (respectivement l'espace réel) de la géométrie classique (on parle d'espaces affines et on les note respectivement $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$) avec les *vecteurs* constituant l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) qui lui est associé. Ce sont deux entités mathématiques distinctes. L'espace affine $\mathcal{E}_2$ (resp. $\mathcal{E}_3$) est un ensemble de points tandis que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) est un ensemble de vecteurs.[4] Il y a en revanche un lien étroit entre ces deux notions puisque le choix d'un repère d'origine O permet d'identifier les points aux vecteurs d'origine O. Par exemple, en rapportant l'espace affine $\mathcal{E}_3$ à un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$, on peut associer à tout point $M \in \mathcal{E}_3$ l'unique vecteur $\overrightarrow{OM} \in \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OJ} + z \cdot \overrightarrow{OK}$$

où les scalaires x, y et z appartenant à $\mathbb{R}$ sont appelés coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$.

[4] Rappelons que dans les espaces affines $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$, deux points A et B définissent un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si les points A, B, D et C sont les quatre sommets consécutifs d'un parallélogramme.

Copyrighted material

8.1.3 Propriétés élémentaires

Proposition 8.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On a :*

✗ $\forall \boldsymbol{x} \in E \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$;

✗ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$;

✗ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \quad (-\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = -(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot (-\boldsymbol{x})$;

✗ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \quad \big(\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E \iff (\alpha = 0_{\mathbb{K}} \ \textit{ou} \ \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E) \big)$.

Démonstration La démonstration est aisée. On s'attachera à bien comprendre le sens des opérations et notations employées.

⊵ Soit $\boldsymbol{x} \in E$. Montrons que $0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\lambda \cdot \boldsymbol{x} = (0_{\mathbb{K}} +_{\mathbb{K}} \lambda) \cdot \boldsymbol{x} = 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{x}$, c'est-à-dire $\lambda \cdot \boldsymbol{x} = 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{x}$. Il suffit alors d'additionner à droite et à gauche dans cette égalité le vecteur $-(\lambda \cdot \boldsymbol{x})$. On obtient

$$\underbrace{\lambda \cdot \boldsymbol{x} + (-(\lambda \cdot \boldsymbol{x}))}_{= \mathbf{0}_E} = 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} + \underbrace{\lambda \cdot \boldsymbol{x} + (-(\lambda \cdot \boldsymbol{x}))}_{= \mathbf{0}_E}, \quad \text{d'où } \mathbf{0}_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x}.$$

⊵ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrons que $\mathbf{0}_E = \alpha \cdot \mathbf{0}_E$. Pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, on a : $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \mathbf{0}_E) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \mathbf{0}_E$, c'est-à-dire

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \mathbf{0}_E.$$

En additionnant $-(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$ à droite et à gauche dans cette dernière égalité, on obtient $\mathbf{0}_E = \alpha \cdot \mathbf{0}_E$.

⊵ Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\boldsymbol{x} \in E$. Commençons par montrer l'égalité $(-\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = -(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$. D'après la première propriété on a

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} + (-\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = (\alpha +_{\mathbb{K}} (-\alpha)) \cdot \boldsymbol{x} = 0_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E,$$

c'est-à-dire $\alpha \cdot \boldsymbol{x} + (-\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$. Puisque le vecteur $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ admet pour symétrique le vecteur $-(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$, on a aussi

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} + (-(\alpha \cdot \boldsymbol{x})) = \mathbf{0}_E.$$

On en déduit alors, par unicité du symétrique, que : $(-\alpha) \cdot \boldsymbol{x} = -(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$. Montrons maintenant l'égalité $\alpha \cdot (-\boldsymbol{x}) = -(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$. D'après la seconde propriété,

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot (-\boldsymbol{x}) = \alpha \cdot (\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})) = \alpha \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E,$$

c'est-à-dire

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E.$$

Par unicité du symétrique, on en déduit que $\alpha \cdot (-\boldsymbol{x}) = -(\alpha \cdot \boldsymbol{x})$.

Copyrighted material

$\trianglerighteq$ La réciproque découle directement des deux premières propriétés. Montrons l'implication. Supposons que l'on ait l'égalité $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$ et considérons dans un premier temps le cas où $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$. Multiplions chacun des membres de cette égalité par α^{-1} (qui existe car $\mathbb{K}$ est un corps). On a d'une part

$$\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = (\alpha^{-1} \times_{\mathbb{K}} \alpha) \cdot \boldsymbol{x} = 1_{\mathbb{K}} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x},$$

et d'autre part $\alpha^{-1} \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$. Ainsi, de la multiplication de l'égalité $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$ par α^{-1} on déduit que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$. Supposons maintenant que $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_E$. On a nécessairement $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ car sinon on pourrait (comme ci-dessus) multiplier l'égalité $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$ par α^{-1}, ce qui impliquerait que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$, et serait contraire à notre hypothèse. □

Afin d'alléger les écritures, nous convenons de l'abus suivant : pour tout scalaire α de $\mathbb{K}$ et pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E, on note $\alpha\boldsymbol{x}$ le vecteur $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ de E.

8.1.4 Combinaison linéaire

Commençons par définir la notion de famille de vecteurs d'un espace vectoriel.

Définition 8.2 *Soient I un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

✗ *On appelle* ***famille de vecteurs indexée par*** *I toute application*

$$i \in I \longmapsto \boldsymbol{v}_i \in E.$$

On la note $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$. L'ensemble de départ I est appelé ***ensemble des indices*** *de la famille.*

✗ *Lorsque I est un ensemble fini (respectivement infini) on dit que $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ est une famille finie (resp. infinie).*

✗ *Soit J un sous-ensemble de I. La famille $(\boldsymbol{v}_j)_{j \in J}$ est appelée une* ***sous-famille*** *de $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$. Réciproquement, la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ est appelée une* ***sur-famille*** *de $(\boldsymbol{v}_j)_{j \in J}$.*

Remarquons que l'ensemble des indices d'une famille est un ensemble quelconque. Il peut être fini (par exemple, $I = \{1, \ldots, n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$). Il peut aussi être infini (par exemple $I = \mathbb{N}$ ou encore $I = \mathbb{R}$). En particulier, lorsque $I = \{1, \ldots, n\}$ on note parfois la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ sous la forme $(\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et on la confond avec le n-uplet $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de l'espace produit E^n (voir la définition p. 299). La notion de famille généralise ainsi les notions de n-uplet (cas où $I = \{1, \ldots, n\}$) et de suites (cas où $I = \mathbb{N}$).

Il ne faut pas confondre une famille de vecteurs de E et un ensemble de vecteurs de E. Insistons sur les différences fondamentales entre « famille » et « ensemble ». Pour une famille, l'ordre des éléments est pris en compte alors qu'il n'a aucune importance pour un ensemble. Par exemple, pour $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E,

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \neq (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1) \quad \text{et} \quad \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} = \{\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1\}.$$

Copyrighted material

De plus, dans une famille, deux éléments peuvent être égaux. Dans un ensemble, tous les éléments sont distincts. Par exemple

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) \neq (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) \neq (\boldsymbol{v}_1) \quad \text{et} \quad \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\} = \{\boldsymbol{v}_1\}.$$

Combinaison linéaire d'une famille finie

Définition 8.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ des vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $\boldsymbol{x} \in E$ est* **combinaison linéaire** *de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ si*

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \quad \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{v}_p.$$

Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de $\mathbb{K}$ se nomment **coefficients** *de la combinaison linéaire.*

Exemples

1. Tout vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{K}^3$ est combinaison linéaire de la famille finie $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ où $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$, car

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) \;=\; x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Les coefficients de la combinaison linéaire sont x_1, x_2 et x_3.

2. Tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ et de degré inférieur ou égal à n est combinaison linéaire de la famille finie $\mathcal{F} = (X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$. En effet

$$P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$$

se décompose sous la forme (voir p. 223)

$$P = a_0 1_{\mathbb{K}[X]} + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n.$$

Les coefficients de la combinaison linéaire sont $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Combinaison linéaire d'une famille infinie

La définition d'une combinaison linéaire n'a été donnée que dans le cas particulier d'une famille finie de vecteurs de E. Néanmoins, elle se généralise au cas d'une famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E, indexée par un ensemble infini I.

Copyrighted material

Définition 8.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ une famille* **infinie** *de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E est* **combinaison linéaire** *de $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ s'il existe un ensemble fini J inclus dans I (autrement dit, vérifiant $J \subset I$ et $\text{card}(J) < +\infty$) tel que*

$$\exists (\alpha_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^J \quad \boldsymbol{x} = \sum_{i\in J} \alpha_i \boldsymbol{v}_i.$$

Les scalaires α_i, $i \in J$, se nomment **coefficients** *de la combinaison linéaire.*[(5)]

Exemple Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire de la famille $\left(X^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$. Cette famille est infinie (ici $I = \mathbb{N}$). En effet, pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{K}[X]$, il existe $J \subset \mathbb{N}$ tel que $\text{card}(J) < +\infty$ et il existe $(\alpha_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^J$ pour lesquels on a

$$P = \sum_{i\in J} \alpha_i X^i$$

où J désigne l'ensemble des entiers j pour lesquel le coefficient de rang j du polynôme P est non nul. Le sous-ensemble fini J et les coefficients α_i, $i \in J$, dépendent du polynôme P. Pour s'en convaincre, prenons les deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$: $P = -X + 12X^{17}$ et $Q = \sqrt{3} + X^3$. Pour P, on peut prendre $J = \{1, 17\}$ et $\alpha_1 = -1$, $\alpha_{17} = 12$ puisque

$$P = \sum_{i\in\{1,17\}} \alpha_i X^i = \alpha_1 X + \alpha_{17} X^{17} = -X + 12X^{17}.$$

Pour Q, on peut prendre $J' = \{0, 3\}$ et $\alpha'_0 = \sqrt{3}$, $\alpha'_3 = 1$ puisque

$$Q = \sum_{i\in\{0,3\}} \alpha'_i X^i = \alpha'_0 + \alpha'_3 X^3 = \sqrt{3} + X^3.$$

Remarques

1. Qu'une famille soit finie ou infinie, une combinaison linéaire de cette famille est, par définition, toujours une somme finie de vecteurs.

2. Tout vecteur extrait d'une famille est lui-même combinaison linéaire de cette famille. Par exemple, étant donnée la famille finie $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, pour tout $\ell \in \{1, \ldots, p\}$, le vecteur $\boldsymbol{v}_\ell$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ puisque l'on a

$$\boldsymbol{v}_\ell = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_\ell = 1 \\ \forall i \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{\ell\} \quad \alpha_i = 0 \end{cases}.$$

3. Remarquons que le vecteur $\mathbf{0}_E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ avec I un ensemble fini ou infini. Il suffit de prendre tous les coefficients de la combinaison linéaire égaux à $0_{\mathbb{K}}$.

(5) Les coefficients d'une combinaison linéaire sont en nombre fini car $\text{card}(J) < +\infty$.

Copyrighted material

8.2 Structure de sous-espace vectoriel

8.2.1 Définition d'un sous-espace vectoriel

En pratique, les espaces vectoriels donnés en exemple au paragraphe 8.1.2 sont peu utilisés car trop généraux. Par exemple, l'espace $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré quelconque ou encore l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont des espaces bien trop vastes. Dans la pratique, on est amené à effectuer les calculs en ne manipulant que certains vecteurs de l'espace vectoriel considéré (bien que les calculs soient autorisés pour tous les éléments de l'espace).

C'est le cas lorsqu'on décide de ne travailler qu'avec les polynômes de degré au plus égal à n, c'est-à-dire avec l'ensemble

$$\mathbb{K}_n[X] \overset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X],\ \deg(P) \leqslant n\} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarquons que l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ ainsi défini contient le polynôme nul puisqu'il a été convenu que $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$. On constate que si P et Q sont deux éléments du sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ alors $P+Q$ est un élément de ce même sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors αP est encore un élément de $\mathbb{K}_n[X]$. De manière plus générale, on constate que toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ est encore un élément de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, bien que les calculs (loi interne et loi externe) soient définis initialement sur l'espace $\mathbb{K}[X]$ englobant le sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$, le résultat d'un calcul portant sur n'importe quel vecteur du sous-ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ reste dans $\mathbb{K}_n[X]$. En ce sens, on dit que $\mathbb{K}_n[X]$ est un ***sous-espace vectoriel*** du $\mathbb{K}$-espace $\mathbb{K}[X]$.

C'est encore le cas lorsque l'on s'intéresse à l'ensemble des suites à valeurs complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ satisfaisant à la relation de récurrence (on parle de suites de Fibonacci) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0 \quad \text{avec} \quad (p,q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*.$$

Remarquons que l'ensemble des suites de Fibonacci n'est pas vide puisqu'il contient la suite nulle. Si les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont à la relation de double récurrence, il en est de même pour toute suite de la forme $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec α et β dans $\mathbb{C}$ puisque

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad & (\alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2}) + p(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + q(\alpha u_n + \beta v_n) \\ & = \alpha(u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n) + \beta(v_{n+2} + pv_{n+1} + qv_n) = 0.\end{aligned}$$

Pour ces mêmes raisons, on dit que les suites de Fibonacci forment un ***sous-espace vectoriel*** du $\mathbb{C}$-espace $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

La notion de sous-espace vectoriel se généralise au cas d'un espace vectoriel quelconque.

Définition 8.5 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un* ***sous-espace vectoriel***[6] ***de*** *E si F est non vide et si*

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall \boldsymbol{x} \in F \quad \forall \boldsymbol{y} \in F \quad \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in F.$$

Copyrighted material

On vérifie facilement les points suivants.

1. Si un ensemble est un sous-espace vectoriel de E alors il contient nécessairement le vecteur $\mathbf{0}_E$.
2. Les deux ensembles $\{\mathbf{0}_E\}$ et E constituent deux sous-espaces vectoriels de E, appelés sous-espaces triviaux.
3. Si G est un sous-espace de F et F un sous-espace de E alors G est aussi un sous-espace de E.
4. Si F est un sous-espace de E alors le complémentaire de F dans E n'est pas un sous-espace de E. Il suffit de remarquer que

$$\mathbf{0}_E \notin \complement_E(F).$$

Héritage de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Dire que F est un sous-espace vectoriel de E signifie que F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La loi interne sur F est la restriction à $F \times F$ de la loi interne $+$ et la loi externe est la restriction à $\mathbb{K} \times F$ de la loi externe $\cdot$. On dit alors que F hérite de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E.[7]

Exemples

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace différent de $\{\mathbf{0}_E\}$ et $\boldsymbol{u}$ un vecteur de E. L'ensemble $\mathbb{K}\boldsymbol{u}$ défini par

$$\mathbb{K}\boldsymbol{u} \overset{\text{déf.}}{=} \{\boldsymbol{x} \in E \mid \exists \alpha \in \mathbb{K}\ \ \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{u}\} = \{\alpha \boldsymbol{u} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

- Si $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$ alors le sous-espace $\mathbb{K}\boldsymbol{u}$ est le sous-espace trivial $\{\mathbf{0}_E\}$.
- Si $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}_E$ alors le sous-espace $\mathbb{K}\boldsymbol{u}$ est appelé ***droite vectorielle engendrée par le vecteur $\boldsymbol{u}$***.

2. Soit $E = \mathbb{R}$ et $F =]0, 1[$. Il est facile de vérifier que F n'est pas un sous-espace de E. Par exemple pour les éléments $x = 1/2 \in F$ et $y = 3/4 \in F$, on a :

$$1/2 + 3/4 = 5/4 \notin F.$$

Plus généralement, on peut vérifier que les seuls sous-espaces du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$.

3. Les trois parties F_1, F_2, F_3 définies ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels[8] de l'espace $\mathbb{K}^3$:

$$F_1 = \{0\} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_2 \in \mathbb{K}, x_3 \in \mathbb{K}\},$$
$$F_2 = \mathbb{K} \times \{0\} \times \mathbb{K} = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 \in \mathbb{K}, x_3 \in \mathbb{K}\},$$
$$F_3 = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \{0\} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 \in \mathbb{K}, x_2 \in \mathbb{K}\}.$$

Copyrighted material

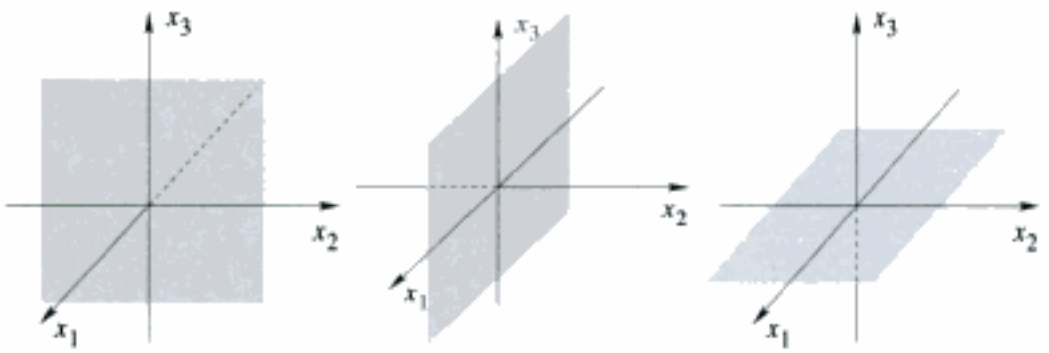


Fig. 2 Représentation de trois sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ - $F_1 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (à gauche), $F_2 = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ (au centre), $F_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ (à droite).

Exercice 1 *1 - Montrer que le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2 - Montrer que le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$G = \left\{(x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

8.2.2 Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels

On appelle famille de sous-ensembles de E toute application

$$i \in I \longmapsto F_i \in \mathcal{P}(E).$$

Elle se note $(F_i)_{i \in I}$.

Proposition 8.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

(6) Au lieu de sous-espace vectoriel, on dit parfois plus simplement sous-espace.

(7) Ainsi pour montrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est souvent plus rapide de vérifier que l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace l'englobant.

(8) Ces trois sous-espaces sont appelés ***plans vectoriels triviaux*** de $\mathbb{K}^3$.

Copyrighted material

Démonstration Puisque $\mathbf{0}_E$ appartient à chacun des sous-espaces vectoriels F_i, $i \in I$, il appartient aussi à leur intersection, ce qui prouve que l'ensemble $\bigcap_{i\in I} F_i$ est non vide. Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont deux vecteurs de $\bigcap_{i\in I} F_i$ alors pour tout $i \in I$, $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ appartiennent à F_i et, pour tous α, $\beta \in \mathbb{K}$, le vecteur $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ appartient aussi à F_i (puisque F_i est un sous-espace de E). Le vecteur $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ appartient donc à $\bigcap_{i\in I} F_i$. □

Remarquons que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même $\mathbb{K}$-espace E ne sont jamais disjoints car $\mathbf{0}_E \in F \cap G$.

Exemples

1. Soient $F_1 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $F_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$. Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Supposons que $\boldsymbol{x} \in F_1 \cap F_3$. De $\boldsymbol{x} \in F_1$ il vient $x_1 = 0$ et de $\boldsymbol{x} \in F_3$ il vient $x_3 = 0$, d'où $\boldsymbol{x} = (0, x_2, 0)$. Ainsi

$$F_1 \cap F_3 = \{(0, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$$

ou encore, puisque $(0, x_2, 0) = x_2(0, 1, 0)$,

$$F_1 \cap F_3 = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_2 \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0).$$

2. Soient F et G les sous-ensembles du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, constitués des applications respectivement paires et impaires :

$$F = \big\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)\big\},$$
$$G = \big\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)\big\}.$$

On vérifie facilement que F et G sont deux sous-espaces de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $f \in F \cap G$. D'une part, puisque $f \in F$, $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'autre part, puisque $f \in G$, $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + f(x) = f(-x) - f(-x),$$

d'où $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est l'application nulle. On a donc

$$F \cap G = \big\{x \in \mathbb{R} \longmapsto 0 \in \mathbb{R}\big\}.$$

ATTENTION Contrairement à l'intersection, l'union d'une famille (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriels de E n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E. Par exemple, considérons les deux sous-espaces F_1 et F_2 de l'espace produit $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$F_1 = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}\},$$
$$F_2 = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ puisque $(1, 0) \in F_1$ et $(0, 1) \in F_2$ et $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$.

Copyrighted material

8.2.3 Sous-espace engendré par une famille finie

Définissons à présent la notion de sous-espace engendré par une famille de vecteurs. Limitons-nous dans un premier temps au cas d'une famille finie $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de vecteurs d'un espace E. Remarquons que si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, deux vecteurs de E, sont combinaisons linéaires de $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ alors tout vecteur de la forme $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ avec α et β appartenant à $\mathbb{K}$, est aussi combinaison linéaire de $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$. En effet, si $\boldsymbol{x}$ est combinaison linéaire de $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$

$$\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{K}^m \quad \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{v}_m,$$

et si $\boldsymbol{y}$ est combinaison linéaire de $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$

$$\exists(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in\mathbb{K}^m \quad \boldsymbol{y}=\beta_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\beta_m\boldsymbol{v}_m.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y} &= \alpha(\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{v}_m)+\beta(\beta_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\beta_m\boldsymbol{v}_m)\\ &= (\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)\boldsymbol{v}_1+\ldots+(\alpha\alpha_m+\beta\beta_m)\boldsymbol{v}_m\end{aligned}$$

avec $\alpha\alpha_i+\beta\beta_i\in\mathbb{K}$, $1\leqslant i\leqslant m$. Le vecteur $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ s'écrit bien comme une combinaison linéaire de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$. Rappelons que le vecteur nul est combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs. Ainsi, l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ est non vide (il contient le vecteur nul) et il possède une structure de sous-espace vectoriel de l'espace E. La définition suivante a alors un sens.

Définition 8.6 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}=(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle* **sous-espace engendré par la famille** *$\mathcal{F}$ et on note* $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ *ou* $\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m)$ *l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_m$. Autrement dit :*

$$\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m)\overset{\text{déf.}}{=}\{\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{v}_m\mid(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{K}^m\}.$$

Inversement, la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ est dite **génératrice** *du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m)$ *de E.*

Le sous-espace $\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m)$ est donc constitué par les vecteurs de l'espace E qui se décomposent suivant les vecteurs $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m$. Autrement dit, $\boldsymbol{x}$ appartient à $\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m)$ signifie que

$$\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{K}^m \quad \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{v}_m.$$

Remarquons que cette décomposition n'est pas forcément unique[9] et que $\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m)$ est un sous-espace *a priori* distinct de l'espace E.[10]

[9] Elle le sera lorsque les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_m$ seront linéairement indépendants. La famille $\mathcal{F}=(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ sera alors qualifiée de base du sous-espace $\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m)$. Nous reviendrons longuement sur ce point au paragraphe 8.3.2.

[10] Comme nous le verrons par la suite, le cas où la famille $\mathcal{F}=(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ est génératrice de l'espace E tout entier est particulièrement intéressant puisque cela autorise l'écriture de tout vecteur de l'espace E comme une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_m$.

Copyrighted material

Exemples

1. On a : $\text{Vect}\,(\mathbf{0}_E) = \{\mathbf{0}_E\}$.

2. Si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{u}) = \{\alpha\boldsymbol{u} \,|\, \alpha \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}\boldsymbol{u}.$$

On retrouve que $\text{Vect}\,(\mathbf{0}_E) = \{\mathbf{0}_E\}$ (cas où $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$) et si $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}_E$ alors $\text{Vect}\,(\boldsymbol{u})$ est la droite vectorielle engendrée par $\boldsymbol{u}$. Nous en donnons quelques illustrations dans l'espace $\mathbb{R}^3$ sur la figure 3.

3. Considérons à présent deux vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ de l'espace E. On a

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \{\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} \,|\, \alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}\}.$$

En particulier, si les deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont tels que $\boldsymbol{u} \neq \gamma\boldsymbol{v}$ ou $\boldsymbol{v} \neq \gamma\boldsymbol{u}$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$ alors $\text{Vect}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est appelé ***plan vectoriel*** (voir la fig. 3 pour quelques illustrations dans l'espace $\mathbb{R}^3$).

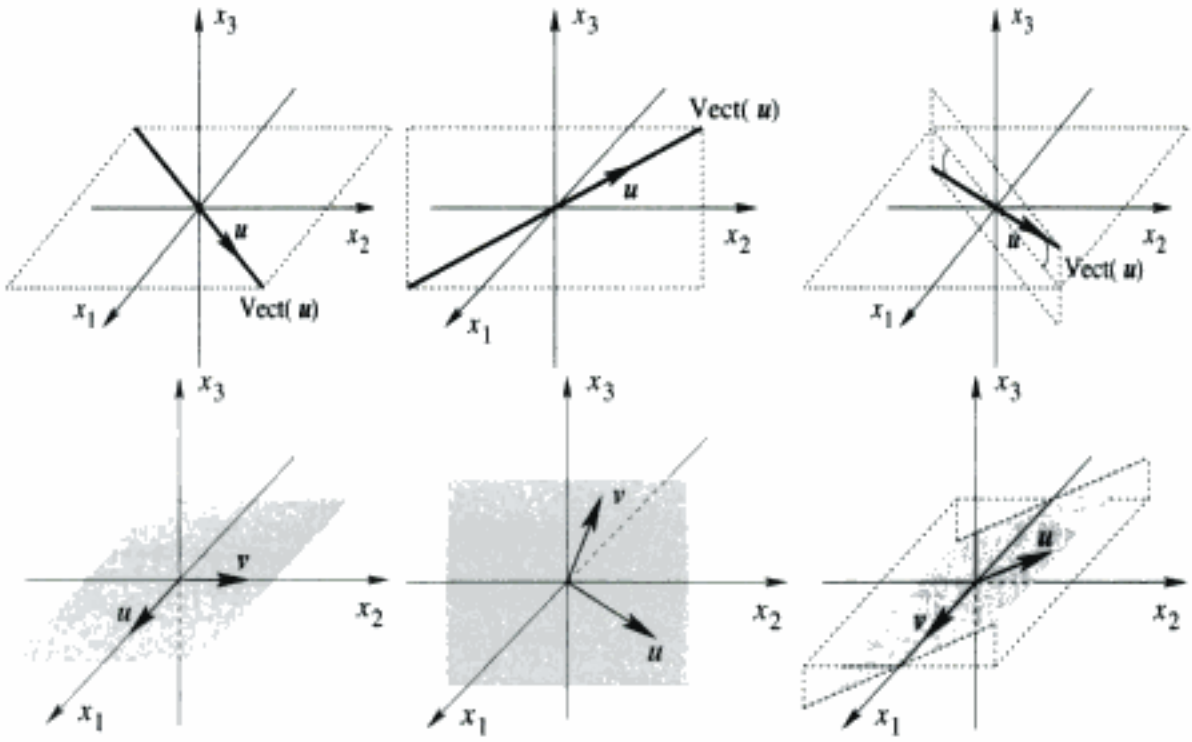


Fig. 3 Sur les trois dessins supérieurs sont représentés par des droites en gras des sous-espaces $\text{Vect}\,(\boldsymbol{u})$ de $\mathbb{R}^3$. Les dessins inférieurs représentent (en grisé) des sous-espaces $\text{Vect}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de $\mathbb{R}^3$.

Remarques

1. Les vecteurs générateurs d'un sous-espace sont eux-mêmes des éléments de ce sous-espace. Par conséquent, si parmi les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$, un vecteur est

Copyrighted material

non nul alors $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ est nécessairement non réduit au vecteur nul. Insistons sur le point suivant. Le corps $\mathbb{K}$ étant égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il y a une infinité d'éléments dans $\mathbb{K}$. Par conséquent, tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace non réduit au vecteur nul possède une infinité de vecteurs. En particulier, le sous-espace $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ ne déroge pas à la règle. Il possède une infinité de vecteurs (à la condition, bien sûr, qu'au moins un des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ soit non nul), et ce bien que la famille génératrice $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ ne possède qu'un nombre fini de vecteurs.

2. Soient $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On a

$$\forall \boldsymbol{w} \in E \quad \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \subset \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w})$$

puisque

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m + 0\boldsymbol{w}.$$

De plus, pour tout $\boldsymbol{w} \in E$, le sous-espace $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ constitue lui-même un sous-espace vectoriel de $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w})$.

3. Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace E. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\text{Vect}\,(\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v})$ constitue un sous-espace de $\text{Vect}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. En particulier, en prenant $\lambda = 1$ et $\mu = 0$ (respectivement $\lambda = 0$ et $\mu = 1$) le sous-espace $\text{Vect}\,(\boldsymbol{u})$ (resp. le sous-espace $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v})$) constitue un sous-espace de $\text{Vect}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

8.2.4 Propriétés

Les propriétés que nous énonçons dans cette partie seront à l'origine de la méthode des « zéros échelonnés » présentée au paragraphe 8.4.4 en page 333.

Proposition 8.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ des vecteurs de E. Pour tout permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, m\}$,*

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \text{Vect}\left(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(m)}\right).$$

Autrement dit, le sous-espace engendré par une famille de vecteurs est inchangé lorsqu'on modifie l'ordre des vecteurs de la famille.[11]

Démonstration Cette propriété se déduit du fait que l'ordre des termes est sans influence dans une combinaison linéaire (l'addition des vecteurs est associative et commutative). □

Remarque Puisque le sous-espace engendré par une famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ de vecteurs est inchangé lorsqu'on modifie l'ordre des vecteurs de la famille, on dit aussi que les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ (sans nécessairement en préciser l'ordre) sont ***générateurs*** de $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ ou que la ***partie*** $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ ***est génératrice*** de $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$.

[11] Par exemple, $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3)$.

Copyrighted material

Proposition 8.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}$ des vecteurs de E.*

✗ *Si $\boldsymbol{v}_{m+1}$ est combinaison linéaire des m autres vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ alors*

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}) = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)\,.$$

Autrement dit, l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs est inchangé lorsqu'on augmente cette famille d'une combinaison linéaire de ses vecteurs.

✗ *En particulier,*

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{0}_E) = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)\,.$$

Démonstration ⊵ Montrons dans un premier temps l'égalité (ensembliste) suivante : $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}) = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$. Il est clair que l'inclusion

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \subset \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1})$$

est vérifiée. Inversement, considérons que $\boldsymbol{x} \in \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1})$ et montrons que $\boldsymbol{x} \in \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$. Il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}) \in \mathbb{K}^{m+1}$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m + \alpha_{m+1} \boldsymbol{v}_{m+1}.$$

Puisque $\boldsymbol{v}_{m+1}$ est combinaison linéaire de $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$,

$$\exists (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{K}^m \quad \boldsymbol{v}_{m+1} = \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \beta_m \boldsymbol{v}_m.$$

On en déduit que

$$\boldsymbol{x} = (\alpha_1 + \alpha_{m+1}\beta_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (\alpha_m + \alpha_{m+1}\beta_m)\boldsymbol{v}_m$$

avec $\alpha_i + \alpha_{m+1}\beta_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, ce qui démontre l'existence de $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{K}^m$ (on a $\gamma_i = \alpha_i + \alpha_{m+1}\beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$) tel que

$$\boldsymbol{x} = \gamma_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \gamma_m \boldsymbol{v}_m,$$

c'est-à-dire $\boldsymbol{x} \in \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$. On a donc montré l'inclusion

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}) \subset \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)\,.$$

Finalement, on a $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}) = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$.

⊵ La deuxième propriété est un cas particulier de la première. Elle se déduit du fait que le vecteur nul peut s'écrire comme une combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs (voir p. 305). □

Copyrighted material

Corollaire 8.1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ des vecteurs de E.*

✗ *Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul on a*

$$\text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_m)\,.$$

Autrement dit, on ne modifie pas l'espace engendré par une famille de vecteurs lorsqu'on multiplie un des vecteurs par un scalaire non nul.

✗ *Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et pour tous scalaires β_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \neq i$, on a*

$$\text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \beta_j \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_m)\,.$$

Autrement dit, on ne modifie pas l'espace engendré par une famille de vecteurs lorsqu'on additionne à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres (et uniquement des autres) vecteurs.

Démonstration La démonstration de la première propriété est aisée. Sa rédaction est laissée en exercice. Montrons la deuxième propriété. Notons $\boldsymbol{v}_i'$ le vecteur défini par

$$\boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \beta_j \boldsymbol{v}_j. \tag{1}$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_m)$: le vecteur $\boldsymbol{x}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_m$ et donc de $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ puisque d'après (1), le vecteur $\boldsymbol{v}_i'$ est lui-même combinaison linéaire de $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_m$. On a ainsi montré l'inclusion

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_m) \subset \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_m)\,.$$

Considérons à présent un vecteur $\boldsymbol{x}$ dans $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$: $\boldsymbol{x}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_m$. Or, de (1) il vient

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i' - \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \beta_j \boldsymbol{v}_j.$$

Le vecteur $\boldsymbol{v}_i$ est donc combinaison linéaire de $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_m$. On en déduit que $\boldsymbol{x}$ est aussi combinaison linéaire de $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_m$. On a donc montré l'inclusion

$$\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \subset \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_m)\,,$$

ce qui termine la démonstration. ❑

Copyrighted material

Exemple Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les trois vecteurs

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,-1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,2,1,0) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_3 = (3,5,2,-1).$$

On a $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$. Le vecteur $\boldsymbol{v}_3$ est ainsi combinaison linéaire des deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$. En utilisant la première propriété de la proposition 8.4, on en déduit que

$$\text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2).$$

De manière équivalente, on écrit

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) &= \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2)) \quad \text{d'après le corollaire 8.1} \\ &= \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^4}) \quad \text{car } \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 \\ &= \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \quad \text{d'après la proposition 8.4.} \end{aligned}$$

Remarque L'opération qui consiste à additionner à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs doit être manipulée avec précaution. Considérons par exemple deux vecteurs non nuls $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et supposons que $\boldsymbol{v}_1 \neq \gamma \boldsymbol{v}_2$ pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$.[12] D'après le corollaire 8.1, on ne modifie pas l'espace engendré par ces deux vecteurs lorsqu'on retranche le premier vecteur au second (premier cas) ou lorsqu'on retranche le second vecteur au premier (deuxième cas). Autrement dit,

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) &= \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1), \quad \text{(premier cas)} \\ \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) &= \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2). \quad \text{(deuxième cas)} \end{aligned}$$

En revanche, ces deux opérations ne peuvent pas s'effectuer simultanément puisque, de toute évidence, on a

$$\text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \neq \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1).$$

En effet, d'une part, on a l'égalité $\text{Vect}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = \mathbb{K}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$ (d'après la proposition 8.4), et d'autre part, l'inclusion de $\mathbb{K}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$ dans $\text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ est stricte puisque ni $\boldsymbol{v}_1$, ni $\boldsymbol{v}_2$ n'appartiennent à $\mathbb{K}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$.

Effectuer plusieurs opérations simultanément n'est cependant pas interdit, à la condition que l'on ait pris soin de vérifier qu'elles pouvaient être réalisées les unes après les autres. Le meilleur moyen d'éviter d'aboutir à un résultat faux est de laisser un vecteur inchangé et de n'utiliser que celui-ci dans les autres combinaisons linéaires. Considérons par exemple trois vecteurs non nuls $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. En laissant le premier vecteur $\boldsymbol{v}_1$ inchangé, on a pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \alpha \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 + \beta \boldsymbol{v}_1).$$

[12] On verra plus loin que cela revient à supposer les deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ non colinéaires.

Copyrighted material

On peut alors réitérer l'opération en laissant cette fois-ci le second vecteur $\boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{v}_1$ inchangé. On a pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 + \beta\boldsymbol{v}_1) = \mathrm{Vect}\big(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 + \beta\boldsymbol{v}_1 + \gamma(\boldsymbol{v}_2 + \alpha\boldsymbol{v}_1)\big).$$

Cette manière de procéder sera reprise de façon systématique dans la méthode des zéros échelonnés (voir p. 333).

8.2.5 Sous-espace engendré par une famille infinie

Donnons à présent la définition d'un sous-espace engendré par une famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E, indexée par un ensemble infini I. Motivons cette définition comme nous l'avons fait dans le cas d'une famille finie (voir p. 310). Considérons deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de E. Supposons que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ soient des combinaisons linéaires de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$. Il existe $J_1 \subset I$ tel que $\mathrm{card}(J_1) < +\infty$ et il existe $(\alpha_i)_{i\in J_1} \in \mathbb{K}^{J_1}$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i\in J_1} \alpha_i \boldsymbol{v}_i.$$

De même, il existe $J_2 \subset I$ tel que $\mathrm{card}(J_2) < +\infty$ et il existe $(\beta_i)_{i\in J_2} \in \mathbb{K}^{J_2}$ tel que

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i\in J_2} \beta_i \boldsymbol{v}_i.$$

Définissons l'ensemble J comme l'union des deux ensembles finis J_1 et J_2. Posons $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in J \setminus J_1$ et $\beta_i = 0$ pour tout $i \in J \setminus J_2$. Cela permet d'écrire

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i\in J} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \quad \text{et} \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i\in J} \beta_i \boldsymbol{v}_i.$$

On obtient alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = \sum_{i\in J} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i)\boldsymbol{v}_i$$

avec $\alpha\alpha_i + \beta\beta_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in J$. Le vecteur $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ s'écrit donc bien comme une combinaison linéaire de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$. L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ (qui est non vide puisqu'il contient le vecteur nul) possède ainsi une structure de sous-espace vectoriel de l'espace E. Cela donne un sens à la définition suivante.

Définition 8.7 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ une famille infinie de vecteurs de E. On appelle* **sous-espace engendré par la famille** $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ *le sous-espace de E constitué des combinaisons linéaires de $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$. Autrement dit,*

$$\mathrm{Vect}\Big((\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}\Big) \overset{\text{déf.}}{=} \Big\{ \sum_{i\in J} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \;\Big|\; J \subset I,\ \mathrm{card}(J) < +\infty,\ (\alpha_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^J \Big\}.$$

La famille $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ est dite **génératrice** *de* $\mathrm{Vect}\,\big((\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}\big)$.

Copyrighted material

Remarque Considérons un ensemble A constitué de vecteurs de E, dépourvu *a priori* de toute structure algébrique.[13] Il est possible de construire à partir de A un sous-espace vectoriel de E contenant A. Il suffit pour cela de considérer tous les sous-espaces vectoriels de E contenant le sous-ensemble A. Remarquons qu'il en existe au moins un (à savoir l'espace E lui-même) et que l'intersection de tous les sous-espaces de E contenant A constitue un sous-espace de E (d'après la proposition 8.2). Par conséquent, on définit le ***sous-espace engendré par l'ensemble*** A et on note $\text{Vect}\,(A)$, l'intersection de tous les sous-espaces de E contenant A. Le sous-espace $\text{Vect}\,(A)$ est ainsi défini comme le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces de E contenant A. En particulier,

$$\text{Vect}\,(\emptyset) = \{\mathbf{0}_E\} \qquad \text{et} \qquad \text{Vect}\,(E) = E.$$

On vérifie que si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles d'un $\mathbb{K}$-espace E alors

$$A_1 \subset A_2 \quad \Longrightarrow \quad \text{Vect}\,(A_1) \subset \text{Vect}\,(A_2)\,.$$

Bien sûr, si A est un sous-espace de E alors le plus petit sous-espace de E contenant A est le sous-espace A lui-même et $\text{Vect}(A) = A$.

8.3 Indépendance linéaire

8.3.1 Famille liée et famille libre

Commençons par donner la définition d'une famille liée et celle d'une famille libre dans le cas où la famille est finie. Le cas d'une famille infinie sera traité dans un deuxième temps.

Définition 8.8 *Soit $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

✗ *La famille $\mathcal{F}$ est dite* ***liée*** *si l'on peut trouver des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ appartenant à $\mathbb{K}$, dont un au moins est non nul*[14] *tels que :*

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_p\boldsymbol{v}_p = \mathbf{0}_E.$$

On dit également que les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ sont linéairement dépendants.

✗ *Si la famille n'est pas liée, on dit qu'elle est* ***libre*** *(ou que les vecteurs sont linéairement indépendants).*

En d'autres termes, on dit qu'une famille finie $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre si la seule possibilité pour que la combinaison linéaire $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_p\boldsymbol{v}_p$ soit nulle, est que les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ soient tous nuls. En pratique, pour montrer que

[13] En particulier, l'ensemble A n'est *a priori* pas un sous-espace vectoriel de E.

[14] On dit ***non tous nuls*** et on écrit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Copyrighted material

la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est libre, on montre que la relation (appelée relation de liaison)

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}_E$$

entraîne que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0_{\mathbb{K}}.$$

Exemples

1. Dans $\mathbb{C}^4$, les vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 2, 2\mathrm{i}, 6)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (1, \mathrm{i}, 0, 1 + 3\mathrm{i})$ où $\mathrm{i}^2 = -1$, sont liés puisque

$$\boldsymbol{v}_1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}_{\mathbb{C}^4}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^4$, les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 2, 0, 0)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 0, 0)$ sont liés puisque $0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^4}$.

3. Soit n un entier non nul. Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $\mathcal{F}_n = \left(1_{\mathbb{K}[X]}, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ est libre puisque la relation

$$\alpha_0 1_{\mathbb{K}[X]} + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \ldots + \alpha_n X^n = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

implique que $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

4. Dans $\mathbb{K}^4$, la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ où $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1, 0)$ est libre puisque la relation

$$\alpha_1(1, 0, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, 0) + \alpha_3(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

est équivalente à

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0) = (0, 0, 0, 0),$$

d'où (par identification) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Vecteurs faisant apparaître un système échelonné de zéros

Considérons les quatre vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ de $\mathbb{K}^5$ que nous plaçons en lignes superposées :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{a} & = & (\,a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\,) \ \text{avec} \ a_1 \neq 0 \\ \boldsymbol{b} & = & (\,0,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\,) \ \text{avec} \ b_2 \neq 0 \\ \boldsymbol{c} & = & (\,0,\ 0,\ c_3,\ c_4,\ c_5\,) \ \text{avec} \ c_3 \neq 0 \\ \boldsymbol{d} & = & (\,0,\ 0,\ 0,\ d_4,\ d_5\,) \ \text{avec} \ d_4 \neq 0 \end{array}$$

où seuls les scalaires a_1, b_2, c_3 et d_4 sont supposés non nuls, les autres scalaires pouvant être nuls ou non nuls. La relation de liaison (c'est une égalité dans $\mathbb{K}^5$)

$$\alpha_1 \boldsymbol{a} + \alpha_2 \boldsymbol{b} + \alpha_3 \boldsymbol{c} + \alpha_4 \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{K}^5}$$

Copyrighted material

s'écrit sous la forme d'un système de 5 équations

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1 & = & 0 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 & = & 0 \\ \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3 + \alpha_3 c_3 & = & 0 \\ \alpha_1 a_4 + \alpha_2 b_4 + \alpha_3 c_4 + \alpha_4 d_4 & = & 0 \\ \alpha_1 a_5 + \alpha_2 b_5 + \alpha_3 c_5 + \alpha_4 d_5 & = & 0 \end{cases}.$$

On déduit de la première équation que $\alpha_1 = 0$ puisque $a_1 \neq 0$, puis, fort de ce résultat, on déduit de la deuxième équation que $\alpha_2 = 0$ puisque $b_2 \neq 0$, et ainsi de suite. Finalement, on obtient (en cascade) que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

La famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ est donc libre.[15] Plus généralement, considérons p vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ de $\mathbb{K}^n$ avec $p \leqslant n$ et plaçons ces vecteurs en lignes superposées. On obtient ainsi un tableau de p lignes et de n colonnes. Si cette disposition fait apparaître un système échelonné de zéros, c'est-à-dire un triangle formé de $p-1$ zéros dans la première colonne, de $p-2$ zéros dans la deuxième colonne, ..., de 1 zéro dans la $(p-1)$-ième colonne, et si les éléments appartenant à la diagonale placée directement au-dessus de ce triangle de zéros sont tous non nuls alors les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_p$ forment une famille libre dans $\mathbb{K}^n$. On résume cela dans la proposition suivante.

Proposition 8.5 *Soient $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ tels que*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 & = & (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots, a_{1n}) \\ \boldsymbol{v}_2 & = & (0, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \ldots, a_{2n}) \\ \vdots & & \vdots \quad \ddots \quad \ddots \quad \vdots \\ \boldsymbol{v}_p & = & (0, \ldots, 0, a_{pp}, \ldots, a_{pn}) \end{cases}.$$

Si $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2 \ldots, p\}$ alors ces vecteurs forment une famille libre dans $\mathbb{K}^n$.

Les définitions de familles libres et liées données ci-avant pour des familles finies se généralisent au cas de ***familles infinies***.

Définition 8.9 ✗ *Une famille infinie est* **libre** *si toutes ses sous-familles finies sont libres.*

✗ *Une famille infinie est* **liée** *si elle n'est pas libre. Autrement dit, une famille infinie est liée s'il existe une sous-famille finie qui est liée.*

Exemple La famille infinie $(1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$. En revanche la famille infinie $(1, X, 1 - X^2, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ est liée dans $\mathbb{K}[X]$.

[15] Remarquons que la dernière équation n'a pas été utilisée.

Copyrighted material

La proposition suivante donne une caractérisation d'une famille liée.

Proposition 8.6 *Une famille est liée si, et seulement si, un de ses éléments peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres éléments de la famille. Ainsi, la famille finie $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est liée si et seulement si*

$$\exists \ell \in \{1,2,\ldots,p\} \quad \boldsymbol{v}_\ell = \sum_{i=1, i\neq \ell}^{p} \beta_i \boldsymbol{v}_i$$

avec β_i appartenant à $\mathbb{K}$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,p\} \setminus \{\ell\}$.

Démonstration Effectuons la démonstration pour une famille finie. Le cas d'une famille infinie se démontre suivant le même modèle. La rédaction est laissée en exercice. S'il existe un entier ℓ appartenant à $\{1,2,\ldots,p\}$ tel que

$$\boldsymbol{v}_\ell = \sum_{i=1, i\neq \ell}^{p} \beta_i \boldsymbol{v}_i$$

alors il est clair que la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est liée puisque l'on peut trouver p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, dont un au moins est non nul, tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}_E.$$

Il suffit pour cela de prendre $\alpha_\ell = 1$ et $\alpha_i = -\beta_i$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ tel que $i \neq \ell$, et parmi les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, il en existe bien un, à savoir $\alpha_\ell = 1$, qui est non nul. Réciproquement, supposons que la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ soit liée. Il existe p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, dont un au moins est non nul (notons-le α_ℓ avec $\ell \in \{1,2,\ldots,p\}$) tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}_E.$$

Il convient alors d'isoler le vecteur $\boldsymbol{v}_\ell$ comme suit ($\alpha_\ell \neq 0$)

$$\boldsymbol{v}_\ell = -\sum_{i=1, i\neq \ell}^{p} \frac{\alpha_i}{\alpha_\ell} \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1, i\neq \ell}^{p} \beta_i \boldsymbol{v}_i$$

avec $\beta_i = -\alpha_i/\alpha_\ell$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,p\} \setminus \{\ell\}$. □

Exemple Dans $\mathbb{R}^4$ les trois vecteurs

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,-1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,2,1,0) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_3 = (3,5,2,-1)$$

sont liés puisque l'un des vecteurs (à savoir le vecteur $\boldsymbol{v}_3$) s'exprime comme une combinaison linéaire des deux autres vecteurs. On a en effet

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2.$$

Copyrighted material

La méthode qui nous a permis de trouver cette relation sera explicitée ultérieurement (voir la méthode dite « des zéros échelonnés », p. 333).

Remarques

1. Pour qu'une famille à un seul élément $\boldsymbol{v} \in E$ soit liée, il faut et il suffit que $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E$. Une famille réduite à un seul élément non nul est libre.

2. Toute famille contenant le vecteur $\mathbf{0}_E$ est liée.

3. Pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de E, la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ est liée. Il en résulte que les vecteurs d'une famille libre sont nécessairement tous distincts.

4. Le fait qu'une famille de vecteurs soit libre ou liée est inchangé si l'on réordonne ses éléments. Autrement dit, si $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille libre et si σ désigne une permutation de $\{1, 2, \ldots, p\}$ alors la nouvelle famille

$$\mathcal{F}_\sigma = (\boldsymbol{v}_{\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant p}$$

est toujours libre. Par exemple si la famille $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ est libre alors $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ est encore libre. Cette remarque donne un sens à la définition d'une ***partie libre*** comme étant une famille libre dans E puisque l'ordre des vecteurs, propre à la notion de famille, n'influe pas sur le fait qu'une famille soit libre ou liée.

Proposition 8.7 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E.*

1. Si $\mathcal{F}$ est libre alors toute sous-famille de $\mathcal{F}$ est libre.

2. Si $\mathcal{F}$ est liée alors toute sur-famille de $\mathcal{F}$ est liée.

Démonstration Montrons la deuxième propriété dans le cas d'une famille finie. Considérons une famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et supposons qu'elle soit liée. Cela signifie qu'il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ et

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{v}_p = \mathbf{0}_E. \tag{2}$$

Étant donné un vecteur $\boldsymbol{v}_{p+1}$ de E, on considère la famille

$$\mathcal{F}' = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}_{p+1}).$$

C'est une sur-famille de $\mathcal{F}$. Puisque $0\boldsymbol{v}_{p+1} = \mathbf{0}_E$, on déduit de l'égalité (2) que

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{v}_p + 0\boldsymbol{v}_{p+1} = \mathbf{0}_E$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0) \in \mathbb{K}^{p+1}$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0) \neq (0, 0, \ldots, 0, 0)$, ce qui montre que la sur-famille $\mathcal{F}'$ est liée. Le cas d'une famille infinie est admis. La première propriété se démontre sur le même modèle. □

Copyrighted material

Exercice 2 *Soit $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.*
1 - Soient $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement croissante et $\mathcal{F}_\infty$ la famille définie par

$$\mathcal{F}_\infty = (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad avec \quad f_k : x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(\alpha_k x) \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\mathcal{F}_\infty$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2 - Montrer que $\mathcal{L}_\infty = \left(x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(\alpha_k x) \in \mathbb{R}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Définition 8.10 *Lorsque deux vecteurs (respectivement trois vecteurs) non nuls d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sont liés, on dit qu'ils sont* **colinéaires** *(resp.* **coplanaires** *).*

Lien entre cardinal d'une famille génératrice et indépendance linéaire

Soient $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ trois vecteurs quelconques appartenant à un $\mathbb{K}$-espace E et $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ et $\boldsymbol{x}_4$ quatre vecteurs qui s'écrivent tous comme des combinaisons linéaires des trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$. Par exemple

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{x}_3 = -\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \end{cases}.$$

Nous allons vérifier que ces quatre vecteurs forment une famille liée. Pour obtenir la relation liant les quatre vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$, nous procédons en trois étapes.

Étape 1 : on isole le vecteur $\boldsymbol{v}_3$ à partir de la quatrième relation, c'est-à-dire $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, et on l'injecte dans les trois autres. On obtient alors les trois nouvelles relations

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{x}_4 \\ \boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{x}_4 \\ \boldsymbol{x}_3 = -2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{x}_4 \end{cases}.$$

Étape 2 : on isole maintenant le vecteur $\boldsymbol{v}_2$ à partir de la troisième et dernière relation, c'est-à-dire $\boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4$, on l'injecte dans les deux autres et on obtient les deux nouvelles relations

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = -2\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{x}_3 + 3\boldsymbol{x}_4 \\ \boldsymbol{x}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{x}_3 \end{cases}.$$

Étape 3 : enfin, on isole le vecteur $\boldsymbol{v}_1$ à partir de la deuxième des deux dernières relations, c'est-à-dire $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_3$ et on l'injecte dans la première.

Copyrighted material

Finalement on obtient la relation de liaison recherchée

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - 3\boldsymbol{x}_4 = \mathbf{0}_E$$

que l'on peut vérifier directement à partir des relations donnant les vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ en fonction des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

On vient donc de vérifier que les quatre vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ et $\boldsymbol{x}_4$ appartenant tous au sous-espace $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3)$ forment une famille liée. Ce résultat se généralise au cas de m vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ et en prenant au moins $m+1$ vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_{m+1}$ s'écrivant tous comme des combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$.

Proposition 8.8 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ des vecteurs de E. Toute famille constituée d'au moins $m+1$ vecteurs appartenant à* $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ *est liée.*

Démonstration Comme dans l'exemple précédent, la démonstration est basée sur un procédé d'élimination. Elle s'effectue par récurrence sur l'entier naturel m. On l'admet. □

On déduit de la proposition 8.8 le corollaire suivant.

Corollaire 8.2 *Si un espace vectoriel E est engendré par m vecteurs alors toute famille constituée d'au moins $m+1$ vecteurs appartenant à l'espace E est liée.*

8.3.2 Base algébrique d'un espace vectoriel

Commençons par quelques remarques. Soit $(\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille génératrice de l'espace E.

⊵ D'après ce qui est mentionné au paragraphe 8.2.3, dire que la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est génératrice de E signifie que

$$\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n.$$

Pour tout vecteur de l'espace E, on est donc assuré de l'existence d'une décomposition par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, mais, *a priori*, rien ne nous assure l'unicité d'une telle décomposition.

⊵ Cherchons à quelle condition l'unicité est assurée. Supposons qu'à un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E correspondent deux ensembles de scalaires, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ et $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$, tels que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \beta_n \boldsymbol{v}_n,$$

c'est-à-dire tels que

$$(\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\boldsymbol{v}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_E.$$

Copyrighted material

Si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ forment une famille libre dans E alors on en déduit

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 - \beta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n - \beta_n = 0,$$

c'est-à-dire $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\ldots$, $\alpha_n = \beta_n$. Le fait que la famille $(\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ soit libre nous assure ainsi l'unicité de la décomposition. Réciproquement, de l'égalité

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}_E,$$

on déduit par unicité de la décomposition du vecteur nul par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Une famille à la fois génératrice de E et libre est appelée une base algébrique de E.

Définition 8.11 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une* **base algébrique** *(ou plus simplement une* **base***) de E si $\mathcal{B}$ est à la fois une famille libre* **et** *une famille génératrice de E.*

On a le résultat suivant.

Proposition 8.9 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

✗ *La famille finie $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ est une base de E si, et seulement si,*

$$\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \exists ! (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n.$$

✗ *La famille infinie $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_i)_{i \in I}$ où I est un ensemble infini, est une base de E si, et seulement si,*

$$\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \exists J \subset I \quad \operatorname{card}(J) < +\infty \quad \exists ! (\alpha_i)_{i \in J} \subset \mathbb{K}^J \quad \boldsymbol{x} = \sum_{i \in J} \alpha_i \boldsymbol{e}_i.$$

✗ *Les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (cas d'une base finie) ou $(\alpha_i)_{i \in J}$ (cas d'une base infinie) de $\mathbb{K}$ sont appelés* **coordonnées** *de $\boldsymbol{x}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.*

Démonstration Considérons dans un premier temps le cas d'une famille finie $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. D'une part, l'existence de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E est équivalente au fait que la famille $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ soit génératrice de E. D'autre part, l'unicité de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ est équivalente au fait que la famille $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ soit libre de E. Le cas d'une famille infinie $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_i)_{i \in I}$ s'obtient en suivant un raisonnement analogue (la rédaction est laissée en exercice). □

Comme le montrent les exemples suivants, une base algébrique peut être finie ou infinie. En revanche, les coordonnées d'un vecteur par rapport à une base algébrique sont toujours en nombre fini, même si la base considérée est infinie.

Copyrighted material

Exemples

1. La famille $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ est génératrice de $\mathbb{K}^2$ puisque tout vecteur $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$ s'écrit :

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1).$$

De plus on vérifie aisément que $\mathcal{B}$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{K}^2$.

2. Tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit sous la forme

$$P = a_0 1_{\mathbb{K}[X]} + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

et cette décomposition est unique. Par conséquent, la famille finie

$$\mathcal{B}_n = \left(X^i\right)_{0 \leqslant i \leqslant n} = \left(1_{\mathbb{K}[X]}, X, X^2, \ldots, X^n\right)$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Les éléments a_0, a_1, a_2, …, a_n de $\mathbb{K}$ sont les coordonnées de P par rapport à la base canonique. Remarquons que tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit aussi sous la forme[16]

$$P = \widetilde{P}(a) 1_{\mathbb{K}[X]} + \frac{\widetilde{P'}(a)}{1!}(X-a) + \frac{\widetilde{P''}(a)}{2!}(X-a)^2 + \ldots + \frac{\widetilde{P^{(n)}}(a)}{n!}(X-a)^n$$

où, pour tout entier k compris entre 0 et n, $\widetilde{P^{(k)}}$ désigne la fonction polynomiale associée au polynôme $P^{(k)}$, et où a désigne un élément quelconque de $\mathbb{K}$, et cette décomposition est unique (pour tout a fixé). Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{K}$, la famille finie

$$\mathcal{B}_n^{(a)} = \left((X-a)^i\right)_{0 \leqslant i \leqslant n} = \left(1_{\mathbb{K}[X]}, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\right)$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Les éléments $\widetilde{P}(a)$, $\widetilde{P'}(a)/1!$, $\widetilde{P''}(a)/2!$, …, $\widetilde{P^{(n)}}(a)/n!$ de $\mathbb{K}$ sont les coordonnées de P par rapport à $\mathcal{B}_n^{(a)}$.

3. La famille infinie $\mathcal{B}_\infty = \left(X^i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

4. Tout vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'espace produit $\mathbb{K}^n$ s'écrit

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n$$

où on a noté

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0,1,\ldots,0), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = (0,0,\ldots,1).$$

Cette décomposition étant unique, la famille $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On l'appelle ***base canonique de*** $\mathbb{K}^n$. Par conséquent, les scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ sont les coordonnées du vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ par rapport à la base canonique.

---

[16] C'est la formule de Taylor pour les polynômes (voir le théroème 6.3, p. 237).

Copyrighted material

ATTENTION Il ne faut pas oublier qu'une base est avant tout une famille. L'ordre des éléments y a donc par conséquent une importance puisque changer l'ordre des éléments d'une base revient à changer de base. Par exemple, si

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$$

est une base d'un $\mathbb{K}$-espace E alors

$$\mathcal{B}' = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}'' = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$$

sont aussi des bases de E.

Exercice 3 *Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on considère les trois vecteurs*

$$\boldsymbol{u}_1 = (1, 1, 2), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 0), \quad \boldsymbol{u}_3 = (0, 0, -1)$$

et le vecteur $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)$.
1 - Quelles sont les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
2 - Montrer que les vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3 - Déterminer les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans cette nouvelle base.

Tout espace vectoriel non réduit au vecteur nul possède-t-il une base algébrique ?

Pour répondre à cette question, commençons par énoncer un résultat que nous admettrons.

Lemme 8.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $\mathcal{G}$ est une partie génératrice de E et si $\mathcal{L}$ est une partie libre dans E telles que $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ alors il existe (au moins) une base algébrique $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}.$$

Un premier corollaire de ce résultat est que tout espace vectoriel non réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$ possède (au moins) une base algébrique. En effet, puisque l'espace E n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$, il possède un vecteur $\boldsymbol{x}$ autre que le vecteur nul. Il suffit alors d'appliquer le lemme 8.1 en prenant la partie libre $\mathcal{L} = \{\boldsymbol{x}\}$ et la partie génératrice $\mathcal{G} = E$.

Un commentaire s'impose. D'un point de vue théorique, ce résultat est intéressant puisqu'il nous assure l'existence d'(au moins) une base algébrique pour tout espace vectoriel non nul. En revanche, il ne nous donne aucune stratégie de calcul pour trouver les vecteurs de cette base. Sa démonstration[17] est alors

[17] Elle est basée sur une version équivalente de l'axiome du choix. On l'admet.

Copyrighted material

qualifiée de non constructive et, en ce sens, ce résultat d'existence est décevant d'un point de vue pratique.

Un second corollaire du lemme 8.1 est le théorème suivant, dit de la base incomplète, dont la justification est immédiate en considérant $\mathcal{G} = E$ dans le lemme 8.1.

Théorème 8.1 (Théorème de la base incomplète) *Si $\mathcal{L}$ est une partie libre dans un espace vectoriel E alors il existe au moins une base algébrique $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B}.$$

8.4 Espace vectoriel de dimension finie

8.4.1 Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 8.12 *On dit qu'un espace vectoriel E est de* ***dimension finie*** *s'il existe une famille génératrice* ***finie*** *de vecteurs de E. Dans le cas contraire, on dit que l'espace est de* ***dimension infinie***.

Exemples

1. Tout espace vectoriel possédant une base finie est nécessairement de dimension finie. Par exemple, $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie puisqu'il n'existe pas de famille génératrice finie dans $\mathbb{K}[X]$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nécessairement de dimension finie et soient $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ des vecteurs de E. Le sous-espace Vect $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ est, par construction, de dimension finie.

La proposition suivante exprime que si E est de dimension finie alors de toute famille génératrice de E, on peut extraire une sous-famille qui est d'une part libre (dans E), et d'autre part encore génératrice de E. Elle exprime aussi que toutes les bases d'un même $\mathbb{K}$-espace ont même cardinal. Cela nous sera utile par la suite pour définir la dimension d'un espace vectoriel (voir le § 8.4.2).

Proposition 8.10 *Un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie possède au moins une base finie et toutes les bases d'un même espace de dimension finie ont même cardinal.*

Démonstration ⊵ Commençons par montrer qu'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie possède au moins une base finie. Supposer que E est de dimension finie signifie qu'il existe une famille finie génératrice de E que l'on note

Copyrighted material

$\mathcal{G}_m = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$. Remarquons que cette famille ne définit pas obligatoirement une base de E car elle n'est pas nécessairement libre dans E. Par conséquent, il faut considérer les deux cas suivants.

1. Si $\mathcal{G}_m$ est une famille libre alors le résultat est démontré.
2. Si la famille $\mathcal{G}_m$ est liée alors il existe un vecteur de $\mathcal{G}_m$ qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{G}_m$. Supposons (sans perte de généralité) que ce vecteur soit le vecteur $\boldsymbol{v}_m$. D'après la proposition 8.4, la sous-famille $\mathcal{G}_{m-1} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{m-1})$ est elle-même génératrice de l'espace E.

On répète alors le même raisonnement sur la famille $\mathcal{G}_{m-1}$, puis sur la famille $\mathcal{G}_{m-2}$ si $\mathcal{G}_{m-1}$ n'est pas libre, ..., et ainsi de suite jusqu'à l'obtention à un rang $n \leqslant m$ d'une famille $\mathcal{G}_n$ génératrice et libre dans E.

$\trianglerighteq$ Montrons maintenant que toutes les bases d'un même espace E de dimension finie ont même cardinal. Considérons pour cela

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$$

deux bases distinctes de E où on a noté

$$\text{card}(\mathcal{B}) = n \quad \text{et} \quad \text{card}(\mathcal{C}) = p.$$

- On ne peut pas avoir $p > n$. En effet, si on avait $p > n$, alors les vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ constitueraient une famille de p vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs avec n strictement inférieur à p. D'après le corollaire 8.2, ils seraient alors nécessairement liés, ce qui est impossible puisque $\mathcal{C}$ est libre (c'est une base de E).
- De même, on ne peut pas avoir $n > p$. Pour s'en convaincre, il suffit d'utiliser le même raisonnement mais en inversant les rôles joués par les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Ainsi, $n > p$ signifie que $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ forment une famille de n vecteurs dans un espace engendré par p vecteurs avec p strictement inférieur à n. Ils sont alors nécessairement liés (cela toujours d'après le corollaire 8.2). C'est bien sûr impossible puisque la famille $\mathcal{B}$ est libre (c'est une base de E).

Par conséquent, la seule possibilité est que $n = p$, c'est-à-dire

$$\text{card}(\mathcal{B}) = \text{card}(\mathcal{C}).$$

La démonstration est terminée. □

Exemple La famille $\mathcal{G} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ où $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 1)$ et $\boldsymbol{v} = (-2, 8)$ engendre $\mathbb{R}^2$. Elle est liée puisque

$$\boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2.$$

Ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^2$. En revanche la sous-famille $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ définie par $\mathcal{G}' = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ est d'une part encore génératrice de $\mathbb{R}^2$, et d'autre part libre dans $\mathbb{R}^2$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Copyrighted material

8.4.2 Dimension d'un espace vectoriel

Puisque toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal, la définition suivante a un sens.

Définition 8.13 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. On appelle* **dimension de** E *et on note* $\dim_{\mathbb{K}}(E)$*, le cardinal d'une base de E, c'est-à-dire :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) \overset{déf.}{=} \operatorname{card}(\mathcal{B}) \quad \text{où } \mathcal{B} \text{ est une base de } E.$$

On convient que

$$\dim_{\mathbb{K}}(\{\mathbf{0}_E\}) \overset{déf.}{=} 0.$$

Exemples

1. Pour tout corps commutatif $\mathbb{K}$, on a : $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$. En particulier,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 1, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1.$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = \operatorname{Re}(z) \times 1 + \operatorname{Im}(z) \times \mathrm{i}$ avec $\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$. Cette décomposition étant unique, on en déduit que la famille $\mathcal{B} = (1, \mathrm{i})$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, d'où

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2.$$

3. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$,
4. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.

Lien entre cardinal d'une famille génératrice ou libre et celui d'une base

Dans un espace de dimension finie, le cardinal de toute famille génératrice (respectivement libre) est minoré (respectivement majoré) par celui d'une base. Cela se vérifie très simplement de la manière suivante.

$\trianglerighteq$ D'après la proposition 8.10, on sait que de toute famille génératrice $\mathcal{G}$ d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie n, on peut extraire une base $\mathcal{B}$ de E et on a $\operatorname{card}(\mathcal{G}) \geqslant \operatorname{card}(\mathcal{B})$. Toujours d'après cette proposition, toutes les bases de E ont même cardinal. On a donc $n = \operatorname{card}(\mathcal{B})$ et on en déduit

$$\operatorname{card}(\mathcal{G}) \geqslant n.$$

En particulier, si $\operatorname{card}(\mathcal{G}) = n$ alors $\mathcal{G}$ est une base de E puisque de l'inclusion ensembliste $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ et de l'égalité des cardinaux $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \operatorname{card}(\mathcal{G})$, on déduit l'égalité ensembliste $\mathcal{B} = \mathcal{G}$.

$\trianglerighteq$ Par ailleurs, d'après le corollaire 8.2, on sait que toute famille constituée d'au moins $n+1$ vecteurs dans un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie n est nécessairement

Copyrighted material

liée. Par contraposition, on peut écrire qu'une famille libre $\mathcal{L}$ d'un espace E de dimension finie n est constituée d'au plus n vecteurs. On a donc

$$\text{card}\,(\mathcal{L}) \leqslant n.$$

En particulier, si $\text{card}\,(\mathcal{L}) = n$ alors $\mathcal{L}$ est une base de E. En effet, si $\mathcal{L}$ n'était pas une base de E alors, d'après le théorème 8.1 de la base incomplète, on pourrait compléter cette famille en une base dont le cardinal serait strictement supérieur à n, ce qui est bien sûr impossible puisque toutes les bases ont le même nombre d'éléments, ici n.

On résume ces résultats dans la proposition suivante.

Proposition 8.11 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie n.*

1. *Toute famille $\mathcal{G}$ génératrice de E vérifie* $\text{card}\,(\mathcal{G}) \geqslant n$. *En particulier, toute famille génératrice constituée de n vecteurs est une base de E.*
2. *Toute famille $\mathcal{L}$ libre dans E vérifie nécessairement :* $\text{card}\,(\mathcal{L}) \leqslant n$. *En particulier, toute famille libre constituée de n vecteurs est une base de E.*

Remarque Pour toute famille $\mathcal{L}$ libre et finie d'un espace E de dimension finie et non réduit à $\{\mathbf{0}_E\}$, il existe une base finie $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$. C'est le thèorème 8.1 de la base incomplète. Dans le cas particulier où E est de dimension n, cela signifie que si $\mathcal{L} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ est une famille libre dans E avec $p < n$, alors on peut trouver $n - p$ vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-p}$ de E tels que la famille

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-p})$$

soit une base de E.

Intéressons-nous maintenant à la dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie.

Proposition 8.12 *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est lui-même de dimension finie et*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

En particulier, si $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ *alors* $F = E$.

Démonstration ⊵ Soit $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Supposons $F \neq \{\mathbf{0}_E\}$ (le cas $F = \{\mathbf{0}_E\}$ est trivial). Il est clair que toute famille $\mathcal{L}$ libre dans F est nécessairement libre dans E (puisque F est un sous-espace de E), d'où $\text{card}(\mathcal{L}) \leqslant n$ (d'après la proposition 8.11). Parmi toutes les familles libres de F, choisissons une famille ayant le nombre maximal d'éléments possibles. Notons $\mathcal{L}_{\max}$ une telle famille libre maximale. On a

$$\text{card}(\mathcal{L}_{\max}) \leqslant n.$$

Copyrighted material

Soit $p = \text{card}(\mathcal{L}_{\max})$. Cela signifie qu'une famille constituée de plus de p vecteurs de F est nécessairement liée. Tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de F est alors combinaison linéaire de la famille $\mathcal{L}_{\max}$ car s'il ne l'était pas, la sur-famille $\mathcal{L}_{\max} \cup \{\boldsymbol{x}\}$ serait libre, ce qui contredirait la propriété de maximalité de $\mathcal{L}_{\max}$. La famille libre $\mathcal{L}_{\max}$ est donc génératrice de F. C'est une base de F. On a ainsi montré que F était de dimension finie et que sa dimension était inférieure ou égale à celle de E.

$\trianglerighteq$ Supposons maintenant que $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de F. La famille $\mathcal{B}$ est libre dans F donc dans E, et elle engendre le sous-espace F. C'est aussi une base de E puisque par hypothèse, le nombre de vecteurs qu'elle contient est égal à $\dim_{\mathbb{K}}(E)$. Par conséquent, elle engendre aussi l'espace E. On a donc montré que $F = \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$, c'est-à-dire que F et E étaient égaux. □

Remarque Soit E un $\mathbb{K}$-espace et F, G deux sous-espaces de E tels que $F \subset G$. Alors F est aussi un sous-espace du $\mathbb{K}$-espace G. En particulier,

- si G est de dimension finie alors tous ses sous-espaces sont aussi de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(G)$;
- si, de plus, les deux sous-espaces F et G sont de même dimension alors cela signifie nécessairement que ces deux sous-espaces sont identiques.

Droite vectorielle, plan vectoriel et hyperplan

Définition 8.14 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension non nécessairement finie) et F un sous-espace de E.*

✗ *Le sous-espace F est appelé* **droite vectorielle** *si* $\dim_{\mathbb{K}}(F) = 1$.

✗ *Le sous-espace F est appelé* **plan vectoriel** *si* $\dim_{\mathbb{K}}(F) = 2$.

✗ *En particulier, lorsque E est de dimension $n \geqslant 1$, le sous-espace F est appelé* **hyperplan vectoriel** *si* $\dim_{\mathbb{K}}(F) = n - 1$.

Exemples

1. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par[18]

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

La représentation de F est dite cartésienne. Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in F$. De $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$, il vient $x_3 = x_1 + x_2$. On en déduit

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2) = x_1(1, 0, 1) + x_2(0, 1, 1).$$

Tout vecteur de F s'écrit comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1)$ et $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 1)$, c'est-à-dire $F = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, et les deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ forment une famille libre. Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}}(F) = 2$. Le sous-espace F est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est aussi un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

[18] Voir l'exercice 1 en page 308.

Copyrighted material

2. Soit G le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$G = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2) \text{ où } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

La représentation de G est dite paramétrique. Soit $\boldsymbol{x} \in G$. On a

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2) = x_1(1, 0, 1, 2) + x_2(0, 1, 1, 1).$$

Ainsi $G = \text{Vect}\,(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ avec $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 1, 2)$ et $\boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 1, 1)$, et les deux vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ forment une famille libre. Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}}(G) = 2$. Le sous-espace G est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$, mais ce n'est pas un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

8.4.3 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 8.15 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F}$ une famille* **finie** *constituée de p vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ de E. On appelle* **rang** *de $\mathcal{F}$, et l'on note $rg(\mathcal{F})$, la dimension du sous-espace de E engendré par $\mathcal{F}$. En d'autres termes :*

$$\text{rg}\,(\mathcal{F}) \overset{\text{déf.}}{=} \dim_{\mathbb{K}}\big(\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)\big).$$

La définition du rang d'une famille n'a de sens que pour une famille finie de vecteurs. Comme l'illustre l'exemple donné ci-après, déterminer le rang d'une famille finie $\mathcal{F}$ revient à extraire de $\mathcal{F}$ la plus grande (au sens de l'inclusion) sous-famille libre dans E. Le rang de $\mathcal{F}$ est alors le cardinal de cette sous-famille libre maximale. Remarquons que la famille $\mathcal{F}$ n'est elle-même pas nécessairement libre. Par conséquent,

$$\text{rg}\,(\mathcal{F}) \leqslant \text{card}\,(\mathcal{F}).$$

En particulier, si l'espace E est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriel de E (*a fortiori* le sous-espace engendré par $\mathcal{F}$) est nécessairement de dimension inférieure ou égale à $\dim_{\mathbb{K}}(E)$. Ainsi,

$$\text{rg}\,(\mathcal{F}) \leqslant \min\big\{\dim_{\mathbb{K}}(E), \text{card}\,(\mathcal{F})\big\}.$$

On résume ces résultats dans la proposition suivante.

Proposition 8.13 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ désignent des vecteurs de E alors*

$$\text{rg}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p) \leqslant p.$$

De plus, si E est de dimension finie avec $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$, alors

$$\text{rg}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p) \leqslant \min\big\{n, p\big\}.$$

Copyrighted material

Exemple Dans $\mathbb{R}^4$, la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ où $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 1, 0)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (3, 5, 2, -1)$ est liée puisque $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$. D'après la proposition 8.4, on a

$$\text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \text{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2).$$

Il est facile de vérifier que la sous-famille $\mathcal{F}' = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ est libre. C'est donc une base du sous-espace Vect $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Ainsi

$$\text{rg}\,(\mathcal{F}) = \text{card}\,(\mathcal{F}') = 2.$$

8.4.4 La méthode des zéros échelonnés

Cette méthode est utilisée pour connaître le rang d'une famille $\mathcal{F}$ constituée de vecteurs appartenant à un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie. Commençons par énoncer le résultat suivant qui est une généralisation du résultat de la proposition 8.5 (sa démonstration est laissée en exercice).

Proposition 8.14 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ et $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{u}_r$ des vecteurs de E, où $r \leqslant n$, tels que*

$$\left\{\begin{array}{lccccccccc}
\boldsymbol{u}_1 = & a_{11}\boldsymbol{e}_1 & + & a_{12}\boldsymbol{e}_2 & + & a_{13}\boldsymbol{e}_3 & + \ldots + & a_{1r}\boldsymbol{e}_r & + \ldots + & a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\
\boldsymbol{u}_2 = & & & a_{22}\boldsymbol{e}_2 & + & a_{23}\boldsymbol{e}_3 & + \ldots + & a_{2r}\boldsymbol{e}_r & + \ldots + & a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\
\boldsymbol{u}_3 = & & & & & a_{33}\boldsymbol{e}_3 & + \ldots + & a_{3r}\boldsymbol{e}_r & + \ldots + & a_{3n}\boldsymbol{e}_n \\
\vdots & & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{u}_r = & & & & & & & a_{rr}\boldsymbol{e}_r & + \ldots + & a_{rn}\boldsymbol{e}_n
\end{array}\right.$$

Si $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $\ldots$, $a_{rr} \neq 0$, alors les vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{u}_r$ forment une famille libre dans E et

$$\text{rg}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r) = r.$$

La méthode des « zéros échelonnés » est basée sur le fait que le sous-espace engendré par la famille finie $\mathcal{F}$ est inchangé si l'on effectue sur les vecteurs de $\mathcal{F}$ les opérations suivantes :

- si l'on échange l'ordre des vecteurs,
- si l'on multiplie un vecteur par un scalaire non nul,
- si l'on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs.

La méthode consiste alors à effectuer ces opérations sur les vecteurs de $\mathcal{F}$ de telle sorte que l'on obtienne une nouvelle famille dont les vecteurs non nuls possèdent la propriété de la proposition 8.14. Cette nouvelle famille se prête ainsi mieux au calcul du rang puisqu'elle fait apparaître un système de zéros échelonnés.

Illustrons la méthode sur l'exemple suivant.

Copyrighted material

Exemple Considérons la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ de $\mathbb{R}^4$ avec

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0, -1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 1, 0) \text{ et } \boldsymbol{v}_3 = (3, 5, 2, -1).$$

Commençons par disposer les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ en lignes superposées :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{v}_1 & = & (1, 1, 0, -1) \\ \boldsymbol{v}_2 & = & (1, 2, 1, 0) \\ \boldsymbol{v}_3 & = & (3, 5, 2, -1) \end{array} \right. .$$

Intéressons-nous d'abord à la première colonne, le but étant de faire apparaître des zéros au-dessous du premier élément de la première colonne. On définit les trois vecteurs $\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{v}'_2$, $\boldsymbol{v}'_3$ comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{lcrcl} \boldsymbol{v}'_1 & = & \boldsymbol{v}_1 & = & (1, 1, 0, -1) \\ \boldsymbol{v}'_2 & = & \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 & = & (0, 1, 1, 1) \\ \boldsymbol{v}'_3 & = & \boldsymbol{v}_3 - 3\boldsymbol{v}_1 & = & (0, 2, 2, 2) \end{array} \right. .$$

Le sous-espace engendré par $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ est aussi engendré par $\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{v}'_2$ et $\boldsymbol{v}'_3$, c'est-à-dire $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3)$. Intéressons-nous maintenant à la deuxième colonne et faisons apparaître des zéros au-dessous du deuxième élément. On obtient

$$\left\{ \begin{array}{lcrcl} \boldsymbol{v}''_1 & = & \boldsymbol{v}'_1 & = & (1, 1, 0, -1) \\ \boldsymbol{v}''_2 & = & \boldsymbol{v}'_2 & = & (0, 1, 1, 1) \\ \boldsymbol{v}''_3 & = & \boldsymbol{v}'_3 - 2\boldsymbol{v}'_2 & = & (0, 0, 0, 0) \end{array} \right. .$$

Là encore, l'espace engendré par $\boldsymbol{v}''_1$, $\boldsymbol{v}''_2$ et $\boldsymbol{v}''_3$ est identique à celui engendré par $\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{v}'_2$ et $\boldsymbol{v}'_3$: $\text{Vect}\,(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3) = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}''_1, \boldsymbol{v}''_2, \boldsymbol{v}''_3)$. Nous avons obtenu que $\boldsymbol{v}''_3 = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^4}$ et on vérifie facilement que les deux vecteurs $\boldsymbol{v}''_1$ et $\boldsymbol{v}''_2$ forment une famille libre (ils possèdent la propriété de la proposition 8.14). On en déduit $\text{rg}\,(\boldsymbol{v}''_1, \boldsymbol{v}''_2, \boldsymbol{v}''_3) = 2$. Finalement,

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$$

puisque $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}\,(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \text{rg}\,(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3) = \text{rg}\,(\boldsymbol{v}''_1, \boldsymbol{v}''_2, \boldsymbol{v}''_3)$. On voit ainsi que la famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ est liée et la relation de liaison entre les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ nous est donnée par la méthode des « zéros échelonnés ». En effet,

$$\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^4} = \boldsymbol{v}''_3 = \boldsymbol{v}'_3 - 2\boldsymbol{v}'_2 = (\boldsymbol{v}_3 - 3\boldsymbol{v}_1) - 2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2,$$

d'où

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2.$$

Disposition pratique et méthode systématique

Soit $\mathcal{F} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ une famille constituée de p vecteurs appartenant à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Décomposons chacun des vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_p$ dans une base (quelconque) $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ de E :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{v}_1 & = & a_{11}\,\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\,\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\,\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{v}_2 & = & a_{21}\,\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\,\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\,\boldsymbol{e}_n \\ \vdots & & \\ \boldsymbol{v}_p & = & a_{p1}\,\boldsymbol{e}_1 + a_{p2}\,\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{pn}\,\boldsymbol{e}_n \end{array} \right.$$

Copyrighted material

et disposons les coordonnées de ces p vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ en lignes superposées. On obtient ainsi un tableau à p lignes et n colonnes. Notons $\mathcal{T}_0$ ce tableau :

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & a_{p4} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Par commodité, on convient de noter chacune des trois opérations élémentaires que l'on effectue sur les lignes d'un même tableau comme suit :

- lorsque l'on échange les lignes L_k et $\mathrm{L}_{k'}$, on note :

$$\mathrm{L}_k \longleftrightarrow \mathrm{L}_{k'};$$

- lorsque l'on multiplie la ligne L_k par le scalaire α non nul, on note :

$$\mathrm{L}_k \longleftarrow \alpha \mathrm{L}_k;$$

- lorsque l'on additionne la ligne $\beta \mathrm{L}_{k'}$ (avec $\beta \in \mathbb{R}$) à la ligne L_k, on note :

$$\mathrm{L}_k \longleftarrow \mathrm{L}_k + \beta \mathrm{L}_{k'}.$$

Il est clair que l'écriture du tableau $\mathcal{T}_0$ dépend du choix de la base $\mathcal{B}$ et que ce choix est arbitraire. En effet, au lieu de $\mathcal{B}$, nous pourrions choisir toute autre base obtenue à partir de $\mathcal{B}$ par permutation de ses vecteurs. Un tel choix aurait pour effet une permutation de colonnes dans le tableau $\mathcal{T}_0$. Nous nous autorisons ainsi d'éventuelles permutations de colonnes et pour signifier que l'on échange les colonnes C_k et $\mathrm{C}_{k'}$, on note :

$$\mathrm{C}_k \longleftrightarrow \mathrm{C}_{k'}.$$

Lorsque tous les coefficients du tableau $\mathcal{T}_0$ sont nuls, cela signifie que tous les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ sont nuls. On en déduit alors que le rang de la famille $\mathcal{F}$ est nul. Supposons à présent que les coefficients de $\mathcal{T}_0$ ne soient pas tous nuls. Supposons en particulier que $a_{11} \neq 0$, ce qui est toujours possible en permutant les lignes entre elles et/ou les colonnes entre elles. La première étape consiste, en utilisant les trois opérations élémentaires sur les lignes données ci-dessus, à faire apparaître $p-1$ zéros dans la première colonne au-dessous de a_{11}. On peut procéder à l'élimination simultanée des coefficients $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{p1}$ en effectuant sur les lignes $\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3, \ldots, \mathrm{L}_p$ de $\mathcal{T}_0$ les opérations suivantes[19]

$$\forall \ell \in \{2, \ldots, p\} \quad \mathrm{L}_\ell \longleftarrow \mathrm{L}_\ell - \frac{a_{\ell 1}}{a_{11}} \mathrm{L}_1, \quad (\text{avec } a_{11} \neq 0)$$

[19] Effectuer de telles opérations simultanément est légitime puisque toute ligne modifiée n'est pas utilisée pour modifier une autre ligne.

Copyrighted material

et on dit que l'on a utilisé le coefficient a_{11} comme pivot. À l'issue de cette première étape, on obtient le tableau

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{p2} & a'_{p3} & a'_{p4} & \cdots & a'_{pn} \end{pmatrix}.$$

Si tous les coefficients a'_{ij}, $i \in \{2, \ldots, p\}$, $j \in \{2, \ldots, n\}$ sont nuls alors on peut conclure directement que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 1$. Dans le cas contraire, on doit poursuivre. Supposons que l'on ait $a'_{22} \neq 0$.[20] La deuxième étape consiste à éliminer les $p-2$ coefficients $a'_{32}, \ldots, a'_{p2}$ situés dans la deuxième colonne au-dessous du coefficient a'_{22}, ce qui s'obtient en effectuant sur les lignes $\mathrm{L}_3, \mathrm{L}_4, \ldots, \mathrm{L}_p$ du tableau $\mathcal{T}_1$ les opérations suivantes

$$\forall \ell \in \{3, \ldots, p\} \quad \mathrm{L}_\ell \longleftarrow \mathrm{L}_\ell - \frac{a'_{\ell 2}}{a'_{22}} \mathrm{L}_2. \quad (\text{avec } a'_{22} \neq 0)$$

Cette fois-ci, c'est le coefficient a'_{22} qui a été utilisé comme pivot. À l'issue de cette deuxième étape, on obtient le tableau

$$\mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{p3} & a''_{p4} & \cdots & a''_{pn} \end{pmatrix}.$$

La discussion porte alors sur les coefficients a''_{ij}, $i \in \{3, \ldots, p\}$, $j \in \{3, \ldots, n\}$. S'ils sont tous nuls, on conclut que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$. Sinon, on réitère le processus. Et ainsi de suite jusqu'à l'obtention à l'issue de l'étape r d'un tableau $\mathcal{T}_r$ de la forme

$$\mathcal{T}_r = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & a'_{22} & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rr}^{(r)} & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

où les coefficients $a_{11}, a'_{22}, \ldots, a_{rr}^{(r)}$ sont tous non nuls. Ce sont les pivots. Les coefficients matérialisés par le symbole $*$ sont quelconques. D'après la proposition 8.14, on obtient

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = r.$$

[20] ce qui est bien sûr toujours possible par permutation des lignes entre elles et/ou des colonnes entre elles.

Copyrighted material

En procédant ainsi, on dit que l'on a écrit le tableau $\mathcal{T}_0$ sous une forme échelonnée (celle du tableau $\mathcal{T}_r$).

Exemple Considérons la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ de $\mathbb{R}_4[X]$ où

$$\begin{cases} P_1 &= 1 - X + X^2 + X^3 - X^4 \\ P_2 &= 2 - 2X + 3X^2 + X^4 \\ P_3 &= -1 + X + X^2 + 2X^3 + X^4 \\ P_4 &= -3 + 3X + 2X^2 + X^4 \end{cases}$$

et disposons les coordonnées de chacun des polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 relativement à la base canonique $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3, X^4\right)$ dans le tableau 4×5 suivant

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant sur le tableau $\mathcal{T}_0$ les opérations

$$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \quad \text{et} \quad L_4 \longleftarrow L_4 + 3L_1,$$

on obtient le tableau $\mathcal{T}_1^{\text{int}}$, et en permutant la deuxième et la troisième colonne de $\mathcal{T}_1^{\text{int}}$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_1$:

$$\mathcal{T}_1^{\text{int}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Puis en effectuant sur le tableau $\mathcal{T}_1$ les opérations

$$L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2 \quad \text{et} \quad L_4 \longleftarrow L_4 - 5L_2,$$

on obtient le tableau $\mathcal{T}_2^{\text{int}}$, et en effectuant l'opération $C_3 \longleftrightarrow C_4$ sur $\mathcal{T}_2^{\text{int}}$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_2$:

$$\mathcal{T}_2^{\text{int}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -17 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -17 \end{pmatrix}.$$

Enfin, en effectuant l'unique opération $L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{13}{7}L_3$ sur $\mathcal{T}_2$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_3^{\text{int}}$, et en effectuant l'opération $C_4 \longleftrightarrow C_5$ sur $\mathcal{T}_3^{\text{int}}$, on obtient le tableau $\mathcal{T}_3$:

$$\mathcal{T}_3^{\text{int}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{41}{7} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{41}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

Copyrighted material

La forme échelonnée du dernier tableau $\mathcal{T}_3$ permet alors de conclure :

$$\mathrm{rg}\big(P_1, P_2, P_3, P_4\big) = 4.$$

Exercice 4 *Dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, quel est le rang des familles suivantes ?*
1 - $\mathcal{F}_1 = \big((1,-1,-1),(1,0,-1),(1,1,0)\big)$;
2 - $\mathcal{F}_2 = \big((1,1,0),(3,2,1),(2,-1,3)\big)$;
3 - $\mathcal{F}_3 = \big((-2,1,1,0,2),(1,3,-2,4,4),(-3,2,2,0,0)\big)$;
4 - Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}_4 = \big((b,a,a),(-a,-b,-a),(-a,-a,b)\big).$$

8.5 Somme de sous-espaces vectoriels

Dans certaines situations, il arrive que l'on cherche à décomposer un vecteur $\boldsymbol{x}$ d'un espace vectoriel E non pas par rapport à une base algébrique (c'est-à-dire par rapport à un ensemble *ad'hoc* de vecteurs de E choisis indépendamment du vecteur $\boldsymbol{x}$ considéré) mais plutôt par rapport à certaines catégories de vecteurs. Par exemple, considérons l'ensemble E des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Notons F l'ensemble des applications paires et G l'ensemble des applications impaires :

$$F = \big\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)\big\},$$
$$G = \big\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)\big\}.$$

Il est facile de vérifier que F et G sont tous deux des sous-espaces de E. Il est possible d'écrire toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ comme la somme d'une application paire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et d'une application impaire $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ puisque

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \underbrace{\big(f(x) + f(-x)\big)/2}_{= g(x)} + \underbrace{\big(f(x) - f(-x)\big)/2}_{= h(x)}$$

où g est une application paire puisque $g(x) = g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et h est une application impaire puisque $h(-x) = -h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dit que l'espace E est la somme des deux sous-espaces F et G et on note

$$E = F + G.$$

Cela nous amène à définir de façon plus générale la somme de deux sous-espaces vectoriels.

Copyrighted material

8.5.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 8.16 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace et F, G deux sous-espaces de E.*

✗ *La* **somme** *de F et G est le sous-espace de E, noté $F+G$, défini par*[21]

$$F+G \overset{déf.}{=} \{\boldsymbol{x}_F+\boldsymbol{x}_G \mid \boldsymbol{x}_F \in F, \boldsymbol{x}_G \in G\}.$$

✗ *En particulier, la somme de F et G est dite* **directe** *si*

$$\forall \boldsymbol{x} \in F+G \quad \exists ! \boldsymbol{x}_F \in F \quad \exists ! \boldsymbol{x}_G \in G \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_F+\boldsymbol{x}_G.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}_F$ et $\boldsymbol{x}_G$ sont alors appelés les **composants** *du vecteur $\boldsymbol{x}$ respectivement dans F et dans G et le sous-espace $F+G$ se note $F \oplus G$.*

✗ *Enfin, on dit que F et G sont* **supplémentaires dans** *E si*

$$F \oplus G = E.$$

Pour apprécier pleinement la portée de ces nouvelles définitions, quelques commentaires s'imposent. Effectuer la somme de deux sous-espaces F et G, c'est construire un nouveau sous-espace (que l'on a noté $F+G$) tel que

$$\forall \boldsymbol{x} \in F+G \quad \exists \boldsymbol{x}_F \in F \quad \exists \boldsymbol{x}_G \in G \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_F+\boldsymbol{x}_G.$$

Bien entendu, les deux vecteurs $\boldsymbol{x}_F \in F$ et $\boldsymbol{x}_G \in G$ dépendent[22] du vecteur $\boldsymbol{x}$. Ainsi, pour n'importe quel vecteur $\boldsymbol{x}$ appartenant à $F+G$, l'existence d'une telle décomposition est assurée. En revanche, rien n'est dit sur son unicité. On apprécie maintenant pleinement

- la définition d'une somme directe (qui nous assure l'unicité) ;
- celle de deux sous-espaces supplémentaires dans E (qui nous assure l'existence et l'unicité pour n'importe quel vecteur de l'espace E tout entier).

Remarques

1. F et G sont eux-mêmes deux sous-espaces du sous-espace $F+G$.

2. On peut montrer[23] que tout sous-espace d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E possède au moins un supplémentaire dans E. Ce dernier résultat est une conséquence directe du théorème 8.1 de la base incomplète.

[21] On vérifie sans peine que l'ensemble $F+G$ est bien un sous-espace vectoriel de E (cela se déduit du fait que F et G sont eux-mêmes des sous-espaces de E). Remarquons que le sous-espace $F+G$ n'a aucune raison d'être l'espace E tout entier.

[22] À ce propos, remarquons que lorsqu'on décompose un vecteur $\boldsymbol{x}$ par rapport à une base algébrique de E, disons $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$, ce sont les coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ qui dépendent du vecteur $\boldsymbol{x}$ et non pas les vecteurs de la base (ceux-ci ayant été choisis indépendamment du vecteur $\boldsymbol{x}$ considéré).

[23] La démontration est admise.

Copyrighted material

Si l'espace E est de dimension finie alors on a le résultat suivant.

Proposition 8.15 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. Si F et G sont* **supplémentaires** *dans E alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G).$$

Démonstration Notons $p = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ et $q = \dim_{\mathbb{K}}(G)$. Soient $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{f}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (\boldsymbol{g}_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ une base de G. Puisque F et G sont supplémentaires dans E,

$$\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \exists ! \, \boldsymbol{x}_F \in F \quad \exists ! \, \boldsymbol{x}_G \in G \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}_F$ et $\boldsymbol{x}_G$ appartenant respectivement à F et à G,

$$\exists ! \, (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \quad \boldsymbol{x}_F = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{f}_p,$$
$$\exists ! \, (\beta_1, \ldots, \beta_q) \in \mathbb{K}^q \quad \boldsymbol{x}_G = \beta_1 \boldsymbol{g}_1 + \ldots + \beta_q \boldsymbol{g}_q.$$

On obtient ainsi pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E l'existence et l'unicité d'un $(p+q)$-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q)$ de $\mathbb{K}^{p+q}$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{f}_p + \beta_1 \boldsymbol{g}_1 + \ldots + \beta_q \boldsymbol{g}_q.$$

On en déduit alors, d'après la proposition 8.9, que la réunion des deux familles $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ constitue une base de l'espace E, et donc que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$. □

Remarques

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Il vient immédiatement de la proposition 8.15 qu'un supplémentaire d'un hyperplan vectoriel est une droite vectorielle.

2. On vérifie que tout sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$ contient nécessairement $F + G$. Ainsi, la somme $F + G$ s'avère être le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$. En d'autres termes :

$$\text{Vect}\,(F \cup G) = F + G.$$

De cette caractérisation, on en déduit l'implication :

$$F \subset G \quad \Longrightarrow \quad F + G = G.$$

Puisque l'union de deux ensembles est commutative, on en déduit que la somme est commutative : $F + G = G + F$.

Copyrighted material

Quelle condition F et G doivent-ils remplir pour que la somme $F+G$ soit directe ?

Pour répondre à cette question, supposons que $\boldsymbol{x} \in F+G$ et qu'il existe $(\boldsymbol{x}_F, \boldsymbol{x}_G) \in F \times G$ tel que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$ d'une part, et qu'il existe $(\boldsymbol{y}_F, \boldsymbol{y}_G) \in F \times G$ tel que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_F + \boldsymbol{y}_G$ d'autre part. On a ainsi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G = \boldsymbol{y}_F + \boldsymbol{y}_G$, d'où

$$\underbrace{\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{y}_F}_{\in F} = \underbrace{\boldsymbol{y}_G - \boldsymbol{x}_G}_{\in G}$$

avec $\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{y}_F \in F$ et $\boldsymbol{y}_G - \boldsymbol{x}_G \in G$ (puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E). L'égalité entre deux éléments, l'un appartenant à F, l'autre appartenant à G, implique nécessairement que ces deux éléments appartiennent à l'intersection de F et G :

$$\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{y}_F \in F \cap G \quad \text{et} \quad \boldsymbol{y}_G - \boldsymbol{x}_G \in F \cap G.$$

Il s'en déduit l'unicité de la décomposition (c'est-à-dire $\boldsymbol{x}_F = \boldsymbol{y}_F$ et $\boldsymbol{x}_G = \boldsymbol{y}_G$) à la condition que l'intersection des deux sous-espaces F et G soit réduite au vecteur nul, c'est-à-dire à la condition que $F \cap G = \{\boldsymbol{0}_E\}$.

La condition $F \cap G = \{\boldsymbol{0}_E\}$ apparaît ainsi comme une condition suffisante assurant l'unicité. Elle est également nécessaire. Pour le prouver, on utilise un raisonnement par contraposée : on suppose que $F \cap G \neq \{\boldsymbol{0}_E\}$ et on montre que la décomposition d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de $F+G$ n'est alors pas unique. Soient $\boldsymbol{x}_F \in F$ et $\boldsymbol{x}_G \in G$ tels que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G$. Puisque $F \cap G \neq \{\boldsymbol{0}_E\}$, il existe alors un vecteur non nul, que l'on note $\boldsymbol{w}$, appartenant à $F \cap G$ et on peut écrire

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{x}_G = \underbrace{\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{w}}_{\in F} + \underbrace{\boldsymbol{x}_G - \boldsymbol{w}}_{\in G}$$

avec $\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{w} \in F$, $\boldsymbol{x}_G - \boldsymbol{w} \in G$ (puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E) et

$$(\boldsymbol{x}_F, \boldsymbol{x}_G) \neq (\boldsymbol{x}_F + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}_G - \boldsymbol{w})$$

car $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}_E$, ce qui montre que tout vecteur de $F+G$ peut se décomposer sur F et G de deux manières distinctes.

On a ainsi trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que la somme des deux sous-espaces F et G soit directe. On peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 8.16 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace et F, G deux sous-espaces de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que la somme de F et G soit* **directe** *est que leur intersection soit réduite au vecteur nul, c'est-à-dire :*

$$F \cap G = \{\boldsymbol{0}_E\}.$$

On déduit de la proposition 8.16 le corollaire suivant.

Copyrighted material

Corollaire 8.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace et F, G deux sous-espaces de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux sous-espaces F et G soient* **supplémentaires dans** *E est que d'une part la somme de F et G soit égale à E et que d'autre part l'intersection de F et G soit réduite au vecteur nul. Autrement dit,*

$$E = F \oplus G \iff \Big(E = F + G \quad et \quad F \cap G = \{\mathbf{0}_E\} \Big).$$

Illustrons ces résultats par quelques exemples.

Exemples

1. La seule application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire est l'application nulle (voir p. 309). En notant F l'ensemble des applications paires et G l'ensemble des applications impaires, on a ainsi

$$F \cap G = \big\{x \in \mathbb{R} \longmapsto 0 \in \mathbb{R}\big\}.$$

De plus, il a été établi que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pouvait s'écrire comme la somme d'une application paire et d'une application impaire, c'est-à-dire que $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F + G$. D'après le corollaire 8.3, on en déduit que les deux sous-espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, autrement dit que

$$\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G.$$

2. Considérons dans l'espace $\mathbb{R}^3$ les plans vectoriels F et G définis par

$$F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}\},$$
$$G = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} = \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Déterminons $F + G$. Soient $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, 0) \in F$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, 0, y_3) \in G$. On a $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2, y_3)$. En particulier, lorsque $y_1 = 0$ et lorsque x_1, x_2 et y_3 parcourent $\mathbb{R}$, le vecteur $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ décrit tout l'espace $\mathbb{R}^3$. On a donc

$$F + G = \mathbb{R}^3.$$

De plus, on vérifie facilement que

$$F \cap G = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1 \quad \text{où} \quad \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0).$$

Ainsi, la somme $F + G$ n'est pas directe et, *a fortiori*, les deux sous-espaces F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. Toujours dans l'espace $\mathbb{R}^3$, considérons les droites vectorielles $F = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1$ et $G = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_2$ où $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$ et $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$. On vérifie que

$$F \cap G = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}.$$

La somme de F et G est donc directe. On note $F \oplus G$ au lieu de $F + G$. Soient $\boldsymbol{x} = (x_1, 0, 0) \in F$ et $\boldsymbol{y} = (0, y_2, 0) \in G$. On a $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, y_2, 0)$. Ainsi lorsque

Copyrighted material

x_1 et y_2 parcourent $\mathbb{R}$, le vecteur $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ décrit le plan vectoriel $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}$, d'où

$$F\oplus G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{0\}.$$

Remarquons que $F\oplus G\neq\mathbb{R}^3$: les deux sous-espaces F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

8.5.2 Cas d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 8.2 (de Grassmann) *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. On a*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G)=\dim_{\mathbb{K}}(F)+\dim_{\mathbb{K}}(G)-\dim_{\mathbb{K}}(F\cap G).$$

Démonstration Notons H le supplémentaire de $F\cap G$ dans G. On a

$$(F\cap G)\oplus H=G.$$

Remarquons que le sous-espace H est lui-même un sous-espace de $F+G$ puisque $H\subset G$ et $G\subset F+G$. Vérifions à présent que F et H sont supplémentaires dans $F+G$, c'est-à-dire que $F+G=F\oplus H$.

$\trianglerighteq$ Commençons par montrer que $F+G=F+H$. Soit $\boldsymbol{x}\in F+G$. Il existe $(\boldsymbol{x}_F,\boldsymbol{x}_G)\in F\times G$ tel que

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_F+\boldsymbol{x}_G.$$

De même, puisque $G=(F\cap G)\oplus H$, il existe $(\boldsymbol{x}_{F\cap G},\boldsymbol{x}_H)\in(F\cap G)\times H$ tel que

$$\boldsymbol{x}_G=\boldsymbol{x}_{F\cap G}+\boldsymbol{x}_H.$$

On en déduit

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_F+\boldsymbol{x}_G=\underbrace{\boldsymbol{x}_F+\boldsymbol{x}_{F\cap G}}_{\in F}+\underbrace{\boldsymbol{x}_H}_{\in H}$$

avec $\boldsymbol{x}_F+\boldsymbol{x}_{F\cap G}\in F$ car $F\cap G\subset F$. Donc $F+G\subset F+H$. Réciproquement, de $H\subset G$ on déduit $F+H\subset F+G$. Finalement,

$$F+G=F+H.$$

Montrons maintenant que $F\cap H=\{\mathbf{0}_E\}$. Soit $\boldsymbol{x}\in F\cap H$. On a $\boldsymbol{x}\in F$ et $\boldsymbol{x}\in H$. On en déduit $\boldsymbol{x}\in F\cap G$ car $H\subset G$. Ainsi le vecteur $\boldsymbol{x}$ appartient à la fois à $F\cap G$ et à H. On en déduit alors $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_E$ car les deux sous-espaces $F\cap G$ et H étant supplémentaires dans G, leur intersection est réduite au vecteur nul.

$\trianglerighteq$ On a donc obtenu que $F+G=F+H$ et $F\cap H=\{\mathbf{0}_E\}$, c'est-à-dire (d'après le corollaire 8.3) que $F+G=F\oplus H$. En passant aux dimensions, on en déduit (d'après la proposition 8.15)

$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G)=\dim_{\mathbb{K}}(F)+\dim_{\mathbb{K}}(H). \tag{3}$$

Copyrighted material

Or puisque $(F \cap G) \oplus H = G$, on a aussi (d'après la proposition 8.15)

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) + \dim_{\mathbb{K}}(H) = \dim_{\mathbb{K}}(G),$$

c'est-à-dire,

$$\dim_{\mathbb{K}}(H) = \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G). \tag{4}$$

En combinant les égalités (3) et (4), on obtient

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G),$$

ce qui termine la démonstration. □

GRASSMANN, Hermann Günther (1809, Stettin en Prusse - 1877, Stettin).

Mathématicien autodidacte, c'est en s'intéressant au phénomène des marées qu'il a développé le calcul vectoriel et défini le concept (nouveau pour l'époque) d'espace vectoriel de dimension supérieure à 3. Publiés pour la première fois en 1844 dans un premier traité intitulé *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, puis dans un second traité en 1862, ses travaux eurent en fait peu de succès car trop confus, et il faudra attendre Giuseppe Peano pour formaliser plus clairement la notion d'espace vectoriel. C'est à l'âge de 53 ans, déçu par le manque d'intérêt que portait la communauté mathématique de son temps à ses idées pourtant novatrices, que Grassmann se consacra à l'étude du Sanskrit.

Une conséquence immédiate du thèorème de Grassmann est que si F et G sont deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie tels que $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$ alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G).$$

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les deux plans vectoriels $F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ et $G = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. On a vu que $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1$ et on vérifie

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F+G)}_{=3} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F)}_{=2} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(G)}_{=2} - \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F \cap G)}_{=1}.$$

2. Soient $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ et $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$. La somme des deux droites vectorielles $F = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1$ et $G = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_2$ est directe dans $\mathbb{R}^3$. On a vu que $F \oplus G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ et on vérifie

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F \oplus G)}_{=2} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F)}_{=1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(G)}_{=1}.$$

Copyrighted material

Le résultat suivant donne une condition suffisante qui s'avère très pratique pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires dans E dans le cas où E est de dimension finie.

Corollaire 8.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. On a l'implication*

$$\Big(\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \quad et \quad F \cap G = \{\mathbf{0}_E\} \Big) \implies F \oplus G = E.$$

Démonstration Grâce au théorème de Grassmann, on a équivalence entre l'égalité $\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ et l'égalité

$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G) + \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = \dim_{\mathbb{K}}(E). \tag{5}$$

Utilisons l'hypothèse : $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$. D'après la proposition 8.16, la somme $F+G$ est directe. Le sous-espace $F+G$ se note ainsi $F \oplus G$. De l'égalité (5) il vient

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

D'après la proposition 8.12, puisque $F \oplus G$ est un sous-espace de E, de l'égalité des dimensions on déduit l'égalité ensembliste $F \oplus G = E$. □

Remarque D'après la démonstration donnée ci-dessus, il est clair que l'on a aussi l'implication

$$\Big(\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \quad \text{et} \quad F + G = E \Big) \implies F \oplus G = E.$$

Exemple Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la droite vectorielle $\mathbb{R}\boldsymbol{u}$ et le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.[24] On suppose que $\boldsymbol{u} \notin \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. On vérifie

$$\mathbb{R}\boldsymbol{u} \cap \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Par conséquent, de l'égalité

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\boldsymbol{u})}_{=1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}))}_{=2} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)}_{=3}$$

on déduit que $\mathbb{R}\boldsymbol{u}$ et $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, ce que l'on note

$$\mathbb{R}\boldsymbol{u} \oplus \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \mathbb{R}^3.$$

[24] Rappelons qu'un plan vectoriel est, par définition, un sous-espace de dimension 2. Ainsi, dire que $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est un plan vectoriel, c'est supposer implicitement que les deux vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ forment une famille libre.

Copyrighted material

Exercice 5 *Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :*

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}\left((1,2,0,1),(2,1,3,1),(2,4,0,2)\right), \\ G &= \text{Vect}\left((1,2,1,0),(-1,1,1,1),(2,-1,0,1)\right). \end{aligned}$$

1 - Calculer $\dim_{\mathbb{R}}(F)$, $\dim_{\mathbb{R}}(G)$; trouver une base de F et une base de G.
2 - Déterminer une base de $F+G$ et une base de $F \cap G$.

8.6 Exercices de synthèse

Exercice 6 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies (non nécessairement égales) munis de leurs bases respectives $\mathcal{B}_E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ et $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_{E\times F}$ définie par*

$$\mathcal{B}_{E\times F} \overset{\text{déf.}}{=} \Big((\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{0}_F), \ldots, (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{0}_F), (\boldsymbol{0}_E, \boldsymbol{f}_1), \ldots, (\boldsymbol{0}_E, \boldsymbol{f}_m)\Big)$$

est une base de l'espace produit $E \times F$ et en déduire que

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Exercice 7 *Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts.*
1 - On considère les polynômes L_0, L_1, …, L_n de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\forall i \in \{0,1,\ldots,n\} \quad \widetilde{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ces polynômes s'appellent polynômes caractéristiques (de Lagrange) *associés aux nœuds x_0, x_1, …, x_n. Montrer que L_0, L_1, …, L_n forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Étant donnée une application $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, on note Π_f l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que*

$$\widetilde{\Pi}_f(x_0) = f(x_0), \quad \ldots, \quad \widetilde{\Pi}_f(x_n) = f(x_n).$$

Le polynôme Π_f s'appelle polynôme d'interpolation (de Lagrange) *de f aux nœuds x_0, x_1, …, x_n.*
2 - Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On désigne par F l'ensemble des applications $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \ldots = \varphi(x_n) = 0,$$

et par G l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. Montrer que F et G sont deux sous-espaces de E, puis montrer que

$$E = F \oplus G.$$

Copyrighted material

8.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Soient $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_1)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_1)$ deux vecteurs de F et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$ et on vérifie

$$\begin{aligned} &-(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) \\ &= \alpha(-x_1 - x_2 + x_3) + \beta(-y_1 - y_2 + y_3) \ = \ 0 \end{aligned}$$

car $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ($\boldsymbol{x} \in F$) et $-y_1 - y_2 + y_3 = 0$ ($\boldsymbol{y} \in F$), ce qui montre que le vecteur $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ appartient à F.

2 - Soient $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ un premier vecteur de G, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_1 + y_2, 2y_1 + y_2)$ avec $y_1 \in \mathbb{R}$ et $y_2 \in \mathbb{R}$ un deuxième vecteur de G et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} &\alpha(x_1, x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2) + \beta(y_1, y_2, y_1 + y_2, 2y_1 + y_2) \\ &= (z_1, z_2, z_1 + z_2, 2z_1 + z_2) \end{aligned}$$

avec $z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1$ et $z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2$, ce qui montre que le vecteur $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ appartient à G.

Solution de l'exercice 2

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ les applications $x \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(\alpha_k x) \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(\alpha_k x) \in \mathbb{R}$ sont des applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles appartiennent ainsi au sous-espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1 - On procède en deux étapes.

$\trianglerighteq$ On commence par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F}_n = (f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre. On procède par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est immédiat. En effet de l'égalité $\lambda_0 f_0 = 0$, c'est-à-dire de l'égalité $\lambda_0 \exp(\alpha_0 x) = 0$ vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit que $\lambda_0 = 0$. Supposons à présent la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire montrons l'implication

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \exp(\alpha_k x) = 0 \Big) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_0 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0.$$

De la relation

$$\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k \exp(\alpha_k x) = 0 \tag{6}$$

vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \exp\Big((\alpha_k - \alpha_{n+1})x\Big).$$

Copyrighted material

De plus, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a $\lim_{x \to +\infty} \exp[(\alpha_k - \alpha_{n+1})x] = 0$ puisque $\alpha_k < \alpha_{n+1}$ pour tout k compris entre 0 et n (la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante). On en déduit que $\lambda_{n+1} = 0$ par passage à la limite. La relation (6) se simplifie alors en

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \exp(\alpha_k x) = 0$$

dont on déduit que $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$ grâce à l'hypothèse de récurrence.

$\trianglerighteq$ Pour toute sous-famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}_\infty$, il existe une famille finie de la forme $\mathcal{F}_n$ telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_n$. Or, nous venons de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F}_n$ était libre. Ainsi, toute famille finie $\mathcal{F}$ est sous-famille d'une famille libre. Puisque toute sous-famille d'une famille libre est libre (voir proposition 8.7), on en déduit que $\mathcal{F}$ est libre.

$\trianglerighteq$ En résumé, nous avons montré que la famille infinie $\mathcal{F}_\infty$ était libre puisque toutes ses sous-familles finies sont libres.

2 - Comme pour la question précédente, on procède en deux étapes. Seule la première étape est présentée. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ des réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_0 \sin(\alpha_0 x) + \ldots + \lambda_n \sin(\alpha_n x) + \lambda_{n+1} \sin(\alpha_{n+1} x) = 0. \tag{7}$$

En dérivant deux fois on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\lambda_0 \alpha_0^2 \sin(\alpha_0 x) - \ldots - \lambda_n \alpha_n^2 \sin(\alpha_n x) - \lambda_{n+1} \alpha_{n+1}^2 \sin(\alpha_{n+1} x) = 0. \tag{8}$$

En multipliant l'égalité (7) par α_{n+1}^2, puis en additionnant avec l'égalité (8), on trouve pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha_{n+1}^2 - \alpha_0^2)\lambda_0 \sin(\alpha_0 x) + \ldots + (\alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2)\lambda_n \sin(\alpha_n x) = 0.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$(\alpha_{n+1}^2 - \alpha_0^2)\lambda_0 = \ldots = (\alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2)\lambda_n = 0,$$

puis $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$ car $\alpha_{n+1} \neq \alpha_k$ pour tout k compris entre 0 et n. Finalement, en injectant ces résultats dans l'égalité (7), on obtient que $\lambda_{n+1} \sin(\alpha_{n+1} x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\lambda_{n+1} = 0$.

Solution de l'exercice 3

1 - On note $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 1$ car

$$(1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

2 - L'espace $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, il suffit de vérifier que la famille $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ est libre, autrement dit que la relation de liaison $\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 + \gamma \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^3}$ implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La relation de liaison s'écrit

$$\alpha(1, 1, 2) + \beta(1, -1, 0) + \gamma(0, 0, -1) = (0, 0, 0),$$

Copyrighted material

autrement dit $(\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha-\gamma) = (0,0,0)$, et par identification

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 0 \\ \alpha-\beta &= 0 \\ 2\alpha-\gamma &= 0 \end{cases}$$

dont on déduit facilement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

3 - Notons x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la nouvelle base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. On a $\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + x'_3\boldsymbol{u}_3$. D'après la question 1, on a aussi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. Exprimons les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ en fonction des vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$. Puisque $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,-1,0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0,0,-1)$, on a

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{e}_3.$$

On en déduit

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_3 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2), \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{u}_3 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{u}_3.$$

On obtient ainsi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$. Puisque $\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + x'_3\boldsymbol{u}_3$, par identification, on trouve $x'_1 = 1$, $x'_2 = 0$ et $x'_3 = 1$.

Solution de l'exercice 4

1 - Soit $\mathcal{F}_1 = \big((1,-1,-1),(1,0,-1),(1,1,0)\big)$. En effectuant successivement à partir du tableau $\mathcal{T}_0$ les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ (étape 1), puis $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$ (étape 2), on obtient les tableaux $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ suivants

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

On déduit du tableau $\mathcal{T}_2$ que $\operatorname{rg}(\mathcal{F}_1) = 3$.

2 - Soit $\mathcal{F}_2 = \big((1,1,0),(3,2,1),(2,-1,3)\big)$ En effectuant successivement à partir du tableau $\mathcal{T}_0$ les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$ (étape 1), puis $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2$ (étape 2), on obtient les tableaux $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ suivants

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On déduit du tableau $\mathcal{T}_2$ que $\operatorname{rg}(\mathcal{F}_2) = 2$. Remarquons que la dernière ligne du tableau $\mathcal{T}_2$ est nulle. Il s'en déduit la relation liant les trois vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,2,1)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,3)$, en effectuant à l'envers les opérations utilisées pour aboutir à ce résultat. En effectuant à partir de l'égalité

$$L_3 = 0$$

Copyrighted material

l'opération $L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_2$ (opération inverse de celle effectuée à l'étape 2), on obtient

$$L_3 - 3L_2 = 0,$$

puis en effectuant à partir de cette égalité les deux opérations $L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1$ (opérations inverses de celles effectuées à l'étape 1), on obtient

$$(L_3 - 2L_1) - 3(L_2 - 3L_1) = 0,$$

c'est-à-dire $L_3 = -7L_1 + 3L_2$. On obtient ainsi la relation de liaison

$$\boldsymbol{v}_3 = -7\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2.$$

3 - Soit $\mathcal{F}_3 = \big((-2,1,1,0,2),(1,3,-2,4,4),(-3,2,2,0,0)\big)$. En effectuant successivement à partir du tableau $\mathcal{T}_0$ (où nous avons choisi de permuter directement les deux premiers vecteurs)

$$\mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1$ (étape 1), puis l'opération $L_3 \longleftarrow 7L_3 - 11L_2$ (étape 2), on obtient les tableaux

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & 8 & 10 \\ 0 & 11 & -4 & 12 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & \boxed{7} & -3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -4 & -26 \end{pmatrix}.$$

On déduit du tableau $\mathcal{T}_2$ que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_3) = 3$.

4 - Soit $\mathcal{F}_4 = \big((b,a,a),(-a,-b,-a),(-a,-a,b)\big)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Il est clair que si $a = 0$ alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_4) = 3$ si $b \neq 0$ et $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_4) = 0$ si $b = 0$. Supposons à présent $a \neq 0$. Par commodité, commençons par multiplier la deuxième ligne et la troisième ligne du tableau $\mathcal{T}_0^{\mathrm{int}}$ par -1, puis permutons la première ligne et la troisième ligne. On obtient le tableau $\mathcal{T}_0$:

$$\mathcal{T}_0^{\mathrm{int}} = \begin{pmatrix} b & a & a \\ -a & -b & -a \\ -a & -a & b \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} a & a & -b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{pmatrix}.$$

En effectuant successivement à partir de $\mathcal{T}_0$ les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longleftarrow aL_3 - bL_1$ (cette opération est permise puisque l'on a supposé a non nul) ; puis $L_3 \longleftarrow L_3 + aL_2$ (étape 2), on obtient les tableaux $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ suivants

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} a & a & -b \\ 0 & b-a & a+b \\ 0 & a^2-ba & a^2+b^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} a & a & -b \\ 0 & b-a & a+b \\ 0 & 0 & 2a^2+ab+b^2 \end{pmatrix}.$$

Le discriminant Δ du trinôme $P(b) = b^2 + ab + 2a^2$ est strictement négatif puisque $\Delta = -7a^2$ avec $a \neq 0$. On en déduit $P(b) \neq 0$ pour tout $b \in \mathbb{R}$. On déduit alors du tableau $\mathcal{T}_2$ que si $a \neq 0$ alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_4) = 3$ si $b \neq a$, et $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_4) = 2$ si $b = a$.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 5

1 - On note $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,0,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2,1,3,1)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (2,4,0,2)$. La famille $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ est liée puisque $2\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_3$, et on vérifie facilement que les deux vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ forment une famille libre. Une base de F est $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, d'où $\dim_{\mathbb{R}}(F) = 2$: le sous-espace F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de F. Il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 = (a+2b, 2a+b, 3b, a+b).$$

On en déduit la représentation paramétrique de F :

$$F = \big\{(a+2b, 2a+b, 3b, a+b) \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\big\}.$$

On note $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,1,1,1)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,0,1)$. On vérifie facilement que la famille $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ est libre. Une base de G est $\mathcal{B}_G = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ et $\dim_{\mathbb{R}}(G) = 3$: le sous-espace G est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vecteur de G. Il existe un unique triplet $(c,d,e) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{v}_1 + d\boldsymbol{v}_2 + e\boldsymbol{v}_3$, c'est-à-dire tel que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (c - d + 2e, 2c + d - e, c + d, d + e)$$

et on vérifie que

$$\underbrace{(2c+d-e)}_{=x_2} - 2\underbrace{(c+d)}_{=x_3} + \underbrace{(d+e)}_{=x_4} = 0.$$

On en déduit la représentation cartésienne de G :

$$G = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\big|\; x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\big\}.$$

2 - On a : $F + G = \text{Vect}\,(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$. Remarquons que le sous-espace $F+G$ est nécessairement de dimension inférieure ou égale à 4 car c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$. Les vecteurs $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ forment une famille libre (cela se vérifie facilement en utilisant la méthode des zéros échelonnés), d'où $\dim_{\mathbb{R}}(F+G) = 4$. Le sous-espace $F + G$ est donc l'espace $\mathbb{R}^4$ tout entier et une base de $F + G$ est, par exemple, $\mathcal{B}_{F+G} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$. D'après le théorème de Grassmann,

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F+G)}_{=4} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(F)}_{=2} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(G)}_{=3} - \dim_{\mathbb{R}}(F \cap G),$$

d'où $\dim_{\mathbb{R}}(F \cap G) = 1$: le sous-espace $F \cap G$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^4$. Pour obtenir la représentation paramétrique de $F \cap G$, la méthode consiste à injecter la représentation paramétrique de F dans celle de G. Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vecteur de $F \cap G$:

$$\exists!\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x_1 &= a + 2b \\ x_2 &= 2a + b \\ x_3 &= 3b \\ x_4 &= a + b \end{cases} \quad \text{et} \quad x_2 - 2x_3 + x_4 = 0.$$

Copyrighted material

On a ainsi $(2a+b)-2(3b)+(a+b)=0$, c'est-à-dire $3a-4b=0$ ou encore $b=3a/4$. On en déduit

$$\begin{cases} x_1 &= 5a/2 \\ x_2 &= 11a/4 \\ x_3 &= 9a/4 \\ x_4 &= 7a/4 \end{cases}$$

La représentation paramétrique de $F \cap G$ s'écrit

$$F \cap G = \big\{(5a/2, 11a/4, 9a/4, 7a/4) \text{ où } a \in \mathbb{R}\big\}$$

et une base de $F \cap G$ est, par exemple, $\mathcal{B}_{F\cap G} = (\boldsymbol{w})$ avec $\boldsymbol{w} = (10, 11, 9, 7)$ (que l'on obtient en prenant $a = 4$). On écrit alors $F \cap G = \mathbb{R}\boldsymbol{w}$.

Solution de l'exercice 6

1 - Montrons que $\mathcal{B}_{E\times F}$ est libre dans $E \times F$. Soit la relation de liaison :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{0}_F) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\boldsymbol{0}_E, \boldsymbol{f}_i) = (\boldsymbol{0}_E, \boldsymbol{0}_F)$$

qui s'écrit $\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{f}_i\Big) = (\boldsymbol{0}_E, \boldsymbol{0}_F)$. Par identification, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}_E \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{0}_F.$$

On déduit de l'égalité de gauche que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ car $\mathcal{B}_E$ est libre dans E. De même, on déduit de l'égalité de droite que $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$ car $\mathcal{B}_F$ est libre dans F. Montrons maintenant que $\mathcal{B}_{E\times F}$ est génératrice de $E \times F$. Soit $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ un élément de $E \times F$. Puisque la famille $\mathcal{B}_E$ est une base de E, elle engendre E. Ainsi,

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n.$$

De même, puisque $\mathcal{B}_F$ est une base de F, elle engendre F. Ainsi,

$$\exists(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{K}^m \quad \boldsymbol{x}_2 = \mu_1 \boldsymbol{f}_1 + \mu_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + \mu_n \boldsymbol{f}_m.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{f}_i\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{0}_F\Big) + \Big(\boldsymbol{0}_E, \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{f}_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{0}_F) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\boldsymbol{0}_E, \boldsymbol{f}_i), \end{aligned}$$

ce qui montre que tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de $E \times F$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_{E\times F}$, ce qui montre que la famille $\mathcal{B}_{E\times F}$ est génératrice de $E \times F$.

Copyrighted material

2 - On a $\text{card}\,(\mathcal{B}_{E\times F}) = n+m = \text{card}\,(\mathcal{B}_E) + \text{card}\,(\mathcal{B}_F)$. D'après la question précédente, la famille $\mathcal{B}_{E\times F}$ est une base de $E\times F$. On a donc

$$\text{card}\,(\mathcal{B}_{E\times F}) = \dim_{\mathbb{K}}(E\times F),$$

d'où

$$\dim_{\mathbb{K}}(E\times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Solution de l'exercice 7

1 - Rappelons que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Ainsi, pour montrer que les polynômes caractéristiques L_0, L_1, ..., L_n forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de vérifier que ces $n+1$ polynômes forment une famille libre dans $\mathbb{R}_n[X]$, autrement dit que

$$\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_n L_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Supposons que $\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_n L_n = 0$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha_0 \widetilde{L}_0(x) + \alpha_1 \widetilde{L}_1(x) + \ldots + \alpha_n \widetilde{L}_n(x) = 0. \tag{9}$$

Soit $\ell \in \{0,1,\ldots,n\}$. Considérons en particulier $x = x_\ell$. On a $\widetilde{L}_i(x_\ell) = 0$ pour tout entier $i \in \{0,1,\ldots,n\} \setminus \{\ell\}$, et $\widetilde{L}_\ell(x_\ell) = 1$. Par conséquent, en prenant $x = x_\ell$ dans (9) on obtient $\alpha_\ell = 0$. En répétant ce raisonnement pour tout $\ell \in \{0,1,\ldots,n\}$, on obtient $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$.

2 - Montrons que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Il est clair que G est un sous-espace de E puisque $G = \mathbb{R}_n[X]$. Soit φ et ψ deux éléments de F et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$,

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(x_i) = \alpha\varphi(x_i) + \beta\psi(x_i) = 0$$

car $\varphi(x_i) = 0 = \psi(x_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$ ($\varphi \in F$ et $\psi \in F$), ce qui montre bien que F est un sous-espace de E. Montrons à présent que : $E = F \oplus G$. Soit $f \in E$. On sait, d'après la question 1, qu'il existe un unique polynôme $\widetilde{\Pi}_f \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\widetilde{\Pi}_f(x_0) = f(x_0)$, ..., $\widetilde{\Pi}_f(x_n) = f(x_n)$. C'est le polynôme de Lagrange associé aux nœuds x_0, x_1, ..., x_n. On peut donc écrire

$$f = (f - \widetilde{\Pi}_f) + \widetilde{\Pi}_f$$

et on vérifie que $f - \widetilde{\Pi}_f \in F$ puisque

$$(f - \widetilde{\Pi}_f)(x_0) = 0, \quad (f - \widetilde{\Pi}_f)(x_1) = 0, \quad \ldots, \quad (f - \widetilde{\Pi}_f)(x_n) = 0.$$

On a ainsi vérifié que tout $f \in E$ s'écrivait comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. La vérification de $F \cap G = \{x \in \mathbb{R} \longmapsto 0 \in \mathbb{R}\}$ est immédiate. En effet, considérons un élément P de $F \cap G$. Cela signifie que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui s'annule en $n+1$ points, ce qui impose que P soit le polynôme nul.

Copyrighted material

Copyrighted material

CHAPITRE 9

Les applications linéaires

9.1 Application linéaire

9.1.1 Définition d'une application linéaire

Dans cette partie, E et F désignent deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Ces deux espaces ont des dimensions quelconques (finies ou infinies) et non nécessairement égales.

- On note $+_E$ la loi interne et $\cdot_E$ la loi externe définies sur E.
- De même, on note $+_F$ la loi interne et $\cdot_F$ la loi externe définies sur F.

Lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté sur les espaces sur lequels ces lois opèrent, nous les noterons plus simplement $+$ et $\cdot$ afin d'alléger les écritures.

Commençons par une définition.

Définition 9.1 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle* **application linéaire de E vers F** *toute application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant*

1. $\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \forall \boldsymbol{x}' \in E \quad f(\boldsymbol{x} +_E \boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) +_F f(\boldsymbol{x}')$,
2. $\forall \boldsymbol{x} \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x})$.

Une application linéaire est encore appelée **morphisme d'espaces vectoriels**. *On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*[1] *On appelle* **forme linéaire** *une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace E dans $\mathbb{K}$.*

Remarque La première relation traduit le fait que f est un morphisme de groupe additif de $(E, +_E)$ dans $(F, +_F)$.[2] En particulier, on a

$$f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$$

et on dit que f transporte le neutre. Pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E, on a

$$f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$$

et on dit que f transporte le symétrique (voir à ce propos l'exercice 7, p. 77). La seconde relation traduit la compatibilité de l'application f avec les deux lois externes $\cdot_E$ et $\cdot_F$.

[1] On note cet ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ s'il n'y a aucune ambiguïté sur le corps $\mathbb{K}$. Une application linéaire est aussi appelée homomorphisme d'espaces vectoriels.

[2] Voir à ce sujet la définition 2.33 d'un morphisme d'ensembles structurés en page 60.

Copyrighted material

Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel[3] puisque pour tous $f,g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$,

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F).$$

En effet, pour tout $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \in E^2$ on a

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x}+_E\boldsymbol{x}') &= \alpha\cdot_F f(\boldsymbol{x}+_E\boldsymbol{x}')+_F\beta\cdot_F g(\boldsymbol{x}+_E\boldsymbol{x}')\\ &= \alpha\cdot_F\big(f(\boldsymbol{x})+_F f(\boldsymbol{x}')\big)+_F\beta\cdot_F\big(g(\boldsymbol{x})+_F g(\boldsymbol{x}')\big)\\ &= \alpha\cdot_F f(\boldsymbol{x})+_F\beta\cdot_F g(\boldsymbol{x})+_F\alpha\cdot_F f(\boldsymbol{x}')+_F\beta\cdot_F g(\boldsymbol{x}')\\ &= (\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x})+_F(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x}').\end{aligned}$$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in E$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$ on a

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g)(\gamma\cdot_E\boldsymbol{x}) &= \alpha\cdot_F f(\gamma\cdot_E\boldsymbol{x})+_F\beta\cdot_F g(\gamma\cdot_E\boldsymbol{x})\\ &= \alpha\cdot_F\big(\gamma\cdot_F f(\boldsymbol{x})\big)+_F\beta\cdot_F\big(\gamma\cdot_F g(\boldsymbol{x})\big)\\ &= \gamma\cdot_F\big(\alpha\cdot_F f(\boldsymbol{x})+_F\beta\cdot_F g(\boldsymbol{x})\big)\\ &= \gamma\cdot_F\big((\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x})\big).\end{aligned}$$

Si E et F sont de dimensions finies alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est aussi de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}\big(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)\big) = \dim_{\mathbb{K}}(E)\times\dim_{\mathbb{K}}(F)$. Nous admettons pour l'instant ce résultat. Il sera démontré au chapitre suivant (voir p. 416).

Composition d'applications linéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et pour tout $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$

$$g\circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,G).$$

En effet, pour tout $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \in E^2$,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\boldsymbol{x}+_E\boldsymbol{x}') &= g\big(f(\boldsymbol{x}+_E\boldsymbol{x}')\big)\\ &= g\big(f(\boldsymbol{x})+_F f(\boldsymbol{x}')\big) && \text{par linéarité de } f\\ &= g\big(f(\boldsymbol{x})\big)+_G g\big(f(\boldsymbol{x}')\big) && \text{par linéarité de } g\\ &= (g\circ f)(\boldsymbol{x})+_G(g\circ f)(\boldsymbol{x}').\end{aligned}$$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in E$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\alpha\cdot_E\boldsymbol{x}) &= g\big(f(\alpha\cdot_E\boldsymbol{x})\big)\\ &= g\big(\alpha\cdot_F f(\boldsymbol{x})\big) && \text{par linéarité de } f\\ &= \alpha\cdot_G g\big(f(\boldsymbol{x})\big) && \text{par linéarité de } g\\ &= \alpha\cdot_G(g\circ f)(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

[3] Rappelons que l'ensemble des applications de E vers F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (voir p. 300). L'ensemble des applications linéaires de E vers F en constitue un sous-espace vectoriel. Il possède ainsi lui-même une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Copyrighted material

On a la caractérisation suivante.

Proposition 9.1 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E vers F. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une application linéaire est que pour tous vecteurs $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ de E et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$*

$$f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E \beta \cdot_E \boldsymbol{x}') = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x}) +_F \beta \cdot_F f(\boldsymbol{x}').$$

Démonstration Supposons que f soit une application linéaire. Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ deux vecteurs de E et α, β deux scalaires de $\mathbb{K}$. On a

$$f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E \beta \cdot_E \boldsymbol{x}') = f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x}) +_F f(\beta \cdot_E \boldsymbol{x}') = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x}) +_F \beta \cdot_F f(\boldsymbol{x}').$$

Réciproquement, en prenant $\alpha = \beta = 1_{\mathbb{K}}$ et $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \in E^2$ on obtient

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} +_E \boldsymbol{x}') &= f(1_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x} + 1_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x}') \\ &= 1_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}) +_F 1_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) +_F f(\boldsymbol{x}') \end{aligned}$$

car $1_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ et $1_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}')$. En prenant $\beta = 0_{\mathbb{K}}$, on a

$$f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E 0_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x}') = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x}) +_F 0_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}') = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x}) + \mathbf{0}_F = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x})$$

car $0_{\mathbb{K}} \cdot_F f(\boldsymbol{x}') = \mathbf{0}_F$. Or, puisque $0_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x}' = \mathbf{0}_E$,

$$f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E 0_{\mathbb{K}} \cdot_E \boldsymbol{x}') = f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} + \mathbf{0}_E) = f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x}).$$

On a ainsi montré que $f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x})$. □

Exemples

1. L'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ associe son polynôme dérivé $P' \in \mathbb{K}[X]$ est un morphisme de l'espace $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même puisque pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$(\alpha \cdot P + \beta \cdot Q)' = \alpha \cdot P' + \beta \cdot Q'.$$

2. Soit $a \in \mathbb{K}$. L'application $f : x \in \mathbb{K} \longmapsto ax \in \mathbb{K}$ est une application linéaire[(4)] car pour tous $x, x' \in \mathbb{K}$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$f(\alpha x + \beta x') = a(\alpha x + \beta x') = \alpha(ax) + \beta(ax') = \alpha f(x) + \beta f(x').$$

En revanche, l'application $f : x \in \mathbb{K} \longmapsto x^2 \in \mathbb{K}$ n'est pas linéaire car

$$f(x + x') = (x + x')^2 = x^2 + (x')^2 + 2xx' \neq f(x) + f(x') \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } x' \neq 0.$$

(4) On peut d'ailleurs montrer que toute application linéaire de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est nécessairement de la forme $x \longmapsto ax$ avec a un élément de $\mathbb{K}$.

Copyrighted material

Définition 9.2 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

✗ *Soit f une application linéaire de E dans F. Si f est bijective alors on dit que f est un* **isomorphisme** *d'espaces vectoriels et que E et F sont isomorphes par f.*

✗ *On appelle* **endomorphisme** *de E une application linéaire de l'espace E dans lui-même. On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*

✗ *En particulier, si un endomorphisme f est bijectif alors on dit que f est un* **automorphisme** *de l'espace E. On note $\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.*

Exemple L'application Ψ qui à un couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le scalaire $x + \mathrm{i}y$ de $\mathbb{C}$ est un morphisme du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^2$ dans le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$[5] puisque d'une part, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\Psi\big((x,y) +_{\mathbb{R}^2} (x',y')\big) &= \Psi\big((x+x', y+y')\big)\\ &= (x+x') + \mathrm{i}(y+y') \;=\; x + \mathrm{i}y + x' + \mathrm{i}y'\\ &= \Psi\big((x,y)\big) +_{\mathbb{C}} \Psi\big((x',y')\big),\end{aligned}$$

et d'autre part, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Psi\big(\alpha \cdot_{\mathbb{R}^2} (x,y)\big) &= \Psi\big((\alpha x, \alpha y)\big)\\ &= \alpha x + \mathrm{i}(\alpha y) \;=\; \alpha(x + \mathrm{i}y)\\ &= \alpha \times_{\mathbb{C}} \Psi\big((x,y)\big).\end{aligned}$$

Remarquons que l'application $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est injective. En effet, de

$$\Psi\big((x,y)\big) = \Psi\big((x',y')\big),$$

c'est-à-dire de $x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y'$, il vient immédiatement $x = x'$ et $y = y'$, c'est-à-dire

$$(x, y) = (x', y').$$

L'application $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est aussi surjective puisqu'à tout $z \in \mathbb{C}$ on peut associer le couple $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\Psi\big((\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))\big) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i} \times \mathrm{Im}(z) = z.$$

L'application $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est donc bijective. C'est un un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$. Les deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes.

[5] On rappelle que $\mathbb{C}$, qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, possède aussi une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Nous avons privilégié ici la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel car, d'après la définition 9.1, les espaces de départ et d'arrivée doivent être définis sur le même corps commutatif.

Copyrighted material

Structure d'anneau sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Muni de l'addition, l'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ possède une structure de groupe commutatif. Il possède la loi $\circ$ comme seconde loi de composition interne : pour tous $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$,

$$g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E).$$

On vérifie les propriétés suivantes :

- la loi $\circ$ est associative : pour tous $f, g, h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h);$$

- la loi $\circ$ est distributive par rapport à la loi $+$: pour tous $f, g, h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$,

$$f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h) \quad \text{et} \quad (g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f);$$

- l'application id_E appartient à $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. C'est l'élément neutre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ pour la loi $\circ$ car

$$\forall f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \quad f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f.$$

En revanche, la loi $\circ$ n'est en général pas commutative (sauf si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = 1$). L'ensemble structuré $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ est donc un anneau en général non commutatif. Remarquons que la composée de deux endomorphismes peut être nulle sans que l'un des deux endomorphismes le soit. Par exemple, soit E un espace de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ et soient f et g les deux endomorphismes de E définis par

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 \ \text{ et } \ f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{0}_E \\ g(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{0}_E \ \text{ et } \ g(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 \end{cases}.$$

On a $(g \circ f)(\boldsymbol{e}_1) = (g \circ f)(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{0}_E$ et on en déduit que $(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_E$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$. En effet, pour tout $\boldsymbol{x} \in E$,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\boldsymbol{x}) &= g(f(\boldsymbol{x})) = g(f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)) \\ &= x_1 g(f(\boldsymbol{e}_1)) + x_2 g(f(\boldsymbol{e}_2)) = \boldsymbol{0}_E. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'anneau $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ possède des diviseurs de zéros. Ainsi, $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif et non intègre pour $\dim_{\mathbb{K}}(E) \geqslant 2$

Isomorphisme réciproque

Proposition 9.2 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F. Si f est bijective alors son application réciproque f^{-1} est une application linéaire de F vers E, autrement dit, pour tous vecteurs $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ de F et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$*

$$f^{-1}(\alpha \cdot_F \boldsymbol{y} +_F \beta \cdot_F \boldsymbol{y}') = \alpha \cdot_E f^{-1}(\boldsymbol{y}) +_E \beta \cdot_E f^{-1}(\boldsymbol{y}').$$

Copyrighted material

Démonstration Soit $\boldsymbol{y}$ (respectivement $\boldsymbol{y}'$) un vecteur de F. Il existe un unique vecteur $\boldsymbol{x}$ (resp. $\boldsymbol{x}'$) de E tel que $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ (resp. $f(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{y}'$) ou de manière équivalente tel que $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y})$ (resp. $\boldsymbol{x}' = f^{-1}(\boldsymbol{y}')$). On a

$$\begin{aligned} \alpha \cdot_F \boldsymbol{y} +_F \beta \cdot_F \boldsymbol{y}' &= \alpha \cdot_F f(\boldsymbol{x}) +_F \beta \cdot_F f(\boldsymbol{x}') \\ &= f(\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E \beta \cdot_E \boldsymbol{x}') \quad \text{car } f \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

Le vecteur $\alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E \beta \cdot_E \boldsymbol{x}'$ de E est donc un antécédent par l'application f du vecteur $\alpha \cdot_F \boldsymbol{y} +_F \beta \cdot_F \boldsymbol{y}'$ de F. La propriété de bijectivité de f nous assure l'unicité d'un tel antécédent. Par conséquent, on peut écrire

$$f^{-1}(\alpha \cdot_F \boldsymbol{y} +_F \beta \cdot_F \boldsymbol{y}') = \alpha \cdot_E \boldsymbol{x} +_E \beta \cdot_E \boldsymbol{x}',$$

et on en déduit l'égalité

$$f^{-1}(\alpha \cdot_F \boldsymbol{y} +_F \beta \cdot_F \boldsymbol{y}') = \alpha \cdot_E f^{-1}(\boldsymbol{y}) +_E \beta \cdot_E f^{-1}(\boldsymbol{y}')$$

puisque $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{x}' = f^{-1}(\boldsymbol{y}')$. □

Remarque Considérons le cas où $F = E$. Alors, muni de la loi de composition interne $\circ$, l'ensemble $\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$ possède une structure de groupe (en général non commutatif, sauf si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = 1$). L'ensemble structuré $(\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ s'appelle ***groupe linéaire*** de E, d'où les initiales.

Application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

✗ Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. L'application $f : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \longmapsto ax_1 + bx_2 \in \mathbb{K}$ est une application linéaire. En effet, soient $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2')$ deux vecteurs de $\mathbb{K}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}' = (\alpha x_1 + \beta x_1', \alpha x_2 + \beta x_2'),$$

d'où

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}') &= a(\alpha x_1 + \beta x_1') + b(\alpha x_2 + \beta x_2') \\ &= \alpha(ax_1 + bx_2) + \beta(ax_1' + bx_2') \;=\; \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{x}'). \end{aligned}$$

✗ Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. L'application $f : x \in \mathbb{K} \longmapsto (ax, bx) \in \mathbb{K}^2$ est une application linéaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{K}$ et pour tout $x' \in \mathbb{K}$,

$$f(x + x') = (a(x + x'), b(x + x')) = (ax, bx) + (ax', bx') = f(x) + f(x'),$$

et pour tous $x \in \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$f(\alpha x) = (a(\alpha x), b(\alpha x)) = \alpha \cdot (ax, bx) = \alpha \cdot f(x).$$

✗ Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Considérons l'application

$$f : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \longmapsto (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Copyrighted material

C'est une application linéaire. En effet, d'une part, pour tous vecteurs $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2')$ de $\mathbb{K}^2$,

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = (x_1 + x_1', x_2 + x_2'),$$

d'où

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') &= (a(x_1 + x_1') + b(x_2 + x_2'), c(x_1 + x_1') + d(x_2 + x_2')) \\ &= (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) + (ax_1' + bx_2', cx_1' + dx_2') \\ &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}'). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2),$$

d'où

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) &= (a(\alpha x_1) + b(\alpha x_2), c(\alpha x_1) + d(\alpha x_2)) \\ &= \alpha \cdot (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) \;=\; \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

On vérifie sur le même principe le résultat suivant.

Proposition 9.3 *Soit f l'application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ associe le vecteur $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ avec*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 &=& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ y_2 &=& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ & \vdots & \\ y_n &=& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{array} \right.$$

où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. L'application f est une application linéaire. On note

$$f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n).$$

9.1.2 Propriétés

Proposition 9.4 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Pour tous vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_k$ de E et pour tous scalaires α_1, α_2, ..., α_k de $\mathbb{K}$ on a :*

$$f(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \ldots + \alpha_k f(\boldsymbol{v}_k).$$

Démonstration Elle s'effectue par récurrence sur k. La rédaction est laissée en exercice. □

Copyrighted material

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 9.1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie et on désigne par $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de E. Pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ appartenant à E,*

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_p f(\boldsymbol{e}_p)$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ appartenant à $\mathbb{K}$ sont les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E se décomposant dans la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sous la forme

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_p \boldsymbol{e}_p.$$

En appliquant f, on obtient

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_p \boldsymbol{e}_p) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_p f(\boldsymbol{e}_p) \end{aligned}$$

où on a utilisé le résultat de la proposition 9.4 □

Détermination d'une application linéaire par son action sur une base

Une conséquence du corollaire 9.1 est qu'une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base. Pour s'en convaincre, considérons deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, avec E de dimension finie[6] muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, et deux applications linéaires f et g de E dans F telles que

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad f(\boldsymbol{e}_i) = g(\boldsymbol{e}_i). \tag{1}$$

Montrons que f et g sont alors identiques, c'est-à-dire montrons que $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dans $\mathcal{B}$. D'après le corollaire 9.1,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_p f(\boldsymbol{e}_p), \\ g(\boldsymbol{x}) &= x_1 g(\boldsymbol{e}_1) + x_2 g(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_p g(\boldsymbol{e}_p), \end{aligned}$$

On déduit alors de (1) que

$$f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}).$$

Autrement dit, si deux applications linéaires agissent de la même manière sur les vecteurs d'une base alors elles sont nécessairement identiques. Il est clair que la réciproque est vraie. On a donc l'équivalence suivante

$$\big(\, \forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad f(\boldsymbol{e}_i) = g(\boldsymbol{e}_i) \,\big) \iff \big(\, \forall \boldsymbol{x} \in E \quad f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \,\big).$$

Ainsi, pour connaître une application linéaire, il est nécessaire et suffisant de connaître son action sur une base (quelconque) de l'ensemble de départ.

[6] Le cas où E est de dimension infinie se démontre sur le même modèle.

Copyrighted material

9.1.3 Endomorphismes particuliers

Étant donné un endomorphisme f de E, on convient de noter, pour tout entier k non nul,

$$f^k \overset{not.}{=} \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

Définition 9.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme f de E est dit* ***nilpotent*** *si*

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \quad f^k = 0,$$

c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$.

Bien évidemment, si $f^k = 0$ alors en composant par f on en déduit $f^{k+1} = 0$, et plus généralement,

$$\forall k' \geqslant k \quad f^{k'} = 0.$$

Ainsi, l'entier k n'est pas le plus grand indice pour lequel $f^k = 0$. Il n'est d'ailleurs pas nécessairement le plus petit. On définit l'***indice de nilpotence de*** f comme suit :

$$p \overset{déf.}{=} \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^k = 0\}.$$

Si l'espace E est de dimension finie alors on peut montrer que l'indice de nilpotence d'un endomorphisme de E est nécessairement inférieur ou égal à la dimension de l'espace E. C'est le but de l'exercice suivant.

Exercice 1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence p.*
1 - Montrer qu'il existe $\tilde{\boldsymbol{x}} \in E$, $\tilde{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}_E$, tel que : $f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E$.
2 - Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\tilde{\boldsymbol{x}}, f(\tilde{\boldsymbol{x}}), \ldots, f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right)$ est libre dans E.
3 - En déduire que l'indice de nilpotence p vérifie : $p \leqslant n$.

Exemple Considérons l'endomoprhisme f de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur

$$\boldsymbol{y} = (2x_1 + x_2, -3x_1 - x_2 + x_3, x_1 - x_3).$$

Pour montrer que f possède la propriété de nilpotence, il suffit de trouver un entier k (nécessairement compris entre 1 et 3 d'après l'exercice 1) tel que

$$f^k(\boldsymbol{e}_1) = f^k(\boldsymbol{e}_2) = f^k(\boldsymbol{e}_3) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

où $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$ désignent trois vecteurs d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. En effet, si la propriété est vraie pour les trois vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$, elle est nécessairement

Copyrighted material

vraie pour n'importe quel vecteur $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^3$ puisque, en notant α_1, α_2, α_3 les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} f^k(\boldsymbol{x}) &= f^k(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= \alpha_1 \underbrace{f^k(\boldsymbol{e}_1)}_{=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}} + \alpha_2 \underbrace{f^k(\boldsymbol{e}_2)}_{=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}} + \alpha_3 \underbrace{f^k(\boldsymbol{e}_3)}_{=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Comme nous avons le choix de la base, prenons la base canonique. On a

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{e}_1) = (2,-3,1), \quad f^2(\boldsymbol{e}_1) = (1,-2,1), \quad f^3(\boldsymbol{e}_1) = (0,0,0), \\ &f(\boldsymbol{e}_2) = (1,-1,0), \quad f^2(\boldsymbol{e}_2) = (1,-2,1), \quad f^3(\boldsymbol{e}_2) = (0,0,0), \\ &f(\boldsymbol{e}_3) = (0,1,-1), \quad f^2(\boldsymbol{e}_3) = (1,-2,1). \quad f^3(\boldsymbol{e}_3) = (0,0,0). \end{aligned}$$

L'indice de nilpotence de f est 3.

Définition 9.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

✗ *Un endomorphisme p de E est un* **projecteur** *de E si $p \circ p = p$.*

✗ *Un endomorphisme s de E est une* **symétrie**[7] *de E si $s \circ s = \mathrm{id}_E$.*

Si p est un projecteur de E alors $2p - \mathrm{id}_E$ est une symétrie de E. En effet,

$$\begin{aligned} (2p - \mathrm{id}_E)^2 &= (2p - \mathrm{id}_E) \circ (2p - \mathrm{id}_E) \\ &= 2p \circ 2p - 2p \circ \mathrm{id}_E - \mathrm{id}_E \circ 2p + \mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E \\ &= 4(p \circ p) - 2p - 2p + \mathrm{id}_E \;=\; 4p - 4p + \mathrm{id}_E \;=\; \mathrm{id}_E \end{aligned}$$

où on a utilisé $p \circ p = p$. Réciproquement, si s est une symétrie de E alors $\frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_E)$ est un projecteur de E.

9.2 Image et noyau

9.2.1 Image d'une application linéaire

Soit f une application de E dans F et A un sous-ensemble de E. On rappelle que l'image par f de A, que l'on note $f(A)$, est le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) \overset{déf.}{=} \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in A\}.$$

Si l'ensemble A ne possède aucune structure algébrique particulière et si f est une application quelconque alors, *a priori*, l'ensemble $f(A)$ ne possède lui non plus aucune structure algébrique remarquable. En revanche, la situation est

[7] Une symétrie s de E définit ainsi une bijection de E (c'est donc un automorphisme de E, ce que l'on note $s \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$) et on a $s^{-1} = s$.

Copyrighted material

différente si A possède une structure de sous-espace vectoriel et si f est une application linéaire. On a le résultat suivant.

Proposition 9.5 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si A est un sous-espace vectoriel de E et si f est une application linéaire de E dans F alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration L'ensemble $f(A)$ est non vide puisque le sous-espace vectoriel A est non vide (par définition d'un sous-espace vectoriel). Soient $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ deux éléments de $f(A)$ et α, β deux éléments de $\mathbb{K}$. Montrons que $\alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2 \in f(A)$. Puisque $\boldsymbol{y}_1 \in f(A)$, il existe $\boldsymbol{x}_1 \in A$ tel que $\boldsymbol{y}_1 = f(\boldsymbol{x}_1)$. De même, puisque $\boldsymbol{y}_2 \in f(A)$, il existe $\boldsymbol{x}_2 \in A$ tel que $\boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_2)$. On a alors

$$\alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2 = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + \beta f(\boldsymbol{x}_2) = f(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2)$$

car f est linéaire. De plus le vecteur $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ appartient à A puisque A est un sous-espace vectoriel de E. On a ainsi trouvé un vecteur appartenant à A, à savoir le vecteur $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$, qui a pour image le vecteur $\alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2$ par f. On a bien $\alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2 \in f(A)$. □

On rappelle que l'***image de*** f est le sous-ensemble $f(E)$ de F défini par :

$$f(E) \overset{déf.}{=} \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in E\}.$$

Lorsque f est une application linéaire, nous particularisons la notation comme suit

$$\operatorname{Im} f \overset{not.}{=} f(E).$$

En appliquant la proposition précédente avec $A = E$, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 9.2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F alors* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

9.2.2 Noyau d'une application linéaire

Définissons à présent le noyau d'une application linéaire.

Définition 9.5 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image $\mathbf{0}_F$ par f est appelé* **noyau de** *f et se note* $\operatorname{Ker} f$. *En d'autres termes :*

$$\operatorname{Ker} f \overset{déf.}{=} \{\boldsymbol{x} \in E \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_F\}.$$

La propriété de linéarité de l'application f nous assure que l'ensemble $\operatorname{Ker} f$ n'est jamais vide. En effet,

$$\mathbf{0}_E \in \operatorname{Ker} f.$$

Copyrighted material

De la linéarité de f, on déduit également la propriété suivante.

Proposition 9.6 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F alors* $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration D'après la remarque précédente, le noyau est non vide. Soient $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ deux éléments de $\operatorname{Ker} f$ et α, β deux scalaires. Montrons que $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker} f$. Puisque f est linéaire, on a

$$f(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + \beta f(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}_F$$

car $f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}_F$ (les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ appartenant tous les deux à $\operatorname{Ker} f$). Le vecteur $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ a ainsi pour image par f le vecteur nul. Il appartient donc à $\operatorname{Ker} f$. □

Exercice 2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
1 - Soit f un endomorphisme de E. Montrer que les deux ensembles[8]

$$\operatorname{Inv} f \overset{\text{déf.}}{=} \{\boldsymbol{x} \in E \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Opp} f \overset{\text{déf.}}{=} \{\boldsymbol{x} \in E \mid f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}\}$$

sont des sous-espaces de E.
2 - Soit p un projecteur de E. Montrer que

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p.$$

On dit alors que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$, *parallèlement à* $\operatorname{Ker} p$.
3 - Soit s une symétrie de E. Montrer que

$$E = \operatorname{Inv} s \oplus \operatorname{Opp} s.$$

On dit alors que s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Inv} s$, *parallèlement à* $\operatorname{Opp} s$

Remarques

1. Si le noyau et l'image d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ ont en commun la propriété de posséder une structure de sous-espace vectoriel, ils sont contenus en revanche dans des espaces différents :

- le noyau est contenu dans l'espace de départ (ici E),
- l'image est contenu dans l'espace d'arrivée (ici F).

2. Pour un endormorphisme $f : E \longrightarrow E$, noyau et image vivent dans le même espace (ici E).

---

[8] $\operatorname{Inv} f$ est appelé l'***ensemble des invariants*** de f.

Copyrighted material

3. Soit f un endomorphisme de E. On vérifie que si f est nilpotent d'indice p alors

$$\operatorname{Ker} f^p = E \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f^p = \{\mathbf{0}_E\}.$$

Énonçons à présent une première caractérisation d'une application linéaire injective.

Proposition 9.7 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour qu'une application linéaire f de E dans F soit injective, il faut et il suffit que*

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}.$$

Démonstration $\trianglerighteq$ Montrons dans un premier temps l'implication. Supposons f injective et considérons un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E tel que $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_F$, autrement dit un élément de $\operatorname{Ker} f$. Puisque $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$, on a

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{0}_E).$$

On en déduit que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$ car f est injective. Ainsi, l'unique élément du noyau est le vecteur nul : $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$.

$\trianglelefteq$ Montrons maintenant la réciproque. Supposons $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$ et montrons que f est injective. Considérons deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de E tels que $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ et montrons que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. On a les équivalences

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) \iff f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_F \iff \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} f.$$

Le noyau $\operatorname{Ker} f$ étant réduit au vecteur nul, on a nécessairement $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{0}_E$, c'est-à-dire $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. □

Remarque Si f désigne une application de E dans F alors f est surjective si, et seulement si, elle vérifie : $\operatorname{Im} f = F$. Cette caractéristaion est vraie même si f n'est pas linéaire. Par contre, il n'y a équivalence entre « f est injective » et « $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$ » que pour une application linéaire.

L'exemple suivant illustre les notions de noyau et d'image pour un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exemple On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ défini par

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_2 + x_3 \\ y_3 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Cherchons le noyau et l'image de f. Commençons par le noyau. Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker} f$; on a $f(\boldsymbol{x}) = (0, 0, 0)$. Autrement dit, x_1, x_2, x_3 vérifient

$$\begin{cases} 0 &= x_1 + x_2 \\ 0 &= x_2 + x_3 \\ 0 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Copyrighted material

Remarquons que la dernière équation est la somme des deux premières. Elle se déduit donc des deux premières. On peut ainsi l'éliminer. On se ramène à un système de deux équations à trois inconnues (qui sont x_1, x_2 et x_3). Pour résoudre ce système, on doit privilégier deux inconnues (disons x_1 et x_2) et exprimer la solution en fonction de la troisième. On obtient

$$x_1 = x_3 \quad \text{et} \quad x_2 = -x_3.$$

Un vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ appartenant à $\operatorname{Ker} f$ s'écrit ainsi sous la forme générale

$$\boldsymbol{x} = (x_3, -x_3, x_3) \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire $\boldsymbol{x} = x_3(1, -1, 1)$ avec $x_3 \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}\boldsymbol{u} \text{ avec } \boldsymbol{u} = (1, -1, 1).$$

Le noyau de f est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur non nul $\boldsymbol{u} = (1, -1, 1)$. C'est un sous-espace de dimension 1. Déterminons maintenant l'image de f. Les coordonnées d'un vecteur $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de $\operatorname{Im} f$ vérifient la relation $y_3 - y_1 - y_2 = 0$ puisque

$$(x_1 + 2x_2 + x_3) - (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) = 0.$$

C'est l'équation d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a donc d'une part

$$\operatorname{Im} f \subset \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 - y_1 - y_2 = 0\right\}. \tag{2}$$

L'image de f est un sous-espace de dimension au plus égale à 2. D'autre part, $\operatorname{Im} f$ contient les vecteurs $\boldsymbol{c}_1 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{c}_2 = (1, 1, 2)$ et $\boldsymbol{c}_3 = (0, 1, 1)$ qui sont les images des trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{c}_1 = f(\boldsymbol{e}_1), \quad \boldsymbol{c}_2 = f(\boldsymbol{e}_2) \text{ et } \boldsymbol{c}_3 = f(\boldsymbol{e}_3)$$

avec $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$. Les trois vecteurs $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ sont liés puisque $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_3$. Les deux vecteurs $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_3$ forment une famille libre. On a donc

$$\operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_3) \subset \operatorname{Im} f. \tag{3}$$

L'image de f est un sous-espace de dimension au moins égale à 2. On déduit de (2) et (3) que $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) = 2$ et que

$$\operatorname{Im} f = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 - y_1 - y_2 = 0\right\} = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_3).$$

Remarquons que l'application f n'est ni injective (puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$), ni surjective (puisque $\operatorname{Im} f$ est strictement inclus dans F).

Copyrighted material

Exercice 3 *On considère l'ensemble* $\mathbb{R}_2[X]$ *muni de sa structure usuelle de* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
1 - Montrer que $\mathcal{C} = \left(1, X-1, (X+1)^2\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2 - Soit f *l'application qui à tout polynôme* P *de* $\mathbb{R}_2[X]$ *lui associe*

$$f(P) = 2(X+1) \times P - (X^2 - 2X + 1) \times P'$$

où P' *désigne le polynôme dérivé de* P. *Montrer que* f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$. *Déterminer* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$.

9.3 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

9.3.1 Image d'une famille génératrice

Soit f une application linéaire de E dans F. Considérons une famille $\mathcal{G}$ génératrice de l'espace de départ E. Son image par f, la famille $f(\mathcal{G})$, est génératrice de $\operatorname{Vect}(f(\mathcal{G}))$ qui est un sous-espace de l'espace d'arrivée F. Cet espace est en fait remarquable puisqu'il est égal à $f(E)$. On a en effet le résultat suivant.

Proposition 9.8 *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* f *une application linéaire de* E *dans* F. *Si* $\mathcal{G}$ *est une famille génératrice de* E *alors l'image par* f *de la famille* $\mathcal{G}$ *est génératrice du sous-espace vectoriel* $\operatorname{Im} f$ *de* F. *En d'autres termes,*

$$\Big(f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) \quad et \quad E = \operatorname{Vect}(\mathcal{G}) \Big) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{G})).$$

Démonstration Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de l'espace E. Par souci de simplification, on suppose cette famille finie. La démonstration dans le cas d'une famille infinie ne pose pas de difficulté. Sa rédaction est laissée en exercice. On suppose $\mathcal{G} = (\boldsymbol{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$. Montrons que tout vecteur de $\operatorname{Im} f$ s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $f(\mathcal{G}) = (f(\boldsymbol{v}_i))_{1 \leqslant i \leqslant m}$. Soit $\boldsymbol{y}$ un élément de $\operatorname{Im} f$. Il existe $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. L'espace E étant engendré par $\mathcal{G}$,

$$\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m \quad \boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m.$$

On en déduit alors, en appliquant f, l'égalité suivante

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m).$$

L'application f étant linéaire et puisque $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, on obtient

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \alpha_m f(\boldsymbol{v}_m),$$

ce qui termine la démonstration : le vecteur $\boldsymbol{y}$ est combinaison linéaire des vecteurs $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$. □

Copyrighted material

Exemple Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$\boldsymbol{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

En utilisant la proposition 9.8, il est maintenant facile de trouver une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$: il suffit de calculer les images des vecteurs d'une famille génératrice de l'espace de départ $\mathbb{R}^3$. Naturellement, la base canonique $\mathcal{B}_c = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ vient à l'esprit. En notant $\boldsymbol{c}_1 = f(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{c}_2 = f(\boldsymbol{e}_2)$ et $\boldsymbol{c}_3 = f(\boldsymbol{e}_3)$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\big(f(\mathcal{B}_c)\big) = \operatorname{Vect}\big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)\big)\\ &= \operatorname{Vect}\big(\underbrace{(1,0,1)}_{=\boldsymbol{c}_1}, \underbrace{(1,1,2)}_{=\boldsymbol{c}_2}, \underbrace{(0,1,1)}_{=\boldsymbol{c}_3}\big) = \operatorname{Vect}\big(\underbrace{(1,0,1)}_{=\boldsymbol{c}_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{=\boldsymbol{c}_3}\big)\end{aligned}$$

car $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_3$. On en déduit que $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) = 2$ car $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_3$ forment une famille libre.

Cas d'un espace de départ de dimension finie

Considérons un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie égale à p, F un $\mathbb{K}$-espace non nécessairement de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ une base de E. La famille $\mathcal{B}$ étant génératrice de E (puisque c'est une base), son image par f est génératrice de $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(\mathcal{B})\big) \quad \text{avec} \quad f(\mathcal{B}) = \big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\big).$$

On en déduit l'égalité des dimensions :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Vect}\big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\big)\big).$$

Bien évidemment, les p vecteurs $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)$ de l'espace d'arrivée F ne constituent pas nécessairement une famille libre dans F. Ainsi, la dimension du sous-espace $\operatorname{Im} f$ qu'ils engendrent est inférieure ou égale à p. Autrement dit,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant \operatorname{card}(f(\mathcal{B})) = \operatorname{card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

On a ainsi démontré le corollaire suivant.[9]

Corollaire 9.3 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie alors* $\operatorname{Im} f$ *est de dimension finie et*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

[9] Insistons sur le résultat de ce corollaire. Il stipule que si l'espace de départ E est de dimension finie alors le sous-espace $\operatorname{Im} f$ de l'espace d'arrivée F est non seulement un sous-espace de dimension finie (et ce indépendamment de la dimension de l'espace d'arrivée F, qui peut être finie ou infinie), mais de plus, sa dimension est inférieure ou égale à celle de l'espace de départ E. En résumé, on dit qu'une application linéaire ne peut pas « augmenter » la dimension.

Copyrighted material

9.3.2 Image d'une famille libre

Cherchons maintenant à répondre à la question suivante : l'image par une application linéaire d'une famille libre est-elle encore une famille libre ? Pour cela, considérons une famille libre $\mathcal{L}$ de E et supposons, par souci de simplification, que cette famille est finie. Soient $\mathcal{L} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_q)$ et f une application linéaire de E dans F. On a

$$f(\mathcal{L}) = (f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_q)).$$

Aussi, si deux vecteurs de $\mathcal{L}$, disons $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$, ont même image par f (c'est-à-dire si $f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$), alors la famille $f(\mathcal{L})$ n'est pas libre puisqu'elle contient deux vecteurs identiques. Cette situation n'arrive pas si f est injective. Supposons maintenant que les vecteurs de $f(\mathcal{L})$ sont tous différents et essayons de voir à quelle condition les vecteurs de $f(\mathcal{L})$ forment une famille libre. Partons de la relation de liaison

$$\alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \ldots + \alpha_q f(\boldsymbol{v}_q) = \mathbf{0}_F.$$

On a, par linéarité de f,

$$f(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_q \boldsymbol{v}_q) = f(\mathbf{0}_E).$$

Sans aucune hypothèse supplémentaire sur l'application f, on ne peut rien en déduire. Si maintenant on suppose que f est injective alors on a nécessairement

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_q \boldsymbol{v}_q = \mathbf{0}_E.$$

On en déduit

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q = 0$$

puisque $\mathcal{L}$ est libre. On a ainsi démontré (dans le cas d'une famille finie libre) la proposition suivante.

Proposition 9.9 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{L}$ une famille libre dans E et f une application linéaire de E dans F. Si f est* **injective** *alors $f(\mathcal{L})$ est une famille libre de F.*

Démonstration Il reste à démontrer ce résultat dans le cas d'une famille $\mathcal{L}$ infinie libre dans E. C'est immédiat en appliquant le raisonnement précédent pour chaque famille finie extraite de $f(\mathcal{L})$. □

9.3.3 Image d'une base

Après s'être intéressé à l'image d'une famille génératrice $\mathcal{G}$ à la proposition 9.8, puis à celle d'une famille libre $\mathcal{L}$ à la proposition 9.9, il est à présent naturel de s'intéresser à l'image d'une famille qui soit à la fois libre et génératrice, c'est-à-dire à l'image d'une base $\mathcal{B}$. Se pose alors la question suivante : l'image par une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ d'une base $\mathcal{B}$ de E est-elle une base de F ?

Pour y répondre, examinons les deux questions suivantes.

Copyrighted material

- De quel sous-espace de l'espace d'arrivée la famille $f(\mathcal{B})$ est-elle génératrice ? D'après la proposition 9.8, on sait que la famille $f(\mathcal{B})$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$ puisque $\mathcal{B}$ est génératrice de E.
- La famille $f(\mathcal{B})$ est-elle libre dans F ? La famille $\mathcal{B}$ étant libre dans E, on a vu que pour que $f(\mathcal{B})$ soit libre dans F, il suffit que f soit injective (voir la proposition 9.9).

Par conséquent, on peut donner un premier élément de réponse : si l'application linéaire f est injective alors l'image par f d'une base de E est une base, non pas de tout l'espace d'arrivée F, mais seulement de son sous-espace $\operatorname{Im} f$. La proposition suivante complète cette réponse. Elle fournit une seconde caractérisation d'une application linéaire injective.

Proposition 9.10 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'application f est* **injective** *si, et seulement si, l'image par f d'une base de E est une base de* $\operatorname{Im} f$.

Démonstration Nous avons déjà établi que si f est injective alors l'image par f d'une base de E est une base du sous-espace $\operatorname{Im} f$. Montrons la réciproque. Considérons une base finie $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, , \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ de E telle que $f(\mathcal{B}) = (f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n))$ soit une base de $\operatorname{Im} f$. La rédaction dans le cas d'une base infinie est laissée en exercice. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de $\operatorname{Ker} f$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

En appliquant f, en utilisant la linéarité de f et $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_F$, on a

$$\boldsymbol{0}_F = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{e}_n).$$

Les vecteurs $f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ étant libres (par hypothèse), on déduit de la relation précédente que $x_1 = \ldots = x_n = 0$ ou de manière équivalente que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_E$. On a ainsi montré que $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}_E\}$, c'est-à-dire que f est injective.
□

Si en plus d'être injective, l'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective (c'est-à-dire si $\operatorname{Im} f = F$) alors l'image de la base $\mathcal{B}$ par f est une base de l'espace F tout entier.

Autrement dit, on a le résultat suivant qui fournit une caractérisation d'une application linéaire bijective.

Corollaire 9.4 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ une base de E et f une application linéaire de E dans F. L'application f est* **bijective** *si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base de F.*

Le résultat du corollaire 9.4 peut nous aider à trouver la dimension d'un espace F, et par la même occasion à en construire une base. La méthode consiste à

Copyrighted material

trouver un isomorphisme f de E dans F où E est un espace de notre choix dont on connaît à la fois la dimension et une base. Si l'espace de départ E est de dimension finie alors l'espace d'arrivée F est lui aussi de dimension finie. De plus, et c'est là tout l'intérêt de la méthode, on connaît la dimension de F puisque

$$\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

Enfin, on sait comment obtenir une base de F. Il suffit de calculer l'image d'une base (quelconque) de E. Illustrons ces propos avec l'exemple des suites de Fibonacci.

Exemple Soit $(p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On sait que l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. C'est l'espace des suites de Fibonacci. Notons-le temporairement F. On sait que cet espace est un sous-espace de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui est de dimension infinie. Mais qu'en est-il de la dimension de F ? Est-elle finie ou infinie ? À toute fin utile, on remarque qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à F est entièrement caractérisée par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de F telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ alors on vérifie par récurrence sur n que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc identiques. On a ainsi identifié une application Φ de $\mathbb{C}^2$ dans F, qui à un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ associe l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Fibonacci caractérisée par ses deux premiers termes

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad u_1 = \beta.$$

Nous allons vérifier que cette application définit bien un isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dans F.

- On vérifie facilement que Φ est linéaire.
- Elle est surjective puisque toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à F possède au moins un antécédent par Φ (il suffit de prendre $\alpha = u_0$ et $\beta = u_1$).
- Enfin, elle est injective. Pour s'en convaincre, prenons un élément (α, β) de $\operatorname{Ker}\Phi$. Son image par Φ est la suite nulle, en particulier les deux premiers termes sont nuls, d'où $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

Comme nous l'avions annoncé, l'application Φ ainsi construite définit bien un isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dans F. L'espace $\mathbb{C}^2$ étant de dimension 2, l'espace d'arrivée F est alors lui-même de dimension 2. On en obtient une base en calculant l'image par Φ d'une base de l'espace de départ $\mathbb{C}^2$. Choisissons la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{C}^2$:

$$\mathcal{B}_c = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{e}_1 = (1, 0) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1).$$

L'image du premier vecteur $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ par Φ est la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à F caractérisée par $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. L'image du deuxième vecteur $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$

Copyrighted material

par Φ est la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F caractérisée par $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$. Autrement dit,

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Phi(\boldsymbol{e}_1) \quad \text{et} \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Phi(\boldsymbol{e}_2).$$

On obtient

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -q, a_3 = pq, a_4 = -p^2q + q^2, \ldots),$$
$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = -p, b_3 = p^2 - q, b_4 = 2pq - p^3, \ldots).$$

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont en pratique peu utilisées car peu maniables. On leur préfèrera d'autres bases. La recherche de ces nouvelles bases fait l'objet de l'exercice 7 donné en fin de chapitre.

Proposition 9.11 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Une condition nécessaire et suffisante pour que E et F soient isomorphes est que*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Démonstration Supposons que E et F soient isomorphes : il existe un isomorphisme φ de E vers F. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On a $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. D'après le corollaire 9.4, $f(\mathcal{B})$ est une base de F. On a $\text{card}(f(\mathcal{B})) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$, d'où

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

puisque $\text{card}(\mathcal{B}) = \text{card}(f(\mathcal{B}))$. Réciproquement, supposons que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$. Soient $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une base de F. Considérons l'application linéaire Φ qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire telle que

$$\Phi(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}'_1, \quad \Phi(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}'_2, \quad \ldots, \quad \Phi(\boldsymbol{e}_p) = \boldsymbol{e}'_p.$$

On en déduit que les deux espaces E et F sont isomorphes puisque l'application Φ définit un isomorphisme de E vers F (cela se justifie en utilisant le corollaire 9.4). □

Remarque D'après la proposition 9.11, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n (avec $n \geqslant 1$) est donc isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Exercice 4 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et m un réel. On considère l'endomorphisme f_m de E défini par :*

$$\begin{cases} f_m(\boldsymbol{u}) &= m\boldsymbol{u} + (m+1)\boldsymbol{v} \\ f_m(\boldsymbol{v}) &= (m-1)\boldsymbol{u} + (m-2)\boldsymbol{v} \end{cases}.$$

1 - Pour quelles valeurs de m, f_m est-il bijectif ?
2 - Déterminer $\text{Ker}\, f_m$ *et* $\text{Im}\, f_m$ *suivant les valeurs de m.*
3 - Rechercher les invariants[10] *de f_m.*

Copyrighted material

9.4 Rang d'une application linéaire

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de *dimension finie*. Tout sous-espace vectoriel de E est nécessairement de dimension finie.

9.4.1 Rang d'une application linéaire

Comme on l'a vu au corollaire 9.3, si E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et si f est une application linéaire de E dans F alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie. La définition suivante a donc un sens.

Définition 9.6 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension* **finie** *et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie[11]). Le* **rang d'une application linéaire** *f de E dans F est la dimension de l'image de f, c'est-à-dire :*

$$\operatorname{rg} f \overset{\text{déf.}}{=} \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f).$$

Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = p$ et $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ représente une base de E alors

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\right)$$

et par conséquent, $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Vect}\left(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\right)\big)$, autrement dit,

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}\left(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\right).$$

D'après le corollaire 9.3, on a :

$$\operatorname{rg} f \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E). \tag{4}$$

Si l'espace d'arrivée F est de dimension finie alors, $\operatorname{Im} f$ étant un sous-espace vectoriel de F, on a nécessairement : $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F)$, c'est-à-dire

$$\operatorname{rg} f \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F). \tag{5}$$

En combinant (4) et (5), on obtient

$$\operatorname{rg} f \leqslant \min\big\{\dim_{\mathbb{K}}(E), \dim_{\mathbb{K}}(F)\big\}.$$

On résume ces résultats dans la proposition suivante.

---

[10] On rappelle (voir l'exercice 2, p. 366) que l'ensemble des invariants de f_m est l'ensemble noté $\operatorname{Inv} f_m$ constitué des vecteurs $\boldsymbol{x}$ de E vérifiant $f_m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

[11] Nous insistons sur le fait que cette définition est indépendante de la dimension de l'espace d'arrivée F, ce dernier pouvant être de dimension finie ou infinie.

Copyrighted material

Proposition 9.12 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie et F de dimension quelconque, et f une application linéaire de E dans F. Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = p$ alors*

$$\operatorname{rg} f \leqslant p.$$

De plus, si F est de dimension finie avec $\dim_{\mathbb{K}}(F) = n$, alors

$$\operatorname{rg} f \leqslant \min\{n, p\}.$$

9.4.2 Théorème du rang

Le théorème suivant est fondamental en algèbre linéaire. Nous l'utiliserons à de multiples reprises.

Théorème 9.1 (du rang) *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de* ***dimension finie*** *et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nécessairement de dimension finie. Pour toute application linéaire f de E dans F, on a :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg} f + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f).$$

Démonstration Puisque l'espace E est de dimension finie, $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont aussi de dimensions finies. On pose $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = q$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) = r$. Soit $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_q)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. On a

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f}) = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \tag{6}$$

et $f(\boldsymbol{w}_1) = f(\boldsymbol{w}_2) = \ldots = f(\boldsymbol{w}_q) = \mathbf{0}_F$. Soit $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = (\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2, \ldots, \boldsymbol{\ell}_r)$ une base de $\operatorname{Im} f$. Notons que $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f}$ et $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$ ne sont pas contenues dans le même espace vectoriel : $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f}$ est contenue dans l'ensemble de départ et $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f}$ dans l'ensemble d'arrivée. Il est évident que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\} \quad \exists \boldsymbol{u}_i \in E \quad f(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{\ell}_i,$$

ce qui permet de construire une famille $\mathcal{B}_s = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r)$ constituée de r vecteurs de l'espace de départ E. Ces vecteurs sont bien sûr distincts puisque les vecteurs $\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2, \ldots, \boldsymbol{\ell}_r$ le sont, et donc $\operatorname{card}(\mathcal{B}_s) = \operatorname{card}(\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f})$. Ainsi

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}_s) = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f). \tag{7}$$

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\boldsymbol{u}_i \notin \operatorname{Ker} f$ puisque $f(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{\ell}_i \neq \mathbf{0}_F$[12]. D'où

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} \cap \mathcal{B}_s = \emptyset.$$

[12] Rappelons que les vecteurs d'une base sont nécessairement non nuls.

Copyrighted material

La démonstration consiste maintenant à montrer que $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{s}}$ est une base de E. On aura ainsi

$$\mathrm{card}\,(\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{s}}) = \dim_{\mathbb{K}}(E), \tag{8}$$

ce qui terminera la démonstration puisque, les deux ensembles $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f}$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{s}}$ étant disjoints, de la relation

$$\mathrm{card}\,(\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f}) + \mathrm{card}\,(\mathcal{B}_{\mathrm{s}}) = \mathrm{card}\,(\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{s}})\,,$$

on pourra déduire, en tenant compte de (6), (7) et (8), la relation

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}\,f) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}\,f) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$$

qui est la relation recherchée.

$\trianglerighteq$ Montrons dans un premier temps que $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{s}}$ constitue une famille libre dans E. Considérons la relation de liaison

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{w}_q + \alpha_{q+1}\boldsymbol{u}_1 + \ldots + \alpha_{q+r}\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}_E. \tag{9}$$

En appliquant f à (9) et en utilisant le fait que f est linéaire, on obtient

$$\alpha_1 f(\boldsymbol{w}_1) + \ldots + \alpha_q f(\boldsymbol{w}_q) + \alpha_{q+1} f(\boldsymbol{u}_1) + \ldots + \alpha_{q+r} f(\boldsymbol{u}_r) = \boldsymbol{0}_F,$$

qui s'écrit encore

$$\alpha_{q+1}\boldsymbol{\ell}_1 + \ldots + \alpha_{q+r}\boldsymbol{\ell}_r = \boldsymbol{0}_F$$

puisque $f(\boldsymbol{w}_1) = \ldots = f(\boldsymbol{w}_q) = \boldsymbol{0}_F$ et puisque $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{\ell}_1$, …, $f(\boldsymbol{u}_r) = \boldsymbol{\ell}_r$. On en déduit $\alpha_{q+1} = \ldots = \alpha_{q+r} = 0$ puisque $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}f} = (\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\,f$ (donc *a fortiori* une famille libre dans F). La relation de liaison (9) s'écrit ainsi

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \alpha_q \boldsymbol{w}_q = \boldsymbol{0}_E.$$

Il en résulte que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = 0$ car $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_q)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,f$ (donc *a fortiori* une famille libre dans E).

$\trianglerighteq$ Montrons maintenant que $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{s}}$ constitue une famille génératrice de E, c'est-à-dire que $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{s}})$. Vérifions pour cela que tout vecteur de E s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{s}}$. Soit $\boldsymbol{x} \in E$. Décomposons $f(\boldsymbol{x})$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}f}$ de $\mathrm{Im}\,f$:

$$\begin{aligned} \exists!(\beta_1, \ldots, \beta_r) \in \mathbb{K}^r \quad f(\boldsymbol{x}) &= \beta_1 \boldsymbol{\ell}_1 + \ldots + \beta_r \boldsymbol{\ell}_r \\ &= \beta_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \ldots + \beta_r f(\boldsymbol{u}_r). \end{aligned}$$

Par linéarité de f, on en déduit que

$$f\left(\boldsymbol{x} - (\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \beta_r \boldsymbol{u}_r)\right) = \boldsymbol{0}_F.$$

Le vecteur $\boldsymbol{x} - (\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \beta_r \boldsymbol{u}_r)$ appartient ainsi à $\mathrm{Ker}\,f$. Décomposons-le dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f}$ de $\mathrm{Ker}\,f$:

$$\exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \mathbb{K}^q \quad \boldsymbol{x} - (\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \beta_r \boldsymbol{u}_r) = \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \alpha_q \boldsymbol{w}_q.$$

Copyrighted material

On a ainsi obtenu

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \alpha_q \boldsymbol{w}_q + \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \beta_r \boldsymbol{u}_r,$$

ce qui montre que $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\, f} \cup \mathcal{B}_s)$. □

Exemple Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. Il est facile de vérifier que si f n'est pas identiquement nulle alors son noyau est un hyperplan vectoriel de E. En effet, rappelons que les seuls sous-espaces du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$. L'image de f étant non réduite à 0 puisque f n'est pas identiquement nulle, elle est nécessairement égale à $\mathbb{K}$. On a donc

$$\mathrm{rg}\, f = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1.$$

En appliquant le théorème du rang à la forme linéaire f, on obtient

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(E)}_{=n} = \underbrace{\mathrm{rg}\, f}_{=1} + \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}\, f), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}\, f) = n - 1.$$

Nous avons ainsi vérifié que le noyau de f était de dimension $n-1$. C'est donc un hyperplan vectoriel de E.

Exercice 5 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = 3$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ et p un endomorphisme de E défini par*

$$p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \quad p(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), \quad p(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}).$$

Montrer que p est un projecteur de E, puis caractériser $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$.

9.4.3 Conséquences du théorème du rang

La relation donnée par le théorème 9.1 est indépendante de la dimension de l'espace d'arrivée F, ce dernier pouvant être de dimension finie ou infinie. Considérons en particulier le cas où l'espace F est lui aussi de dimension finie.

Proposition 9.13 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies (non nécessairement identiques) et f une application linéaire de E dans F. On a alors les équivalences suivantes :*

1 - f est surjective $\iff \mathrm{rg}\, f = \dim_{\mathbb{K}}(F)$;

2 - f est injective $\iff \mathrm{rg}\, f = \dim_{\mathbb{K}}(E)$;

3 - f est bijective $\iff \mathrm{rg}\, f = \dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Démonstration Montrons les trois propriétés.

Copyrighted material

1. La propriété de surjectivité de f est équivalente à la propriété « $\operatorname{Im} f = F$ » qui est elle-même équivalente à la propriété « $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ » .
2. La propriété d'injectivité de f est équivalente à la propriété

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$$

qui est elle-même équivalente, d'après le théorème du rang, à la propriété

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg} f$$

3. C'est immédiat d'après ce qui précède.

□

Remarque On vérifie facilement les trois points suivants.

1. Supposons que f est surjective (c'est-à-dire que $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(F)$). On a alors grâce au théorème 9.1,

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \geqslant \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

puisque $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \geqslant 0$. On a ainsi l'implication suivante

$$f \text{ est surjective} \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}(E) \geqslant \dim_{\mathbb{K}}(F). \tag{10}$$

2. Supposons que f soit injective (c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_E\}$ ou encore $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 0$). Grâce au théorème 9.1,

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de F. On a ainsi l'implication suivante

$$f \text{ est injective} \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}(E) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(F). \tag{11}$$

3. En combinant les deux résultats précédents, on obtient

$$f \text{ est bijective} \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F). \tag{12}$$

En général, les réciproques des implications (10), (11) et (12) sont fausses. Par exemple, on ne peut pas déduire de l'égalité $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ que l'application $f : E \longrightarrow F$ est bijective (voir p. 367 pour un contre-exemple).

On déduit de la proposition 9.13 le résultat suivant.

Corollaire 9.5 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F. Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ alors il y a équivalence entre les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité de f :*

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Copyrighted material

Démonstration D'après la proposition 9.13, lorsque les deux espaces E et F sont de même dimension, les propriétés de bijectivité, d'injectivité et de surjectivité de f sont toutes les trois équivalentes à la propriété « $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ ». Elles sont donc toutes les trois équivalentes entre elles. □

Le résultat suivant stipule que l'on ne change pas le rang d'une application linéaire lorsque l'on compose celle-ci à gauche ou à droite par une application linéaire bijective.

Proposition 9.14 *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G.*

1. *Si f est bijective alors* $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.
2. *Si g est bijective alors* $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.

Démonstration $\geq$ Rappelons que, par définition,

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Im}(g \circ f)\big) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(g \circ f) = g(f(E)).$$

Supposons f bijective (et g quelconque) et montrons que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$. On a, en tenant compte que $f(E) = F$ (puisque f est bijective),

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}}\big(g(f(E))\big) = \dim_{\mathbb{K}}\big(g(F)\big) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Im}(g)\big) = \operatorname{rg} g.$$

On a ainsi vérifié que

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g.$$

$\geq$ Supposons à présent g bijective (et f quelconque) et montrons que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$. On désigne par $\tilde{g}$ l'application de $\operatorname{Im} f$ dans G définie comme la restriction de l'application g au sous-espace $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire $\tilde{g} = g|_{\operatorname{Im} f}$. Appliquons le théorème du rang à l'application linéaire $\tilde{g} : \operatorname{Im} f \longrightarrow G$. On a

$$\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} \tilde{g} + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} \tilde{g}). \tag{13}$$

On vérifie sans peine que $\operatorname{Ker} \tilde{g} \subset \operatorname{Ker} g$. On en déduit que $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} \tilde{g}) = 0$ puisque, g étant bijective, $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} g) = 0$. De plus, on a d'une part, par définition, $\operatorname{rg} \tilde{g} = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} \tilde{g})$ avec $\operatorname{Im} \tilde{g} = \tilde{g}(\operatorname{Im} f) = \tilde{g}(f(E))$ et d'autre part, $\tilde{g}(f(E)) = g(f(E))$ (c'est immédiat). Ainsi,

$$\operatorname{rg} \tilde{g} = \operatorname{rg}(g \circ f).$$

L'égalité (13) s'écrit alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(g \circ f)$. □

Remarque On déduit de la proposition 9.14 que si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(G, H)$ avec E, F, G et H quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et si f et h sont bijectives alors

$$\operatorname{rg}(h \circ g \circ f) = \operatorname{rg} g.$$

Autrement dit, on ne change pas le rang lorsque l'on compose à gauche et à droite par des applications linéaires bijectives.

Copyrighted material

9.5 Exercices de synthèse

Exercice 6 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant*

$$f^2 \neq 0 \quad et \quad f^3 = 0$$

où on a noté $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$.

1 - Montrer les deux séries d'inclusion

$$\{\mathbf{0}_E\} = \operatorname{Im} f^3 \subset \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \subset E,$$

$$\{\mathbf{0}_E\} \subset \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f^3 = E.$$

2 - Montrer que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ et en déduire que $\operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2)$.

3 - Justifier que $2 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) \leqslant 3$. Le cas $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 3$ est-il possible ? En déduire $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2)$ puis $\operatorname{rg} f^2$.

4 - Justifier que $1 \leqslant \operatorname{rg} f \leqslant 3$. Montrer que $\operatorname{Im} f^2 \neq \operatorname{Im} f$. En déduire que $\operatorname{rg} f \neq 1$. Le cas $\operatorname{rg} f = 3$ est-il possible ? En déduire $\operatorname{rg} f$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f)$.

Exercice 7 *Soit $(p, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On désigne par F l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0.$$

Ces suites sont appelées suites de Fibonacci.

1 - On suppose dans un premier temps $p^2 - 4q \neq 0$. Trouver deux suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ formant une base de F. En déduire les coordonnées d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F dans cette base.

2 - On suppose $p^2 - 4q = 0$ et $q \neq 0$. Montrer que l'espace F possède une unique suite géométrique

$$(s^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad avec \quad s \in \mathbb{C} \quad et \quad s \neq 0.$$

En posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = s^n \times v_n$, en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\frac{u_1}{s} - u_0\right) ns^n + u_0 s^n.$$

La famille constituée des deux suites $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(ns^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme-t-elle une base de F ? Si oui, quelles sont les coordonnées de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ dans cette base ?

Exercice 8 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque et f un endomorphisme de E vérifiant l'équation* (E) *suivante*

$$(\mathrm{E}) \quad f^2 = -f$$

où on a noté $f^2 = f \circ f$. On rappelle que $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$ désigne l'application identité de E.

1 - Montrer que : $\forall \boldsymbol{x} \in E,\ f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$.

Copyrighted material

2 - L'application $-\mathrm{id}_E$ *est-elle solution de* (E) *? Si oui, est-elle bijective ?*

3 - En supposant que $f \neq -\mathrm{id}_E$*, montrer qu'il existe* $\boldsymbol{x}_0 \in E$ *tel que*

$$f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}_E.$$

En déduire que f *n'est pas bijective.*

4 - Déduire de la question 1 *que* $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$*. Montrer que*

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}_E\}.$$

En déduire que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

9.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Cette question est immédiate. En effet, par définition de l'indice de nilpotence p, pour tout entier p' inférieur strictement à p (et en particulier pour $p' = p - 1$) l'application $f^{p'}$ n'est pas identiquement nulle. Ainsi, il existe un vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}}$ appartenant à E tel que

$$f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E.$$

Bien entendu, ce vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}}$ est nécessairement non nul, sinon son image serait le vecteur nul. Remarquons que le vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}}$ n'est pas nécessairement unique.

2 - Soit $\mathcal{F} = \big(\tilde{\boldsymbol{x}}, f(\tilde{\boldsymbol{x}}), \ldots, f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\big)$. On considère la relation de liaison

$$\alpha_0\tilde{\boldsymbol{x}} + \alpha_1 f(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \ldots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E. \tag{14}$$

Procédons en plusieurs étapes.

- En appliquant f^{p-1}, on obtient

  $$\alpha_0 f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \alpha_1 f^{p}(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \ldots + \alpha_{p-1} f^{2p-2}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E$$

  Or $f^{\ell}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E$ pour tout $\ell \geqslant p$. On obtient $\alpha_0 f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E$ et donc $\alpha_0 = 0$ car le vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a été choisi de telle sorte que $f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq \mathbf{0}_E$.
- D'après l'étape précédente, $\alpha_0 = 0$. La relation de liaison (14) s'écrit à présent :

  $$\alpha_1 f(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \alpha_2 f^2(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \ldots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E.$$

  En appliquant cette fois-ci non plus f^{p-1} mais f^{p-2}, on obtient

  $$\alpha_1 f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \alpha_2 f^{p}(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \ldots + \alpha_{p-1} f^{2p-3}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E.$$

  On en déduit $\alpha_1 f^{p-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_E$, d'où $\alpha_1 = 0$.
- Et ainsi de suite !

Copyrighted material

On obtient finalement $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$.

3 - La famille $\mathcal{F}$ étant libre, son cardinal (l'entier p) ne peut excéder la dimension de l'espace E, c'est-à-dire n.

Solution de l'exercice 2

1 - Il suffit de remarquer que $\operatorname{Inv} f = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ puisque pour tout $\boldsymbol{x} \in E$ on a

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \iff f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E \iff (f - \mathrm{id}_E)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E.$$

En procédant de même, on vérifie que $\operatorname{Opp} f = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$. D'après la proposition 9.6, on en déduit que $\operatorname{Inv} f$ et $\operatorname{Opp} f$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2 - Une condition nécessaire et suffisante pour que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, est que l'on ait à la fois $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{\mathbf{0}_E\}$.

▷ Vérifions que $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$. Soit $\boldsymbol{x} \in E$. On a (trivialement) que

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{x})$$

avec $p(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} p$ et $\boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Ker} p$ puisque

$$p(\boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x})) = p(\boldsymbol{x}) - (p \circ p)(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$$

où on a utilisé que $p \circ p = p$ (p est un projecteur de E).

▷ Vérifions à présent que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{\mathbf{0}_E\}$. Soit $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$. Puisque $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker} p$, $p(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_E$. De même, puisque $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} p$, il existe $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\boldsymbol{y} = p(\boldsymbol{x})$. On en déduit que $p(p(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}_E$, d'où $p(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$ (puisque $p \circ p = p$), c'est-à-dire $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}_E$ car $\boldsymbol{y} = p(\boldsymbol{x})$.

3 - Procédons comme ci-dessus en deux étapes.

▷ Commençons par vérifier que $E = \operatorname{Inv} s + \operatorname{Opp} s$. Soit $\boldsymbol{x} \in E$. On a immédiatement

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{x})) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x}))$$

avec $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{x})) \in \operatorname{Inv} s$ et $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x})) \in \operatorname{Opp} s$ puisque

$$\begin{cases} s(\boldsymbol{x} + s(\boldsymbol{x})) = s(\boldsymbol{x}) + (s \circ s)(\boldsymbol{x}) = s(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} \\ s(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x})) = s(\boldsymbol{x}) - (s \circ s)(\boldsymbol{x}) = s(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = -(\boldsymbol{x} - s(\boldsymbol{x})) \end{cases}$$

où on a utilisé que $s \circ s = \mathrm{id}_E$ (s est une symétrie de E).

▷ Vérifions à présent que $\operatorname{Inv} s \cap \operatorname{Opp} s = \{\mathbf{0}_E\}$. Soit $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Inv} s \cap \operatorname{Opp} s$. De $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Inv} s$ il vient $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Opp} s$ il vient $f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$. On en déduit que $2\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$, autrement dit que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 3

Rappelons que $\mathbb{R}_2[X]$ (de dimension finie) est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}[X]$ (de dimension infinie).

1 - Le fait que $\mathcal{C} = \left(1, X-1, (X+1)^2\right)$ soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$ se déduit du fait que la famille $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (c'est d'ailleurs la base canonique). En effet, de la relation de liaison $\alpha+\beta(X-1)+\gamma(X+1)^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}$, qui s'écrit aussi sous la forme suivante

$$(\alpha-\beta+\gamma)+(\beta+2\gamma)X+\gamma X^2 = 0_{\mathbb{R}[X]},$$

on déduit (puisque les trois polynômes 1, X et X^2 forment une famille libre) le système d'équations

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma = 0 \\ \beta+2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

qui admet pour solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

2 - La linéarité de f ne présente aucune difficulté. En effet, on vérifie que l'on a pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et pour tous $\alpha, \gamma \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} f(\alpha P+\beta Q) &= 2(X+1)\times(\alpha P+\beta Q)-(X^2-2X+1)\times(\alpha P+\beta Q)' \\ &= \alpha f(P)+\beta f(Q). \end{aligned}$$

Il faut maintenant s'assurer que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$. De manière évidente, $f(P) \in \mathbb{R}[X]$. Il reste à vérifier que $\deg(f(P)) \leqslant 2$, ce qui s'obtient en développant l'expression

$$\begin{aligned} f(P) &= 2(X+1)(aX^2+bX+c)-(X^2-2X+1)(2aX+b) \\ &= (6a+b)X^2+(-2a+4b+2c)X-b+2c. \end{aligned} \tag{15}$$

On a bien $\deg(f(P)) \leqslant 2$. Puisque $\mathcal{C} = \left(1, X-1, (X+1)^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{C}))$. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\left(f(1), f(X-1), (f(X+1)^2)\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(2(X+1), (X-1)(X+3), 8X(X+1)\right). \end{aligned}$$

Pour montrer que la famille $f(\mathcal{C})$ est libre, il faut vérifier que la relation

$$\alpha 2(X+1)+\beta(X-1)(X+3)+\gamma 8X(X+1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

implique que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Cela se vérifie sans aucune difficulté et se déduit encore du fait que la famille $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. On a ainsi $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} f) = 3$ et la famille $f(\mathcal{C}) = (2(X+1), (X-1)(X+3), 8X(X+1))$ est une base de $\operatorname{Im} f$. À titre indicatif, les images des vecteurs de la base canonique $(1, X, X^2)$ sont :

$$f(1) = 2(X+1), \quad f(X) = X^2+4X-1 \quad \text{et} \quad f(X^2) = 2X(3X-1)$$

Copyrighted material

et la famille $f(\mathcal{B}) = \big(2(X+1), X^2+4X-1, 2X(3X-1)\big)$ est aussi une base de $\operatorname{Im} f$. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. D'après (15), on a

$$f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \iff (6a+b)X^2 + (-2a+4b+2c)X - b + 2c = 0_{\mathbb{R}[X]},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 6a+b=0 \\ -2a+4b+2c=0 \\ -b+2c=0 \end{cases}$$

dont on déduit $a=b=c=0$. On a donc $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

Solution de l'exercice 4

1 - L'endomorphisme $f_m : E \longrightarrow E$ est bijectif si et seulement si l'image d'une base (de E) est une base de E. Considérons la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de l'énoncé et cherchons pour quelles valeurs de m, la famille $f_m(\mathcal{B}) = (f_m(\boldsymbol{u}), f_m(\boldsymbol{v}))$ est libre dans E. Partons de la relation de liaison

$$\alpha(m\boldsymbol{u} + (m+1)\boldsymbol{v}) + \beta((m-1)\boldsymbol{u} + (m-2)\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E$$

qui s'écrit encore

$$(m\alpha + (m-1)\beta)\boldsymbol{u} + ((m+1)\alpha + (m-2)\beta)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E.$$

On en déduit le système linéaire 2×2 suivant

$$\begin{cases} m\alpha + (m-1)\beta = 0 \\ (m+1)\alpha + (m-2)\beta = 0 \end{cases}$$

qui impose la relation $(-1+2m)\beta = 0$ (elle s'obtient en multipliant la première équation par $m+1$, la deuxième équation par $-m$ et en additionnant le tout. Considérons les deux cas suivants :

- Si $m \neq 1/2$ alors on a immédiatement $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$. L'application f_m est bijective.
- Si $m = 1/2$ alors on n'a pas nécessairement $\beta = \alpha = 0$. L'application f_m n'est pas bijective.

2 - D'après ce qui précède, il faut considérer les deux cas $m = 1/2$ et $m \neq 1/2$.

- Si $m \neq 1/2$ alors $\operatorname{Im} f_m = E$ et $\operatorname{Ker} f_m = \{\mathbf{0}_E\}$ puisque f_m est bijective.
- Supposons $m = 1/2$ et cherchons à déterminer $\operatorname{Ker} f_{\frac{1}{2}}$. Soit $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f_{\frac{1}{2}}$ de coordonnées x_1 et x_2 dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) = f_{\frac{1}{2}}(x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v}) = x_1 f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u}) + x_2 f(\boldsymbol{v}).$$

Par conséquent, on a

$$f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\Big)\boldsymbol{u} + \Big(\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2\Big)\boldsymbol{v}.$$

Copyrighted material

De la relation $f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$, on déduit le système linéaire 2×2 suivant

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)/2 = 0 \\ 3(x_1 - x_2)/2 = 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à $x_1 = x_2$. Ainsi le vecteur $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v}$ de $\operatorname{Ker} f_{\frac{1}{2}}$ s'écrit $\boldsymbol{x} = x_1(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$, d'où $\operatorname{Ker} f_{\frac{1}{2}} = \mathbb{R}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$. Déterminons $\operatorname{Im} f_{\frac{1}{2}}$. On sait que $\operatorname{Im} f_{\frac{1}{2}} = \operatorname{Vect}(f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u}), f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v}))$. On a

$$f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}\Big) \quad \text{et} \quad f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}\Big).$$

Bien évidemment, les deux vecteurs $f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{u})$ et $f_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v})$ sont liés. Ainsi $\operatorname{Im} f_{\frac{1}{2}}$ est engendré par le vecteur $\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}$, ce qu'on écrit $\operatorname{Im} f_{\frac{1}{2}} = \mathbb{R}(\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v})$.

3 - Les invariants de f_m sont les vecteurs $\boldsymbol{x} \in E$ qui vérifient $f_m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Notons comme ci-dessus x_1 et x_2 les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{B}$. On a

$$\begin{aligned} f_m(\boldsymbol{x}) &= x_1 f_m(\boldsymbol{u}) + x_2 f_m(\boldsymbol{v}) \\ &= (mx_1 + (m-1)x_2)\boldsymbol{u} + ((m+1)x_1 + (m-2)x_2)\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Ainsi l'égalité $f_m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ équivaut au système linéaire 2×2 suivant

$$\begin{cases} mx_1 + (m-1)x_2 = x_1 \\ (m+1)x_1 + (m-2)x_2 = x_2 \end{cases}$$

Si $m = 1$ alors on obtient $x_2 = x_1$, sinon on obtient $x_1 = x_2 = 0$. L'ensemble des invariants est $\mathbb{R}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$, sinon seul le vecteur nul est invariant.

Solution de l'exercice 5

On commence par vérifier (c'est immédiat) que : $p^2(\boldsymbol{u}) = p(\boldsymbol{u})$, $p^2(\boldsymbol{v}) = p(\boldsymbol{v})$ et $p^2(\boldsymbol{w}) = p(\boldsymbol{w})$. Par exemple,

$$\begin{aligned} p^2(\boldsymbol{u}) &= p(p(\boldsymbol{u})) \;=\; p(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \\ &= p(\boldsymbol{u}) + p(\boldsymbol{v}) + p(\boldsymbol{w}) \;=\; \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \;=\; p(\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

Soit $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w} \in E$. On a alors

$$\begin{aligned} p^2(\boldsymbol{x}) &= p^2(x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}) \\ &= x_1 p^2(\boldsymbol{u}) + x_2 p^2(\boldsymbol{v}) + x_3 p^2(\boldsymbol{w}) \\ &= x_1 p(\boldsymbol{u}) + x_2 p(\boldsymbol{v}) + x_3 p(\boldsymbol{w}) \\ &= p(x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}) \;=\; p(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

On a : $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(p(\mathcal{B}))$ et la famille $p(\mathcal{B}) = (p(\boldsymbol{u}), p(\boldsymbol{v}), p(\boldsymbol{w}))$ est liée ; elle est de rang 1. Ainsi $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} p) = 1$ et

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}).$$

Copyrighted material

D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} p) = 2$. Il reste à déterminer une base de $\operatorname{Ker} p$. Soit $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker} p$. On a

$$p(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = (x_2 - x_3)/2.$$

Ainsi, un vecteur $\boldsymbol{x}$ de $\operatorname{Ker} p$ s'écrit $\boldsymbol{x} = ((x_2 - x_3)/2)\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}$. On en déduit que les deux vecteurs $\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$ ($x_2 = 2$ et $x_3 = 0$) et $\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{w}$ ($x_2 = 0$ et $x_3 = -2$) appartiennent à $\operatorname{Ker} p$ et on vérifie que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. On a

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{w}).$$

Solution de l'exercice 6

L'application linéaire $f : E \longrightarrow E$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} f^3 = 0 & \Longleftrightarrow \quad \forall \boldsymbol{x} \in E \; f^3(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E \\ f^2 \neq 0 & \Longleftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{x} \in E \; f^2(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}_E \end{cases}.$$

1 - On commence par montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$. Soit $\boldsymbol{z}$ un vecteur appartenant à $\operatorname{Im} f^{k+1}$. Cela signifie qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\boldsymbol{z} = f^{k+1}(\boldsymbol{x})$, c'est-à-dire tel que

$$\boldsymbol{z} = f^k(f(\boldsymbol{x})).$$

Il existe donc un vecteur $\boldsymbol{y}$ appartenant à E tel que $\boldsymbol{z} = f^k(\boldsymbol{y})$: il suffit de prendre $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. On a ainsi $\boldsymbol{z} \in \operatorname{Im} f^k$. L'inclusion $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$ est donc vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Cette inclusion est aussi valable pour $k = 0$ puisque, par convention $f^0 = \mathrm{id}_E$ (d'où $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E) = E$) et $\operatorname{Im} f \subset E$. On montre à présent que $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de $\operatorname{Ker} f^k$. On a $f^k(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$. Il suffit alors d'appliquer f. Puisque $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_E$, on obtient

$$f^{k+1}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E.$$

Le vecteur $\boldsymbol{x}$ appartient ainsi à $\operatorname{Ker} f^{k+1}$. L'inclusion $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ est donc vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Enfin, puisque tout vecteur de E a pour image le vecteur nul par f^3, on a

$$\operatorname{Ker} f^3 = E \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f^3 = \{\mathbf{0}_E\}.$$

2 - Montrons l'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$. Soit $\boldsymbol{x}'' \in \operatorname{Im} f^2$: il existe $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $\boldsymbol{x}'' = f^2(\boldsymbol{x})$. En appliquant f, on obtient $f(\boldsymbol{x}'') = f^3(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$, et par conséquent $\boldsymbol{x}'' \in \operatorname{Ker} f$. On déduit de l'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ l'inégalité $\operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f)$. Nous avons établi à la question précédente que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$, d'où $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2)$. Par conséquent,

$$\operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2).$$

Copyrighted material

3 - Grâce au théorème du rang, on peut écrire que

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg} f^2 + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2)$$

d'où, en tenant compte de l'inégalité $\operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2)$ établie à la question précédente,

$$3 \leqslant 2 \times \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2).$$

On en déduit pour $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2)$ les deux seules possibilités suivantes :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 2 \text{ ou } 3.$$

Le cas $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 3$ est impossible. Pour le montrer, raisonnons par l'absurde. Supposons que l'on ait $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 3$. Cela signifirait que $\operatorname{Ker} f^2 = E$ ou, de manière équivalente, que $f^2 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $f^2 \neq 0$. Par conséquent

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f^2) = 2,$$

ce qui implique $\operatorname{rg} f^2 = 1$ (grâce au théorème du rang).

4 - De l'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ on déduit l'inégalité $\operatorname{rg} f^2 \leqslant \operatorname{rg} f$, d'où

$$\operatorname{rg} f = 1, 2 \text{ ou } 3.$$

Pour montrer que $\operatorname{Im} f^2 \neq \operatorname{Im} f$, raisonnons par l'absurde : supposons que l'on ait $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$. Cela signifierait que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ (puisque l'on a établi à la question précédente que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$), soit que $f^2 = 0$, ce qui est contraire aux hypothèses. Par conséquent, le cas $\operatorname{rg} f = 1$ est impossible car il signifierait que l'on ait $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ (puisque $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f = 1$), ce qui est impossible. Vérifions maintenant que le cas $\operatorname{rg} f = 3$ est aussi à exclure. Raisonnons par l'absurde : supposons que l'on ait $\operatorname{rg} f = 3$. Cela équivaudrait à f bijective et impliquerait f^3 bijective, ce qui est impossible puisque $f^3 = 0$. Ainsi, le seul cas possible est

$$\operatorname{rg} f = 2,$$

ce qui implique $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 1$ (grâce au théorème du rang).

Solution de l'exercice 7

On rappelle que l'ensemble F des suites de Fibonacci constitue un sous-espace de dimension finie du $\mathbb{C}$-espace $E = \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ (de dimension infinie) constitué des suites à valeurs complexes. On a vu (voir p. 373) que

$$\dim_{\mathbb{C}}(F) = 2.$$

1 - Plaçons-nous dans le cas où $p^2 - 4q \neq 0$. Puisque $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de F, elles vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} r_1^{n+2} + pr_1^{n+1} + qr_1^n = 0 \\ r_2^{n+2} + pr_2^{n+1} + qr_2^n = 0 \end{cases}$$

Copyrighted material

ce qui implique $r_1^2 + pr_1 + q = 0$ et $r_2^2 + pr_2 + q = 0$. Ainsi r_1 et r_2 sont les racines complexes de l'équation $r^2+pr+q = 0$ appelée équation caractéristique. Elles sont nécessairement distinctes car $p^2 - 4q \neq 0$. Pour montrer que ces deux suites géométriques forment une base de F, il est suffisant de montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. La relation de liaison s'écrit

$$\alpha(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbf{0}_E \quad \text{ou encore} \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha r_1^n + \beta r_2^n = 0\Big).$$

En particulier en prenant $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système 2×2

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 & (n = 0) \\ \alpha r_1 + \beta r_2 = 0 & (n = 1) \end{cases}.$$

On en déduit $\alpha = \beta = 0$ puisque $r_1 \neq r_2$. Par conséquent, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Fibonacci se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}$ constituée des deux suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Autrement dit,

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \quad \exists!\,(a,b) \in \mathbb{C}^2 \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = a(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + b(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Les scalaires a et b appartiennent à $\mathbb{C}$. Ce sont les coordonnées de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\mathcal{B} = \big((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. Déterminons a et b. Comme nous l'avons déjà fait plus haut, la méthode consiste à écrire l'égalité $u_n = ar_1^n + br_2^n$ pour deux valeurs particulières parmi toutes les valeurs autorisées de n (on a l'embarras du choix puisque $n \in \mathbb{N}$). Ainsi, en prenant $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système 2×2

$$\begin{cases} u_0 = a + b & (n = 0) \\ u_1 = ar_1 + br_2 & (n = 1) \end{cases}$$

dont on déduit les expressions de a et de b suivantes $a = (u_1 - u_0r_2)/(r_1 - r_2)$ et $b = (u_0r_1 - u_1)/(r_1 - r_2)$. Remarquons qu'elles sont données en fonction de u_0, u_1, r_1 et r_2. On peut ainsi décomposer toute suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{u_1 - u_0r_2}{r_1 - r_2}(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \frac{u_0r_1 - u_1}{r_1 - r_2}(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2 - Plaçons-nous maintenant dans le cas où $p^2 - 4q = 0$ et $q \neq 0$. Cherchons une suite géométrique $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à F. Si elle existe, elle vérifie nécessairement

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s^{n+2} + ps^{n+1} + qs^n = 0$$

d'où $s^2+ps+q = 0$. Puisque $p^2-4q = 0$, l'équation caractéristique $r^2+pr+q = 0$ possède une unique racine complexe double. Notons-la s. Elle est donnée par $s = -p/2$ et elle est non nulle puisque $p^2 = 4q \neq 0$. L'existence de la suite géométrique $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est établie. L'unicité de cette suite se déduit de l'unicité de son écriture. Considérons à présent une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque dans F :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0.$$

Copyrighted material

En posant $u_n = s^n \times v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s^{n+2}v_{n+2} + ps^{n+1}v_{n+1} + qs^n v_n = 0$$

dont on déduit (puisque $s = -p/2$ et $p^2 - 4q = 0$, c'est-à-dire $q = p^2/4$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{p^2}{4}v_{n+2} - \frac{p^2}{2}v_{n+1} + \frac{p^2}{4}v_n = 0.$$

En simplifiant par $p^2/4$, on obtient $v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit

$$v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n = \ldots = v_1 - v_0,$$

d'où $v_{n+1} = v_n + v_1 - v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 + n\,(v_1 - v_0)\,.$$

En revenant à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = s^n \times v_n$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 s^n + \left(\frac{u_1}{s} - u_0\right) n s^n$$

car $v_0 = u_0$, $v_1 = u_1/s$. Pour montrer que la famille $\mathcal{C}$ constituée des deux suites $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(ns^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de F, il suffit de montrer que c'est une famille libre. La relation de liaison $\alpha(s^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(ns^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_E$ s'écrit encore

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha s^n + \beta n s^n = 0.$$

En particulier, en choisissant $n = 0$, on obtient $\alpha = 0$; en choisissant $n = 1$, on obtient $\alpha s + \beta s = 0$. On déduit immédiatement $\beta = 0$. Par conséquent, la famille $\mathcal{C}$ est libre et constitue une base de F :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \quad \exists!\,(a', b') \in \mathbb{C}^2 \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = a'(s^n)_{n\in\mathbb{N}} + b'(ns^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Les scalaires a' et b' sont les coordonnées de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\mathcal{C} = \big((s^n)_{n\in\mathbb{N}}, (ns^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. D'après les calculs précédents, on a

$$a' = u_0 \qquad \text{et} \qquad b' = \frac{u_1}{s} - u_0.$$

Remarquons qu'elles sont données en fonction de u_0, u_1 et s.

Solution de l'exercice 8

1 - On vérifie facilement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f^2 = -f &\iff \forall \boldsymbol{x} \in E\ f^2(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}) \\ &\iff \forall \boldsymbol{x} \in E\ f^2(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E \\ &\iff \forall \boldsymbol{x} \in E\ f(f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E \\ &\iff \forall \boldsymbol{x} \in E\ f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f. \end{aligned}$$

Copyrighted material

2 - On vérifie trivialement que $(-\mathrm{id}_E)\circ(-\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E = -(-\mathrm{id}_E)$. L'application $f = -\mathrm{id}_E$ est bien évidemmment bijective puisque l'application identité est elle-même bijective.

3 - On a $f \neq -\mathrm{id}_E$: il existe $\boldsymbol{x}_0 \in E$ tel que $f(\boldsymbol{x}_0) \neq (-\mathrm{id}_E)(\boldsymbol{x}_0)$, c'est-à-dire tel que $f(\boldsymbol{x}_0) \neq -\boldsymbol{x}_0$. Autrement dit,

$$\exists \boldsymbol{x}_0 \in E \quad f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}_E.$$

D'après la question 1, tout vecteur de la forme $f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}$ (avec $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de E) appartient au noyau de f. C'est donc *a fortiori* vrai pour le vecteur $\boldsymbol{x}_0$. Remarquons que l'existence de ce vecteur $\boldsymbol{x}_0$ vérifiant $f(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}_E$ nous assure que le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\mathbf{0}_E\}$. Par conséquent, f n'est pas injective. Puisque la propriété de bijectivité entraîne celle d'injectivité, on en déduit (par contraposition) que f n'est pas bijective.

4 - Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur de E. Pour montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$, il faut montrer qu'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}\, f$ et qu'il existe $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}\, f$ tels que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. D'après la question 1, c'est immédiat puisque pour tout $\boldsymbol{x} \in E$ on peut écrire

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x})}_{=\boldsymbol{u}} + \underbrace{(-f(\boldsymbol{x}))}_{=\boldsymbol{v}}$$

avec $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Ker}\, f$ et $\boldsymbol{v} = -f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, f$. Si $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$, on a d'une part $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$ (puisque $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f$) et d'autre part il existe un vecteur $\boldsymbol{z} \in E$ tel que $f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}$ (puisque $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\, f$). Montrons que le vecteur $\boldsymbol{x}$ est nécessairement égal à $\mathbf{0}_E$. On a

$$\mathbf{0}_E = f(\boldsymbol{x}) = f(f(\boldsymbol{z})) = -f(\boldsymbol{z}) = -\boldsymbol{x}$$

où on a utilisé $f^2 = -f$. Finalement, puisque l'on a à la fois $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{\mathbf{0}_E\}$, les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E, c'est-à-dire $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Copyrighted material

Copyrighted material

CHAPITRE 10

Les matrices

Dans cette partie, tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces de dimensions finies sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.[1]

10.1 Calcul matriciel

10.1.1 Définition d'une matrice

Définition 10.1 *Soient n et p deux entiers, $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$. Une* **matrice** A **de type** (n,p) **sur** $\mathbb{K}$ *est un tableau à n lignes et p colonnes constitué d'éléments appartenant au corps $\mathbb{K}$:*

$$\mathrm{A} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

On la note aussi $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$ où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ est l'élément correspondant à la i-ième ligne et à la j-ième colonne du tableau. Cet élément s'appelle un **terme** *(ou un* **coefficient***) de la matrice A. On note*

$$\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

l'ensemble des matrices rectangulaires à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle **rangée de** A *toute ligne ou toute colonne de A.*

Le mot « matrice » (*matrix* en anglais) a été introduit par James Sylvester en 1850 pour désigner des tableaux de nombres.

Au lieu de « A est une matrice de type (n,p) », on dit parfois « A est une matrice $n \times p$ ».

[1] On note $+_{\mathbb{K}}$ et $\times_{\mathbb{K}}$ l'addition et la multiplication sur $\mathbb{K}$. Nous les noterons aussi $+$ et $\times$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté avec d'autres lois.

Copyrighted material

SYLVESTER, James Joseph (1814, Londres - 1897, Londres).

Avocat et ami intime de Cayley, Sylvester se consacra très vite aux mathématiques. Une part importante de ses travaux, en collaboration avec Cayley, portent sur le calcul matriciel et, en particulier, sur son utilisation qu'il juge relativement pratique pour le calcul des déterminants. En 1877 il accepta une chaire à l'Université Johns Hopkins (États-Unis d'Amérique) et fonda *the American Journal of Mathematics*, le premier journal de mathématiques des États-Unis. Il enseigna aussi les mathématiques à l'Université d'Oxford.

Lorsqu'on écrit

$$\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p},$$

la notation indicielle a la signification suivante : le premier indice (ici i) est l'indice correspondant aux lignes et le second indice (ici j) est celui correspondant aux colonnes. La notation indicielle a la même signification pour la notation « $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ». On a

$$\begin{array}{c} \\ \textit{ligne } i \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \textit{colonne } j \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{array} \right) \end{array} .$$

On a les définitions suivantes.

Définition 10.2 *Soit* A *une matrice de type* (n, p) *sur* $\mathbb{K}$.

✗ *Si* $n = p$ *alors* A *est dite* **carrée d'ordre** n *et on note* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *On appelle* **diagonale principale** *d'une matrice carrée d'ordre* n $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *le* n*-uplet*

$$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{K}^n.$$

✗ *Si* $p = 1$ *alors* A *appartient à* $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et est appelée* **matrice-colonne**.

✗ *Si* $n = 1$ *alors* A *appartient à* $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ *et est appelée* **matrice-ligne**.

Une matrice-colonne (respectivement une matrice-ligne) est appelée parfois abusivement un vecteur-colonne (resp. un vecteur-ligne).

Exemples

1. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\mathrm{i} & 1 \\ 3 & -\mathrm{i} & 1/2 + 5\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C})$. C'est une matrice rectangulaire.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. C'est une matrice carrée, d'ordre 2 et de diagonale principale $(2, -1) \in \mathbb{R}^2$.

Copyrighted material

3. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. C'est une matrice-colonne.

4. $\begin{pmatrix} -2 & 1/2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{1,3}(\mathbb{Q})$. C'est une matrice-ligne.

Définition 10.3 *Soient* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$ *et* $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$ *deux matrices de même type* (n, p) *sur* $\mathbb{K}$. A *et* B *sont* **égales**, *et on note* $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, *si on a*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\} \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

Définition 10.4 ✗ *On note* $0_{n,p}$ *la matrice rectangulaire de type* (n, p) *dont tous les coefficients sont nuls. On l'appelle* **matrice nulle** *de* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

✗ *On note* I_n *la matrice carrée d'ordre* n *dont les coefficients diagonaux sont égaux à* 1 *et les autres coefficients égaux à* 0. *On l'appelle* **matrice identité** *(ou* **unité***) d'ordre* n.

Autrement dit,

$$0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que, contrairement à la matrice I_n qui est carrée, la matrice $0_{n,p}$ est rectangulaire si $n \neq p$. Si $n = p$, on la note plus simplement 0_n. On note souvent

$$\mathrm{I}_n = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

où δ_{ij} est le ***symbole de Kronecker*** défini par

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

Définition 10.5 *Soit* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *une matrice carrée d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *On dit que* A *est* **diagonale** *si tous ses coefficients situés en dehors de la diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire si*

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \quad (\, i \neq j \implies a_{ij} = 0 \,).$$

On la note parfois $\mathrm{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. *En particulier, on dit que* A *est une* **matrice-scalaire** *si* $\mathrm{A} = \mathrm{diag}\,(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Copyrighted material

Définition 10.6 *Soit* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *une matrice carrée d'ordre* n *à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

✗ *On dit que* A *est* **triangulaire supérieure** *si tous ses coefficients situés au-dessous de la diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire si*

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \quad (\, i > j \implies a_{ij} = 0 \,).$$

✗ *On dit que* A *est* **triangulaire inférieure** *si tous ses coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire si*

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \quad (\, i < j \implies a_{ij} = 0 \,).$$

Une matrice triangulaire supérieure $\mathrm{T}_{\mathrm{sup}} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et une matrice triangulaire inférieure $\mathrm{T}_{\mathrm{inf}} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ s'écrivent

$$\mathrm{T}_{\mathrm{sup}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_{\mathrm{inf}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En particulier, une matrice diagonale $\mathrm{D} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. Elle s'écrit

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{not.}{=} \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

10.1.2 Opérations sur les matrices

CAYLEY, Arthur (1821, Richmond (Angleterre) - 1895, Cambridge).

Avocat de formation, il fut Professeur de mathématiques à l'Université de Cambridge et membre de la Royal Society of London (l'équivalent anglais de l'Académie des Sciences). Il publie en 1858 un article intitulé *Memoir on the Theory of Matrices*, jugé comme fondateur, sur le calcul matriciel. Dans cet article, sont exposées formellement les différentes opérations algébriques définies sur l'ensemble des matrices, comme la somme et le produit de deux matrices, l'inverse et la puissance d'une matrice.

Copyrighted material

Addition de matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition 10.7 ✗ *Soient* $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant p}$ *et* $B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant p}$ *deux matrices de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$. *On appelle* **somme de** A **et** B, *et on note* $A+B$, *la matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$ *définie par*[(2)]

$$A+B \overset{déf.}{=} (a_{ij} +_{\mathbb{K}} b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant p}.$$

✗ *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant p}$ *une matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$ *et* $\alpha\in\mathbb{K}$. *On appelle* **produit de** A **par** α, *et on note* $\alpha\cdot A$ *ou* αA, *la matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$ *définie par :*

$$\alpha\cdot A \overset{déf.}{=} (\alpha \times_{\mathbb{K}} a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant p}.$$

Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$

L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition possède une structure de groupe commutatif. En effet, l'addition définit une loi de composition interne sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (car l'addition de deux matrices de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ est encore une matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$) et on peut vérifier que

- l'addition est associative puisque pour tous $A,B,C\in M_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$A+(B+C)=(A+B)+C,$$

- l'élément neutre pour l'addition est la matrice $0_{n,p}$ car

$$\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K})\quad A+0_{n,p}=0_{n,p}+A=A,$$

- l'opposé de $A=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant p}$ est $-A=(-a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant p}$ car

$$\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K})\quad A+(-A)=(-A)+A=0_{n,p}.$$

De plus l'addition est commutative :

$$\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K})\quad \forall B\in M_{n,p}(\mathbb{K})\quad A+B=B+A.$$

La multiplication d'une matrice de type (n,p) par un élément de $\mathbb{K}$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{K}$. On vérifie que la loi externe $\cdot$ possède les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lllll}
\forall\alpha\in\mathbb{K} & \forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}) & \forall B\in M_{n,p}(\mathbb{K}) & \alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B,\\
& \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2 & \forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}) & (\alpha+_{\mathbb{K}}\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A,\\
& \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2 & \forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}) & \alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\times_{\mathbb{K}}\beta)\cdot A,\\
& & \forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}) & 1_{\mathbb{K}}\cdot A=A.
\end{array}$$

(2) On ne somme que des matrices de même type.

Copyrighted material

Par conséquent, l'ensemble $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition et de la multiplication par un élément de $\mathbb{K}$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Remarque Toute matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se décompose sous la forme

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\cdot \mathrm{E}_{ij}$$

où E_{ij} désigne la matrice de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls à l'exception du terme placé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne, qui vaut 1. Il est clair qu'une telle décomposition est unique. Par conséquent, les matrices E_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$, appelées ***matrices élémentaires***, forment une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique, de cardinal égal à $n \times p$. Ainsi,

$$\dim_{\mathbb{K}}\Big(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})\Big) = n \times p.$$

Les coefficients a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$, sont les coordonnées de la matrice A dans la base canonique de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Multiplication de matrices

Définissons à présent le produit de deux matrices.

Définition 10.8 *Soient* A *une matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$ *et* B *une matrice de type* (p,q) *sur* $\mathbb{K}$ *telles que*

$$\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q}.$$

On appelle **produit de** A **et** B, *et on note* $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ *ou* AB, *la matrice de type* (n,q) *sur* $\mathbb{K}$ *définie par* $\mathrm{A}\times\mathrm{B} = (c_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant q}$ *avec*

$$c_{ij} \overset{\textit{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}.$$

Le produit $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ n'est défini que si le nombre de colonnes de la première matrice (ici A) est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice (ici B). On retiendra le schéma suivant :

$$\text{matrice de type } (n,\boldsymbol{p}) \ \times\ \text{matrice de type } (\boldsymbol{p},q) \ =\ \text{matrice de type } (n,q).$$

Comme l'illustre l'exemple suivant, le produit $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ peut exister sans que le produit $\mathrm{B}\times\mathrm{A}$ existe.

Exemple Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ 1 & 2 \\ -\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ alors

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} & \mathrm{i}+4 \\ \mathrm{i} & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{C}).$$

Copyrighted material

En revanche, le produit B × A n'est pas défini car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A.

Disposition pratique

En pratique, pour effectuer le produit A × B, on utilise la disposition suivante :

$$\begin{array}{c} \\ \\ \textbf{\textit{p lignes}} \left\{ \right. \\ \\ \textit{ligne } i \rightarrow \end{array} \overbrace{\begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ip} \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}}^{\textbf{\textit{p colonnes}}} \begin{array}{c} \textit{colonne } j \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc} & b_{1j} & \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{ccc} & \cdots & \\ \vdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} & \vdots \\ & \cdots & \end{array} \right) \end{array}$$

qui permet de repérer visuellement les sommes et produits à effectuer pour calculer le coefficient c_{ij}.

Proposition 10.1 *Soient n, p, q et m quatre entiers naturels non nuls.*

✗ *Pour tout* A *appartenant à* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et pour tous* B *et* C *appartenant à* $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *on a :*

$$\mathrm{A} \times (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{A} \times \mathrm{B} + \mathrm{A} \times \mathrm{C}.$$

✗ *Pour tous* B *et* C *appartenant à* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et pour tout* A *appartenant à* $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *on a :*

$$(\mathrm{B} + \mathrm{C}) \times \mathrm{A} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} + \mathrm{C} \times \mathrm{A}.$$

✗ *Pour tout* A *appartenant à* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *pour tout* B *appartenant à* $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et pour tout* C *appartenant à* $\mathrm{M}_{q,m}(\mathbb{K})$, *on a :*

$$\mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C}.$$

Démonstration Chacune des démonstrations est longue mais ne présente pas de difficulté. Il suffit de revenir à la définition des lois + et × et de travailler sur les éléments de ces matrices. On s'attachera à bien justifier chacune des sommes matricielles et chacun des produits matriciels que l'on écrit. □

Remarque On vérifie facilement que le produit de deux matrices diagonales d'ordre n est une matrice diagonale d'ordre n. Autrement dit,

$$\mathrm{diag}\,(a_{11}, \ldots, a_{nn}) \times \mathrm{diag}\,(b_{11}, \ldots, b_{nn}) = \mathrm{diag}\,(a_{11} \times b_{11}, \ldots, a_{nn} \times b_{nn}).$$

Copyrighted material

10.1.3 Transposition de matrices

Définition 10.9 *Soit* A *une matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$. *On appelle* **matrice transposée de** A *et on note* A^T, *la matrice de type* (p,n) *sur* $\mathbb{K}$ *obtenue à partir de* A *en échangeant les lignes et les colonnes.*

Si A est une une matrice de type (n,p) alors sa transposée, la matrice A^T, est une matrice rectangulaire dont le type (p,n) est *a priori* différent de celui de A, sauf si $n=p$. Par exemple,

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 1/2 & 3\mathrm{i} \\ 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^T=\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 4 \\ \sqrt{2} & 3\mathrm{i} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C}).$$

En particulier, si A est une matrice carrée d'ordre n alors A^T est aussi une matrice carrée d'ordre n.

Remarques

1. Si A est une matrice-ligne alors A^T est une matrice-colonne. Réciproquement, si A est une matrice-colonne alors A^T est une matrice-ligne. Par exemple,

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}^T=\begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout entier k compris entre 1 et p, la matrice-ligne formée de la k-ième ligne extraite de A^T est égale à la transposée de la matrice-colonne formée de la k-ième colonne C_k extraite de A. Schématiquement,

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathrm{C}_1 & \mathrm{C}_2 & \cdots & \mathrm{C}_p \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}^T=\begin{pmatrix} — & \mathrm{C}_1^T & — \\ — & \mathrm{C}_2^T & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & \mathrm{C}_p^T & — \end{pmatrix}.$$

De même, pour tout entier ℓ compris entre 1 et n, la matrice-colonne formée de la ℓ-ième colonne extraite de A^T est égale à la transposée de la matrice-ligne formée de ℓ-ième ligne L_ℓ extraite de A. Schématiquement,

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} — & \mathrm{L}_1 & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & \mathrm{L}_n & — \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}^T=\begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \mathrm{L}_1^T & \cdots & \mathrm{L}_n^T \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}.$$

3. Toute matrice diagonale est sa propre matrice transposée. En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{I}_n^T=\mathrm{I}_n.$$

Copyrighted material

On a les propriétés suivantes.

Proposition 10.2 *Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls.*

1. $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad (A^T)^T = A.$

2. $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad (A+B)^T = A^T + B^T.$

3. $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad (\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T.$

4. $\forall A \in M_{n,q}(\mathbb{K}) \quad \forall B \in M_{q,p}(\mathbb{K}) \quad (A \times B)^T = B^T \times A^T.$

Démonstration Il suffit de revenir à la définition de la transposée d'une matrice. La démonstration pour chacune des trois premières propriétés est aisée (la rédaction est laissée en exercice). Montrons la quatrième propriété. Soient A une matrice de type (n,q) et B une matrice de type (q,p). Le produit $A \times B$ a un sens. C'est une matrice de type (n,p). En notant $A = (a_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant q}$ et $B = (b_{kj})_{1 \leqslant k \leqslant q,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$, on a

$$A \times B = \left(c_{ij}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p} \quad \text{avec} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}.$$

On en déduit que la matrice $(A \times B)^T$ est de type (p,n) et on a

$$(A \times B)^T = \left(c'_{ij}\right)_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n} \quad \text{avec} \quad c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{q} a_{jk} b_{ki}. \tag{1}$$

La matrice B^T est de type (p,q) et la matrice A^T de type (q,n). Le produit $B^T \times A^T$ a donc un sens. C'est une matrice de type (p,n). En notant

$$B^T = (b'_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant k \leqslant q} \qquad \text{et} \qquad A^T = (a'_{kj})_{1 \leqslant k \leqslant q,\ 1 \leqslant j \leqslant n},$$

on a

$$B^T \times A^T = \left(d_{ij}\right)_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n} \quad \text{avec} \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{q} b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{q} b_{ki} a_{jk} \tag{2}$$

puisque $b'_{ik} = b_{ki}$ et $a'_{kj} = a_{jk}$, et en comparant (1) et (2), on en déduit que $d_{ij} = c'_{ij}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. On a ainsi vérifié l'égalité matricielle $B^T \times A^T = (A \times B)^T$. □

Définition 10.10 *Soit* A *une matrice carrée*[3] *sur* $\mathbb{K}$.

✗ *On dit que* A *est une matrice* **symétrique** *si* $A^T = A$.

✗ *On dit que* A *est une matrice* **antisymétrique** *si* $A^T = -A$.

[3] Il est clair que cela n'a pas de sens de parler de matrice symétrique (ou de matrice antisymétrique) pour des matrices non carrées.

Copyrighted material

Autrement dit, la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $M_n(\mathbb{K})$ est symétrique lorsque

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \quad a_{ji} = a_{ij}.$$

De même, la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $M_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique lorsque

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \quad a_{ji} = -a_{ij}.$$

On vérifie facilement que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nécessairement tous nuls.

Exemples

1. La matrice $\begin{pmatrix} 2+3\mathrm{i} & 3 & -\mathrm{i} \\ 3 & \sqrt{2} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{C})$ est symétrique.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i} & 0 \\ -1+\mathrm{i} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{C})$ est antisymétrique.

Sous-espaces supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$

On vérifie facilement que toute matrice carrée peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. En effet,

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}) \quad M = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(M + M^T\right)}_{=S} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(M - M^T\right)}_{=A} \tag{3}$$

où $S = \frac{1}{2}\left(M + M^T\right)$ est une matrice symétrique et où $A = \frac{1}{2}\left(M - M^T\right)$ est une matrice antisymétrique puisque

$$S^T = \left(\tfrac{1}{2}\left(M + M^T\right)\right)^T = \tfrac{1}{2}\left(M^T + (M^T)^T\right) = \tfrac{1}{2}\left(M^T + M\right) = S,$$

$$A^T = \left(\tfrac{1}{2}\left(M - M^T\right)\right)^T = \tfrac{1}{2}\left(M^T - (M^T)^T\right) = \tfrac{1}{2}\left(M^T - M\right) = -A.$$

On a, par exemple, dans $M_3(\mathbb{R})$ la décomposition suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Désignons par $S_n(\mathbb{K})$ (respectivement par $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ces deux ensembles constituent deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace $M_n(\mathbb{K})$ (c'est immédiat en utilisant les propriétés de la transposition). On vérifie facilement que la seule matrice qui soit à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle d'ordre n, c'est-à-dire que

$$S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{0_n\}. \tag{4}$$

Les deux propriétés (3) et (4) suffisent à montrer que les deux sous-espaces $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$, ce que l'on note

$$S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K}).$$

Copyrighted material

10.1.4 Cas particulier des matrices carrées

Intéressons-nous à présent à l'ensemble des matrices carrées.

Structure d'anneau sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

Vérifions que $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, muni de l'addition et de la multiplication possède une structure d'anneau. D'après ce que nous avons dit pour $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (voir la remarque p. 398), $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ muni de l'addition est un groupe commutatif. Contrairement au cas des matrices rectangulaires de type (n,p) pour lesquelles la multiplication n'est pas définie si $n \neq p$, la multiplication de deux matrices carrées est bien définie. Le produit de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice carrée d'ordre n. La multiplication définit ainsi une seconde loi de composition interne sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, on vérifie les points suivants.

- La multiplication est distributive par rapport à l'addition : pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{A} \times (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{A} \times \mathrm{B} + \mathrm{A} \times \mathrm{C} \quad \text{et} \quad (\mathrm{B} + \mathrm{C}) \times \mathrm{A} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} + \mathrm{C} \times \mathrm{A}.$$

- La multiplication est associative : pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C}.$$

- La matrice I_n est l'élément neutre pour la multiplication :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{I}_n \times \mathrm{A} = \mathrm{A} \times \mathrm{I}_n = \mathrm{A}.$$

Contrairement à l'addition, la multiplication de deux matrices carrées n'est pas commutative pour $n \geqslant 2$. Par exemple, considérons les deux matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}\times\mathrm{B}} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{B}\times\mathrm{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}}.$$

L'ensemble structuré $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est donc pas un anneau commutatif (sauf si $n = 1$).[4] On veillera donc à manipuler le produit matriciel avec précaution.

[4] Le fait que la multiplication dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ne soit pas commutative lorsque $n \geqslant 2$ n'exclut cependant pas l'existence de matrices qui permutent entre elles. Par exemple, on vérifie facilement qu'une matrice-scalaire permute avec n'importe quelle matrice carrée du même ordre. Autrement dit,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \quad (\lambda \cdot \mathrm{I}_n) \times \mathrm{A} = \mathrm{A} \times (\lambda \cdot \mathrm{I}_n).$$

Copyrighted material

De plus, si $n \geqslant 2$ alors le produit de deux matrices peut être nul sans que l'une des deux matrices soit nulle. Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0_2},$$

c'est-à-dire le produit $A \times B$ est nul, et pourtant, ni la matrice A, ni la matrice B ne sont nulles. Ainsi, lorsque $n \geqslant 2$, l'anneau $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ possède des diviseurs de zéro. Ce n'est donc pas un anneau intègre.

Puissance k-ième d'une matrice

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $A^0 = I_n$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad A^k \overset{not.}{=} \overbrace{A \times A \times \ldots \times A}^{k \text{ fois}}$$

et la matrice A^k s'appelle ***puissance k-ième de*** A. On vérifie facilement les trois propriétés suivantes.

Proposition 10.3 *Soit* A *une matrice carrée à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

1. $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall k' \in \mathbb{N} \quad A^k \times A^{k'} = A^{k+k'}$;
2. $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall k' \in \mathbb{N} \quad \left(A^k\right)^{k'} = A^{k \times k'}$;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\alpha \cdot A)^k = \alpha^k \cdot A^k$.

Démonstration Il suffit de revenir à la définition de la puissance k-ième d'une matrice. La démonstration est laissée en exercice. □

Il est à noter qu'en général, lorsque la matrice A est d'ordre n avec $n \geqslant 2$, il n'y a pas de lien immédiat entre les coefficients de A^k et ceux de A (sauf pour $k = 1$ bien sûr). Ainsi, les coefficients de A^k ne s'obtiennent pas en élevant à la puissance k les coefficients de A. C'est pourtant ce qui se produit pour les matrices diagonales. En effet, on vérifie, par récurrence sur k, que si

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = \operatorname{diag}\left(a_{11}^k, a_{22}^k, \ldots, a_{nn}^k\right).$$

Copyrighted material

ATTENTION Si A et B désignent deux matrices carrées du même ordre, alors, *a priori*, les matrices $(A \times B)^2$ et $A^2 \times B^2$ ne sont pas égales. En effet, la multiplication n'étant pas commutative,

$$(A \times B)^2 = (A \times B) \times (A \times B) \neq A^2 \times B^2,$$

et plus généralement, $(A \times B)^k \neq A^k \times B^k$ pour tout entier $k \geqslant 2$. En revanche, il est clair que si A et B désignent deux matrices qui commutent entre elles, c'est-à-dire si $A \times B = B \times A$, alors $(A \times B)^2 = A^2 \times B^2$, ou, plus généralement $(A \times B)^k = A^k \times B^k$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

Matrice nilpotente

La définition suivante est cohérente avec celle donnée pour une application linéaire (voir la définition 9.3, p. 363).

Définition 10.11 *Une matrice carrée* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *est* **nilpotente** *si*

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = 0_n.$$

*L'**indice de nilpotence de** A est l'entier non nul p défini par*

$$p \overset{\text{déf.}}{=} \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid A^k = 0_n\}.$$

Exemple La matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie ci-dessous est nilpotente et son indice de nilpotence est 3 car

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Formule du binôme de Newton dans $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Considérons deux matrices carrées A et B, toutes les deux d'ordre n. Commençons par développer l'expression $(A + B)^2$. On a

$$(A + B)^2 = (A + B) \times (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Si on suppose que les matrices A et B commutent alors on a :

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Poursuivons en développant l'expression $(A + B)^3$. On a

$$\begin{aligned} (A + B)^3 &= (A + B) \times (A + B)^2 \\ &= (A + B) \times (A^2 + AB + BA + B^2) \\ &= A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3. \end{aligned}$$

Copyrighted material

Si on suppose que les matrices A et B commutent alors on a :

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

Plus généralement, on a le résultat suivant qui se démontre par récurrence sur le même principe (voir la démonstration de la proposition 2.12, p. 72).

Proposition 10.4 (Formule du binôme de Newton) *Soient* A *et* B *deux matrices de* $M_n(\mathbb{K})$. *Si les matrices* A *et* B **commutent**, *c'est-à-dire si*

$$A \times B = B \times A,$$

alors, pour tout m *appartenant à* $\mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot A^k \times B^{m-k} \quad \text{où} \quad C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}.$$

Comme l'illustre l'exercice suivant, la formule du binôme de Newton peut s'avérer utile en pratique pour calculer les puissances d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ dès lors que celle-ci s'écrit sous la forme suivante

$$A = \alpha \cdot I_n + \beta \cdot B \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

où les puissances de la matrice B s'obtiennent facilement (par exemple, B est nilpotente), puisque pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$(\alpha \cdot I_n) \times (\beta \cdot B) = (\beta \cdot B) \times (\alpha \cdot I_n).$$

Exercice 1 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ *et* $B = A - I_3$.

1 - Calculer B^k *pour* $k = 1, 2, 3$. *En déduire l'expression de* A^n, $n \in \mathbb{N}$.
2 - Montrer que A^3 *est une combinaison linéaire de* A^2, A *et* I_3.
3 - En déduire que si $n \geqslant 3$ *alors* A^n *est une combinaison linéaire de* A^{n-1}, A^{n-2} *et* A^{n-3}.

10.2 Matrices et applications linéaires

10.2.1 Matrice associée à une application linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On suppose que

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = p \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{K}}(F) = n.$$

Copyrighted material

Munissons l'espace E d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ et l'espace F d'une base $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$. Puisque la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$) est constituée de vecteurs appartenant à l'espace de départ E (resp. l'espace d'arrivée F), on la qualifie parfois de ***base de départ*** (resp. ***base d'arrivée***). Décomposons chacun des vecteurs $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)$ de F dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$. Pour j variant de 1 à p, on désigne par $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ les coordonnées du vecteur $f(\boldsymbol{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, autrement dit

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(\boldsymbol{e}_1) & = & a_{11}\,\boldsymbol{e}'_1 + a_{21}\,\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + a_{n1}\,\boldsymbol{e}'_n \\ f(\boldsymbol{e}_2) & = & a_{12}\,\boldsymbol{e}'_1 + a_{22}\,\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + a_{n2}\,\boldsymbol{e}'_n \\ \vdots & & \\ f(\boldsymbol{e}_p) & = & a_{1p}\,\boldsymbol{e}'_1 + a_{2p}\,\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + a_{np}\,\boldsymbol{e}'_n \end{array}\right. .$$

On rappelle qu'une application linéaire est entièrement déterminée dès que l'on connaît les images des vecteurs d'une base. Il apparaît ainsi judicieux de regrouper chacun des vecteurs $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)$ (ou plutôt leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$) dans un même tableau, ce dernier caractérisant complètement l'application f.

Cela nous conduit à la définition suivante.

Définition 10.12 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}'$ et f une application linéaire de E dans F.*

✗ *On appelle* **matrice associée à f relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** *la matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ dont la j-ième colonne est constituée par les coordonnées de l'image du j-ième vecteur de la base de départ $\mathcal{B}$ par rapport à la base d'arrivée $\mathcal{B}'$. On la note*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

et on dit que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ représente f dans les bases $\mathcal{B}$,$\mathcal{B}'$.

✗ *En particulier, lorsque $E = F$ on peut choisir $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. Soit f un endomorphisme de E. On appelle* **matrice associée à f relativement à $\mathcal{B}$** *la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. On la note plus simplement*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Avec les notations utilisées, on a de façon symbolique

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_p) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'_n \end{array} .$$

Remarque Pour signifier que la représentation matricielle d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ s'effectue par rapport aux deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, nous avons

Copyrighted material

convenu de noter en indice ces deux bases dans « $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ ». Il est à remarquer l'ordre des deux bases dans cette notation. La première base désigne toujours la base de départ (ici $\mathcal{B}$) et la seconde désigne toujours la base d'arrivée (ici $\mathcal{B}'$). Il faut toujours respecter cet ordre. On pourra retenir le schéma suivant :

$$(E,\mathcal{B}) \xrightarrow{\quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \quad} (F,\mathcal{B}').$$

En revanche, lorsqu'on note « $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ », l'ordre des deux indices n et p dans « $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ » est inversé par rapport à l'ordre des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ dans « $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ ». Le premier indice (ici n) correspond à la dimension de l'espace d'arrivée (ici F) et le second (ici p) à la dimension de l'espace de départ (ici E). Cette notation est, certes, malheureuse mais il s'agit de la notation usuelle.

Exemples

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 muni de la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni de la base $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$. Soit f une application linéaire de E dans F définie par son action sur les deux vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) &= 2\boldsymbol{e}'_1 + 3\boldsymbol{e}'_2 - \boldsymbol{e}'_3 \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_2 + 4\boldsymbol{e}'_3 \end{cases}.$$

La matrice associée à f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est une matrice 3×2 et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{K})$. Elle s'écrit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{array}.$$

Inversons à présent l'ordre des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ de l'espace de départ. On obtient la nouvelle base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)$. Rappelons que l'ordre des vecteurs a une importance dans la définition d'une famille. Les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, bien qu'appartenant au même espace vectoriel, sont donc distinctes. De même, inversons l'ordre des vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$ de l'espace d'arrivée. On obtient la nouvelle base $\mathcal{C}' = (\boldsymbol{e}'_3, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_1)$. Écrivons alors la matrice associée à f relativement à ces deux nouvelles bases. C'est bien sûr encore une matrice 3×2. Elle s'écrit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_1 \end{array}.$$

2. Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, de dimension $n+1$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$, on considère l'endomorphisme

$$\varphi : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto P' \in \mathbb{K}_n[X].$$

Copyrighted material

La matrice associée à φ relativement à $\mathcal{B}$ est une matrice carrée d'ordre $n+1$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. On vérifie

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(1) & = & (1)' = 0 \\ \varphi(X) & = & (X)' = 1 \\ \varphi(X^2) & = & (X^2)' = 2X \\ & \vdots & \\ \varphi(X^n) & = & (X^n)' = nX^{n-1} \end{array}\right. .$$

On en déduit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \dots & \varphi(X^n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} .$$

Comme l'illustre l'exercice 2 ci-après, la représentation matricielle d'un endomorphisme dépend non seulement du choix, mais aussi de l'ordre des deux bases de départ et d'arrivée.

Exercice 2 *Soit f l'endomorphisme qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ défini par :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 & = & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_3 & = & x_1 + x_2 + 2x_3 \end{array}\right. .$$

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux bases $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ et $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ avec

$$\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0) & \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0) & \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1) \\ \boldsymbol{u}_1 = (1,0,-1) & \boldsymbol{u}_2 = (1,-1,0) & \boldsymbol{u}_3 = (1,1,1) \end{array}\right. .$$

Expliciter les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.

Remarques

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On vérifie (c'est immédiat) que la matrice associée à l'application identité $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$ relativement à n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E est la matrice identité d'ordre n. Autrement dit,

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{I}_n.$$

2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$ et f un endomorphisme de E. Si, relativement à la base $\mathcal{B}$, la matrice représentative

Copyrighted material

de f est triangulaire supérieure, alors, relativement à la base $\mathcal{C}$ obtenue à partir de $\mathcal{B}$ en inversant l'ordre des vecteurs, la matrice représentative de f est triangulaire inférieure. Par exemple, avec $n = 4$, si

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ 0 & 0 & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4),$$

alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} t_{44} & 0 & 0 & 0 \\ t_{34} & t_{33} & 0 & 0 \\ t_{24} & t_{23} & t_{22} & 0 \\ t_{14} & t_{13} & t_{12} & t_{11} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{C} = (\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1).$$

10.2.2 Écriture matricielle d'une égalité vectorielle

L'intérêt de connaître la matrice associée à une application linéaire f (relativement à deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$) est de pouvoir réécrire une égalité vectorielle de la forme $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ sous la forme d'une égalité matricielle. Considérons la matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$ associée à l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Décomposons le vecteur $\boldsymbol{x} \in E$ et son image $\boldsymbol{y} \in F$ par f dans leurs bases respectives $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \boldsymbol{e}_j \quad \text{et} \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{e}'_i,$$

et cherchons à exprimer chacune des coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ du vecteur $\boldsymbol{y}$ en fonction des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_p$ du vecteur $\boldsymbol{x}$. Pour cela, commençons par calculer $f(\boldsymbol{x})$. On a

$$f(\boldsymbol{x}) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{p} \left(x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}'_i\right)$$

puisque $f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}'_i$ pour $j = 1, 2, \ldots, p$. Par conséquent,

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij} \boldsymbol{e}'_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij} \boldsymbol{e}'_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right) \boldsymbol{e}'_i.$$

Nous en déduisons l'équivalence suivante

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right) \boldsymbol{e}'_i.$$

Copyrighted material

Par identification des coordonnées (la décomposition d'un vecteur dans une base étant unique), on obtient

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{cases}.$$

Ces relations se nomment ***équations (ou représentation analytique) de f relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$***. Ainsi, en notant X la matrice-colonne constituée des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_p$ du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{B}$

$$\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}),$$

et en notant Y la matrice-colonne constituée des coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ du vecteur $\boldsymbol{y}$ dans la base $\mathcal{B}'$

$$\mathrm{Y} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}),$$

le système d'équations linéaires précédent s'écrit sous la forme matricielle :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

On a donc établi la proposition suivante.

Proposition 10.5 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$, F un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}'$ et f une application linéaire de E dans F. Si $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ alors l'égalité vectorielle*

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$$

s'écrit relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sous la forme matricielle

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$$

où $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est la matrice-colonne constituée des coordonnées de $\boldsymbol{x} \in E$ dans $\mathcal{B}$ et où $\mathrm{Y} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice-colonne constituée des coordonnées de $\boldsymbol{y} \in F$ dans $\mathcal{B}'$.

Copyrighted material

Remarques

1. Remarquons que lorsque l'on écrit $Y = AX$, l'égalité matricielle n'a de sens que dans l'ensemble des matrices de type $(n, 1)$. En effet, à gauche de l'égalité, on trouve la matrice Y qui est une matrice de type $(n, 1)$:

$$Y \in M_{n,1}(\mathbb{K}).$$

C'est une matrice-colonne à n lignes. À droite de l'égalité, on trouve le produit matriciel AX, c'est-à-dire le produit de la matrice A de type (n, p) et de la matrice X de type $(p, 1)$. Le résultat de ce produit matriciel est une matrice de type $(n, 1)$:

$$AX \in M_{n,1}(\mathbb{K}).$$

C'est donc une matrice-colonne à n lignes de type identique à celui de Y.

2. Si $n \neq p$ alors les deux matrices-colonnes X et Y ne sont pas du même type puisque leur nombre de lignes diffère.

Exemple Reprenons l'exemple de l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$, avec E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions respectives 2 et 3, définie par

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) &= 2\boldsymbol{e}'_1 + 3\boldsymbol{e}'_2 - \boldsymbol{e}'_3 \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_2 + 4\boldsymbol{e}'_3 \end{cases}$$

où $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ une base de F. Soient $\boldsymbol{x} \in E$ et $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. Décomposons $\boldsymbol{x}$ dans la base de départ $\mathcal{B}$ et $\boldsymbol{y}$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$. On a

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}'_1 + y_2\boldsymbol{e}'_2 + y_3\boldsymbol{e}'_3.$$

Puisque l'application f est linéaire, on a

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) \\ &= x_1(2\boldsymbol{e}'_1 + 3\boldsymbol{e}'_2 - \boldsymbol{e}'_3) + x_2(\boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_2 + 4\boldsymbol{e}'_3) \\ &= (2x_1 + x_2)\boldsymbol{e}'_1 + (3x_1 - x_2)\boldsymbol{e}'_2 + (-x_1 + 4x_2)\boldsymbol{e}'_3. \end{aligned}$$

L'égalité vectorielle $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ se réécrit alors

$$y_1\boldsymbol{e}'_1 + y_2\boldsymbol{e}'_2 + y_3\boldsymbol{e}'_3 = (2x_1 + x_2)\boldsymbol{e}'_1 + (3x_1 - x_2)\boldsymbol{e}'_2 + (-x_1 + 4x_2)\boldsymbol{e}'_3.$$

En procédant à l'identification des coordonnées, on en déduit les expressions de y_1, y_2, y_3 en fonction de x_1, x_2 :

$$\begin{cases} y_1 &= 2x_1 + x_2 \\ y_2 &= 3x_1 - x_2 \\ y_3 &= -x_1 + 4x_2 \end{cases}.$$

Ce sont les équations de f relativement aux deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Ce système s'écrit aussi sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Copyrighted material

10.2.3 Application canoniquement associée à une matrice

Faisons le point.

- Nous venons de voir que toute application linéaire peut être représentée, relativement à deux bases, sous forme matricielle (à condition, bien sûr, que les espaces de départ et d'arrivée soient tous deux de dimensions finies !).
- Inversement, pouvons-nous affirmer qu'une matrice rectangulaire est toujours la représentation d'une application linéaire ? Le cas échéant, quelle est cette application linéaire ? Quels sont les espaces vectoriels mis en jeu ? Quelles en sont les bases ?

La proposition suivante donne une réponse à ces interrogations.

Proposition 10.6 *Soit* A *une matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$. *Il existe une unique application linéaire de* $\mathbb{K}^p$ *dans* $\mathbb{K}^n$ *admettant* A *pour matrice associée relativement aux bases canoniques. On dit qu'une telle application linéaire est* ***canoniquement*** *associée à la matrice* A.

Démonstration Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrons dans un premier temps l'existence d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ admettant A pour matrice associée relativement aux bases canoniques. Considérons l'application $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ associe le vecteur $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{K}^n$ défini par le système

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ & \vdots & \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{array} \right.$$

avec a_{ij} appartenant à $\mathbb{K}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour $1 \leqslant j \leqslant p$. On a déjà vu (voir la proposition 9.3, p. 361) que f était une application linéaire. On note alors $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Soient $\mathcal{B}_c = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ et $\mathcal{B}'_c = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Exprimons les vecteurs $f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)$ dans la base $\mathcal{B}'_c$. De (S), il vient

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} f(\boldsymbol{e}_1) & = & (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) & = & a_{11}\,\boldsymbol{e}'_1 + a_{21}\,\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + a_{n1}\,\boldsymbol{e}'_n \\ f(\boldsymbol{e}_2) & = & (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}) & = & a_{12}\,\boldsymbol{e}'_1 + a_{22}\,\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + a_{n2}\,\boldsymbol{e}'_n \\ & \vdots & & & \\ f(\boldsymbol{e}_p) & = & (a_{1p}, a_{2p}, \ldots, a_{np}) & = & a_{1p}\,\boldsymbol{e}'_1 + a_{2p}\,\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + a_{np}\,\boldsymbol{e}'_n \end{array} \right.$$

On en déduit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_p) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'_n \end{array}.$$

Copyrighted material

On retrouve précisément la matrice A. On a ainsi vérifié que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f)$. Montrons l'unicité d'une telle application linéaire. Supposons qu'il existe deux applications linéaires f et g de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ admettant A pour matrice associée relativement aux bases canoniques. De

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(g),$$

il vient immédiatement $f(\boldsymbol{e}_j) = g(\boldsymbol{e}_j)$ pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$, c'est-à-dire[5]

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p \quad f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$$

Les deux applications f et g sont donc identiques. L'unicité est démontrée. □

Exemple Reprenons l'exemple de la matrice carrée A de $\mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{K})$, définie par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu (voir p. 409) que cette matrice était la matrice associée à l'application linéaire $\varphi : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto P' \in \mathbb{K}_n[X]$ relativement à la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. C'est aussi la matrice associée à l'application linéaire

$$f_c : (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \longmapsto (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$$

telle que

$$\Big(\forall k \in \{1,2,\ldots,n\} \quad y_k = k \times x_{k+1}\Big) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 0,$$

et ce relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. Les deux applications linéaires $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$ et $f_c : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ sont toutes les deux associées à la matrice A. En revanche, seule l'application f_c est qualifiée d'application canoniquement associée à A.

10.2.4 Propriétés

Proposition 10.7 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Si f et g sont deux applications linéaires de E vers F, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$, alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \beta \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g).$$

En particulier, si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \beta \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g).$$

[5] rappelons qu'une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base

Copyrighted material

Démonstration Il suffit de revenir à la définition d'une matrice associée à une application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ alors $\alpha f+\beta g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Soient $\mathcal{B}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_p)$ une base de E et $\mathcal{B}'=(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\ldots,\boldsymbol{e}'_n)$ une base de F. On note A (resp. B) la matrice de type (n,p) sur $\mathbb{K}$ représentant f (resp. g) dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Par définition, pour tout $j \in \{1,2,\ldots,p\}$,

$$f(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}'_i \quad \text{et} \quad g(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{e}'_i.$$

Puisque $\alpha f+\beta g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, la matrice représentant $\alpha f+\beta g$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est de type (n,p). On note $\mathrm{C}=(c_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ cette matrice. Par définition, pour tout $j \in \{1,2,\ldots,p\}$,

$$(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{e}'_i. \tag{5}$$

Pour déterminer la matrice C, il suffit de calculer $(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{e}_j)$ pour $j \in \{1,2,\ldots,p\}$. On a

$$(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{e}_j)=\alpha f(\boldsymbol{e}_j)+\beta g(\boldsymbol{e}_j)=\alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}'_i+\beta\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{e}'_i,$$

c'est-à-dire

$$(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(\alpha a_{ij}+\beta b_{ij})}_{=c_{ij}}\boldsymbol{e}'_i. \tag{6}$$

De (5) et (6), par identification des coordonnées, il vient que $c_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta b_{ij}$, c'est-à-dire que le coefficient c_{ij} est le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice $\alpha\cdot\mathrm{A}+\beta\cdot\mathrm{B}$. On a ainsi vérifié que

$$\mathrm{C}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\alpha f+\beta g)=\alpha\cdot\mathrm{A}+\beta\cdot\mathrm{B}=\alpha\cdot\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)+\beta\cdot\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g),$$

ce qui termine la démonstration. □

Isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Il existe une bijection entre l'ensemble des applications linéaires de E dans F et l'ensemble des matrices rectangulaires de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est l'application qui à f fait correspondre sa matrice représentative relativement à une base fixée $\mathcal{B}=(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_p)$ de E et une base fixée $\mathcal{B}'=(\boldsymbol{e}'_1,\ldots,\boldsymbol{e}'_n)$ de F :

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) & \longrightarrow & \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\end{array}.$$

Cette application est en effet injective puisque de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$, il vient immédiatement $f(\boldsymbol{e}_j)=g(\boldsymbol{e}_j)$ pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$, c'est-à-dire $f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$. Il est clair qu'elle est aussi surjective puisque

Copyrighted material

pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$. Il suffit en effet de considérer l'application linéaire f définie par

$$\forall j \in \{1,\dots,p\} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

De plus, d'après la proposition 10.7, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ définit un morphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. Remarquons que cet isomorphisme est subordonné au choix des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Il n'est donc pas unique.

Remarque Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces de dimensions finies. Les deux espaces $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $M_{n,p}(\mathbb{K})$ étant isomorphes, ils ont nécessairement la même dimension, ce qui montre que[6]

$$\dim_{\mathbb{K}}\Big(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)\Big) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \times \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Proposition 10.8 *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G. Si f est une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G, alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

En particulier, si $E = F = G$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \mathcal{B}''$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Démonstration Il suffit encore de revenir à la définition d'une matrice associée à une application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,G)$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_q)$ une base de F et $\mathcal{B}'' = (e''_1, e''_2, \dots, e''_n)$ une base de G. On note A la matrice de type (q,p) représentant f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Pour tout $j \in \{1,2,\dots,p\}$,

$$f(e_j) = \sum_{k=1}^{q} a_{kj} e'_k.$$

On note B la matrice de type (n,q) représentant g relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$. On a pour tout $k \in \{1,2,\dots,q\}$

$$g(e'_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} e''_i.$$

[6] Nous avions déjà énoncé ce résultat au chapitre 9, page 356, sans le démontrer.

Copyrighted material

Puisque $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,G)$, la matrice représentant $g \circ f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$ est de type (n,p). On note $\mathrm{C} = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ cette matrice. Pour tout $j \in \{1,2,\ldots,p\}$,

$$(g \circ f)(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \boldsymbol{e}''_i. \tag{7}$$

Pour expliciter les coefficients de la matrice C, il suffit de calculer $(g \circ f)(\boldsymbol{e}_j)$ pour $j \in \{1,2,\ldots,p\}$. On a

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\boldsymbol{e}_j) &= g\left(\sum_{k=1}^{q} a_{kj} \boldsymbol{e}'_k\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{kj} g(\boldsymbol{e}'_k) = \sum_{k=1}^{q} \left(a_{kj} \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \boldsymbol{e}''_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \boldsymbol{e}''_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{ik} a_{kj} \boldsymbol{e}''_i\right).\end{aligned}$$

Nous obtenons pour $j \in \{1,2,\ldots,p\}$

$$(g \circ f)(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{q} b_{ik} a_{kj}\right)}_{= c_{ij}} \boldsymbol{e}''_i. \tag{8}$$

De (7) et (8), par identification des coordonnées, on obtient $c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} b_{ik} a_{kj}$. Il s'agit du coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$. On a ainsi vérifié que

$$\mathrm{C} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f),$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarque De manière symbolique, si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ alors $E \xrightarrow{g \circ f} G$. De la même manière, si

$$(E,\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)} (F,\mathcal{B}') \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)} (G,\mathcal{B}'')$$

alors

$$(E,\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)} (G,\mathcal{B}'').$$

Exemple Soient $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'' = (\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. On considère les deux applications linéaires $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}'_1 - 5\boldsymbol{e}'_2 + 7\boldsymbol{e}'_3 \\ f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}'_1 - 2\boldsymbol{e}'_2 + 3\boldsymbol{e}'_3 \\ f(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{e}'_1 - 3\boldsymbol{e}'_2 - 4\boldsymbol{e}'_3 \\ f(\boldsymbol{e}_4) = 6\boldsymbol{e}'_1 - 2\boldsymbol{e}'_2 - 3\boldsymbol{e}'_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(\boldsymbol{e}'_1) = 2\boldsymbol{e}''_1 + 3\boldsymbol{e}''_2 \\ g(\boldsymbol{e}'_2) = 2\boldsymbol{e}''_1 - 2\boldsymbol{e}''_2 \\ g(\boldsymbol{e}'_3) = \boldsymbol{e}''_1 + \boldsymbol{e}''_2 \end{cases}.$$

Copyrighted material

Soient $\boldsymbol{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$ et $\boldsymbol{y}$ son image par f. Notons x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{B}$ et y_1, y_2, y_3 celles de $\boldsymbol{y}$ dans $\mathcal{B}'$. Relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, l'égalité vectorielle $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ -5 & -2 & -3 & -2 \\ 7 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= (2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4)\boldsymbol{e}'_1 + (-5x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4)\boldsymbol{e}'_2 \\ &\quad +(7x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 3x_4)\boldsymbol{e}'_3. \end{aligned}$$

Considérons à présent le vecteur $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^2$ défini comme l'image par g du vecteur $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^3$. Notons z_1, z_2 les coordonnées de $\boldsymbol{z}$ dans $\mathcal{B}''$. Relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, l'écriture matricielle de l'égalité vectorielle $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y})$ est

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

et on en déduit

$$\boldsymbol{z} = (2y_1 + 2y_2 + y_3)\boldsymbol{e}''_1 + (3y_1 - 2y_2 + y_3)\boldsymbol{e}''_2.$$

Le vecteur $\boldsymbol{z}$ est aussi l'image du vecteur $\boldsymbol{x}$ par l'application composée $g \circ f$. On vérifie

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ -5 & -2 & -3 & -2 \\ 7 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 5 \\ 23 & 10 & 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en utilisant la proposition 10.12, on obtient l'écriture matricielle de l'égalité vectorielle $\boldsymbol{z} = (g \circ f)(\boldsymbol{x})$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 5 \\ 23 & 10 & 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'écriture du vecteur $\boldsymbol{z}$, dans la base $\mathcal{B}''$, en fonction des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{z} = (x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4)\boldsymbol{e}''_1 + (23x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 19x_4)\boldsymbol{e}''_2.$$

Conséquence

Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni de la base $\mathcal{B}$, f un endomorphisme de E et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On vérifie, par récurrence sur k, que si A est la matrice

Copyrighted material

associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$ alors A^k avec $k \in \mathbb{N}^*$ est la matrice associée à l'application composée f^k relativement à la base $\mathcal{B}$ où on a noté

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}} \quad \text{et} \quad f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

Rappelons que, par convention, $A^0 = I_n$ et $f^0 = \mathrm{id}_E$, et que $I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ pour toute base $\mathcal{B}$ de E. On a ainsi l'implication suivante

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) \Big).$$

De plus, on vérifie que si l'endomorphisme f est nilpotent alors la matrice carrée A est nilpotente et de même indice de nilpotence que f.

Exercice 3 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
1 - Montrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice p alors $p \leqslant n$.
2 - Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dite triangulaire supérieure stricte si :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \quad (\, i \geqslant j \implies a_{ij} = 0 \,).$$

Montrer que si A *est triangulaire supérieure stricte alors* A *est nilpotente.*
3 - Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer A^m avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.3 Rang d'une matrice rectangulaire

10.3.1 Définition du rang d'une matrice

La notion de rang a déjà été définie pour une famille finie de vecteurs (voir la définition 8.15, p. 332). Cela nous avait alors permis de définir le rang d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ comme la dimension du sous-espace $\mathrm{Im}\, f$ de F, à la condition que E soit de dimension finie (voir la définition 9.6, p. 375).

Nous définissons maintenant le rang d'une matrice rectangulaire.

Définition 10.13 *On appelle* **rang de la matrice** $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *et on note* $\mathrm{rg}\, A$, *le rang de la famille des p vecteurs correspondant aux colonnes de* A, *dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. En d'autres termes,*

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p)$$

où, pour $j \in \{1,2,\ldots,p\}$, $\boldsymbol{c}_j$ désigne le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique sont rangées dans la j-ième colonne de A.

Copyrighted material

Isomorphisme canonique entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Commençons par rappeler que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension (voir la proposition 9.11, p. 374). Par conséquent, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (puisque $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est lui-même un $\mathbb{K}$-espace de dimension n). Il est relativement aisé d'exhiber un isomorphisme entre E et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Il suffit de munir l'espace E d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ et de considérer l'application notée $\Phi_{\mathcal{B}}$ qui au vecteur $\boldsymbol{x}$ de E associe la matrice-colonne X de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{B}$, autrement dit l'application

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{u}_n \longmapsto \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Un tel isomorphisme $\Phi_{\mathcal{B}}$ n'est bien évidemment pas unique car il est subordonné au choix d'une base $\mathcal{B}$ de E. En particulier, $\mathbb{K}^n$ est isomorphe à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et l'application

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est qualifiée d'isomorphisme canonique car les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ coïncident avec les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{K}^n$. Nous notons $\Phi_{\mathcal{B}_c}$ cet isomoprhisme.

Soient A une matrice sur $\mathbb{K}$ comportant n lignes et p colonnes et $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p$ les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique sont rangées respectivement dans les colonnes $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p$ de A. On a

$$\forall j \in \{1, \ldots, p\} \quad \Phi_{\mathcal{B}_c}(\boldsymbol{c}_j) = \mathrm{C}_j$$

et, puisque $\Phi_{\mathcal{B}_c}$ est un isomorphisme,

$$\mathrm{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p) = \mathrm{rg}\Big(\underbrace{\Phi_{\mathcal{B}_c}(\boldsymbol{c}_1)}_{=\mathrm{C}_1}, \underbrace{\Phi_{\mathcal{B}_c}(\boldsymbol{c}_2)}_{=\mathrm{C}_2}, \ldots, \underbrace{\Phi_{\mathcal{B}_c}(\boldsymbol{c}_p)}_{=\mathrm{C}_p}\Big).$$

Ainsi, le rang de la matrice A est égal au rang de la famille de ses p matrices-colonnes $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p$ considérées comme des vecteurs du $\mathbb{K}$-espace $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on écrit

$$\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \cdots, \mathrm{C}_p).$$

Exemple Soit la matrice rectangulaire $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Copyrighted material

Ce sont deux matrices-colonnes. On a $\operatorname{rg} A = 2$ car les vecteurs $\boldsymbol{c}_1 = (2,4,0)$ et $\boldsymbol{c}_2 = (2,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ associés aux deux matrices-colonnes C_1 et C_2 forment une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

On a le résultat suivant.

Proposition 10.9 *Si* A *est une matrice de type* (n,p) *alors*

$$\operatorname{rg} A \leqslant \min\{n,p\}.$$

Démonstration Pour tout $j \in \{1,2,\ldots,p\}$, on désigne par $\boldsymbol{c}_j$ le vecteur de $\mathbb{K}^n$ correspondant à la j-ième colonne de A. De l'égalité

$$\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_p) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_p)\big),$$

il vient

- d'une part que $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_p) \leqslant p$ puisque les vecteurs $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_p$ ne sont pas nécessairement linéairement indépendants,
- d'autre part que $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_p) \leqslant n$ puisque $\operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_p)$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$.

On a donc $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_p) \leqslant \min\{n,p\}$, c'est-à-dire $\operatorname{rg} A \leqslant \min\{n,p\}$. □

10.3.2 Lien entre le rang d'une matrice et celui d'une application associée

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ une matrice de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

⊵ On considère les deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ munis de leurs bases canoniques respectives $\mathcal{B}_c = (\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_p)$ et $\mathcal{B}'_c = (\boldsymbol{e}'_1,\ldots,\boldsymbol{e}'_n)$. On considère l'application linéaire $f_c : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dont la matrice associée relativement à $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}'_c$ est la matrice A. Autrement dit, $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f_c)$, ou encore, de manière équivalente,

$$\forall j \in \{1,\ldots,p\} \quad f_c(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}'_i. \tag{9}$$

Montrons que le rang de l'application $f_c : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est égal au rang de la matrice A. On rappelle que le rang de f_c est défini comme la dimension du sous-espace $\operatorname{Im} f_c$, ce dernier étant engendré par les images par f_c des vecteurs de la base $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{K}^p$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{Im} f_c = \operatorname{Vect}\big(f_c(\boldsymbol{e}_1), f_c(\boldsymbol{e}_2),\ldots,f_c(\boldsymbol{e}_p)\big).$$

Puisque $\mathcal{B}'_c$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$,

$$\begin{aligned} f_c(\boldsymbol{e}_j) &= a_{1j}\boldsymbol{e}'_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}'_2 + \ldots + a_{nj}\boldsymbol{e}'_n \\ &= a_{1j}(1,0,\ldots,0) + a_{2j}(0,1,\ldots,0) + \ldots + a_{nj}(0,0,\ldots,1) \\ &= (a_{1j},0,\ldots,0) + (0,a_{2j},\ldots,0) + \ldots + (0,0,\ldots,a_{nj}) \\ &= (a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj}). \end{aligned}$$

Copyrighted material

Or $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont les coefficients sont rangés dans la j-ième colonne C_j de la matrice A. Nous l'avons noté $\boldsymbol{c}_j$. Ainsi

$$\operatorname{Im} f_c = \operatorname{Vect}\big(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p\big).$$

De l'égalité de ces deux sous-espaces, on déduit l'égalité de leur dimension :

$$\dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Im} f_c\big) = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p)\big),$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{rg} f_c = \operatorname{rg} \mathrm{A}$$

puisque, par définition, $\operatorname{rg} f_c = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f_c)$ et $\operatorname{rg} \mathrm{A} = \dim_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Vect}(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_p)\big)$.

$\trianglerighteq$ On considère à présent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F tels que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = p$ et $\dim_{\mathbb{K}}(F) = n$, munis des bases $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_n)$, et une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ dont la matrice associée relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est aussi la matrice A, autrement dit telle que $\mathrm{A} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, ou encore, de manière équivalente, telle que

$$\forall j \in \{1, \ldots, p\} \quad f(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{u}'_i. \tag{10}$$

Montrons que l'hypothèse $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}'_c}(f_c) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ permet de conclure que les deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $f_c : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ont même rang. On désigne par Ψ l'isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dans E qui transforme $\mathcal{B}_c$ en $\mathcal{B}$, et par Φ l'isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans F qui transforme $\mathcal{B}'_c$ en $\mathcal{B}'$:

$$\Big(\forall j \in \{1, \ldots, p\} \quad \Psi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{u}_j \Big) \quad \text{et} \quad \Big(\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \Phi(\boldsymbol{e}'_i) = \boldsymbol{u}'_i \Big).$$

Montrons dans un premier temps l'égalité $f = \Phi \circ f_c \circ \Psi^{-1}$, schématisée par

$$\begin{array}{ccc} & f = \Phi \circ f_c \circ \Psi^{-1} & \\ E & \longrightarrow & F \\ \Psi^{-1} \downarrow & & \uparrow \Phi \\ \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & f_c & \end{array}.$$

Soit $j \in \{1, \ldots, p\}$. En utilisant successivement $\Psi^{-1}(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{e}_j$, l'égalité (9), puis la linéarité de Φ et enfin $\Phi(\boldsymbol{e}'_i) = \boldsymbol{u}'_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on vérifie

$$\begin{aligned} \big(\Phi \circ f_c \circ \Psi^{-1}\big)(\boldsymbol{u}_j) &= \Phi\big(f_c(\Psi^{-1}(\boldsymbol{u}_j))\big) = \Phi\big(f_c(\boldsymbol{e}_j)\big) \\ &= \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}'_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Phi(\boldsymbol{e}'_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{u}'_i \end{aligned}$$

d'où, en utilisant l'égalité (10),

$$\big(\Phi \circ f_c \circ \Psi^{-1}\big)(\boldsymbol{u}_j) = f(\boldsymbol{u}_j).$$

Copyrighted material

Les deux applications linéaires $\Phi \circ f_c \circ \Psi^{-1}$ et f sont donc nécessairement identiques puisqu'elles agissent de la même manière sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. De l'égalité des deux applications linéaires f et $\Phi \circ f_c \circ \Psi^{-1}$, on déduit l'égalité de leur rang :

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}\left(\Phi \circ f_c \circ \Psi^{-1}\right),$$

et en remarquant que

$$\operatorname{rg}\left(\Phi \circ f_c \circ \Psi^{-1}\right) = \operatorname{rg}\left(f_c\right)$$

puisque Φ et Ψ sont bijectives[7], on obtient finalement que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f_c$, et donc que

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} \mathrm{A}$$

puisqu'il a été établi plus haut que $\operatorname{rg} f_c = \operatorname{rg} \mathrm{A}$.

On est donc en mesure d'énoncer le résultat suivant.

Proposition 10.10 *Soit* A *une matrice rectangulaire. Si f est une application linéaire de E dans F, avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de la base $\mathcal{B}$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de la base $\mathcal{B}'$, telle que*

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

alors

$$\operatorname{rg} \mathrm{A} = \operatorname{rg} f.$$

Autrement dit, le rang d'une matrice est égal au rang de toute application linéaire dont elle est représentative. Réciproquement, on vérifie que le rang d'une application linéaire est égal au rang de n'importe quelle matrice associée. Cela sous-entend que le rang d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ peut s'effectuer en calculant le rang de la matrice A associée à f relativement à deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et que ce calcul ne dépend pas du choix des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissant A.

10.3.3 Lien entre le rang d'une matrice et celui de sa transposée

Soit A une matrice rectangulaire de type (n, p). Le rang de la famille des p vecteurs-colonnes de A est égal au rang de la famille des n vecteurs-lignes de A puisque le rang d'une matrice et celui de sa matrice transposée sont égaux :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \operatorname{rg}(\mathrm{A}) = \operatorname{rg}\left(\mathrm{A}^T\right).$$

Ce résultat est, pour l'instant, admis.[8] Ainsi, pour calculer le rang d'une matrice rectangulaire $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut soit calculer le rang de la famille

[7] Rappelons que l'on ne change pas le rang d'une application linéaire en composant à droite et à gauche par deux applications linéaires bijectives (voir la proposition 9.14 p. 380 et la remarque p. 380).

[8] Il sera démontré plus loin (voir le corollaire 10.3 p. 447).

Copyrighted material

des n vecteurs-lignes $L_1, \ldots, L_n$ dans l'espace $\mathbb{K}^p$, soit calculer le rang de la famille des p vecteurs-colonnes $C_1, \ldots, C_p$ dans l'espace $\mathbb{K}^n$. On écrit

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \cdots, C_p) = \operatorname{rg}(L_1, \cdots, L_n).$$

Exemple Calculons le rang de la matrice $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Commençons par calculer le rang de la famille des trois vecteurs-lignes L_1, L_2 et L_3 dans l'espace $\mathbb{R}^4$. En effectuant à partir de A les opérations

- *étape* 1 : $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$,
- *étape* 2 : $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2$,

on obtient les matrices A_1 et A_2 suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premiers vecteurs-lignes L_1 et L_2 de A_2 font apparaître un système de zéros échelonnés et le vecteur-ligne L_3 de A_2 est nul. On en déduit que le rang de A_2 est égal à 2, d'où

$$\operatorname{rg}(A) = 2.$$

Calculons à présent le rang de la famille des quatre vecteurs-colonnes C_1, C_2, C_3 et C_4 dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Appliquons la méthode des zéros échelonnés cette fois-ci non pas sur les lignes mais sur les colonnes de A. En effectuant à partir de A les opérations

- *étape* 1 : $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ et $C_4 \longleftarrow C_4 - 2C_1$,
- *étape* 2 : $C_3 \longleftarrow C_3 + C_2$ et $C_4 \longleftarrow C_4 + C_2$,

on obtient les matrices A'_1 et A'_2 suivantes

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A'_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs-colonnes C_3 et C_4 de A'_2 sont nuls et les vecteurs-colonnes C_1 et C_2 de A'_2 font apparaître un système de zéros échelonnés. Ainsi $\operatorname{rg}(A'_2) = 2$ et on retrouve que $\operatorname{rg}(A) = 2$.

Copyrighted material

10.4 Matrices carrées inversibles

10.4.1 Définition d'une matrice inversible

Définition 10.14 ✗ *Une matrice carrée* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *est dite* **inversible** *(on dit aussi* **régulière***) s'il existe une matrice carrée d'ordre* n *sur* $\mathbb{K}$*, notée* A^{-1} *et appelée* **matrice inverse** *de* A*, telle que*[9]

$$A^{-1} \times A = I_n \qquad et \qquad A \times A^{-1} = I_n.$$

On note $GL_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices inversibles d'ordre* n*.*

✗ *Lorsqu'une matrice carrée n'est pas inversible, on dit qu'elle est* **singulière***.*

Observons qu'en notant A^{-1} la matrice inverse de A, cela sous-entend son unicité, ce dont on se convainc facilement. En effet, supposons que A soit une matrice d'ordre n et qu'elle admette deux matrices inverses A' et A''. Alors, puisque A admet A' pour inverse,

$$A \times A' = I_n.$$

Multiplions à gauche cette égalité par A''. On obtient

$$A'' \times A \times A' = A'',$$

d'où, en tenant compte de l'égalité $A'' \times A = I_n$ (puisque A admet aussi A'' pour inverse), $A' = A''$; ceci démontre l'unicité de l'inverse de A et justifie l'unicité de la notation.

Remarques

1. Soit A une matrice d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

- S'il existe une matrice B d'ordre n sur $\mathbb{K}$ telle que $B \times A = I_n$ alors on peut en déduire directement que A est inversible et que son inverse est la matrice B. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire dans ce cas-là de vérifier l'autre égalité, à savoir que $A \times B = I_n$.
- De même, s'il existe une matrice B d'ordre n sur $\mathbb{K}$ telle que $A \times B = I_n$ alors on peut aussi en déduire directement que A est inversible, son inverse étant la matrice B, et il n'est pas nécessaire cette fois-ci de vérifier l'égalité $B \times A = I_n$.

Nous admettons pour l'instant ces deux résultats. Une démonstration en sera donnée plus loin (voir p. 431).

2. Lorsqu'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible, cela signifie qu'il existe n^2 scalaires a'_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ (ce sont les coefficients de A^{-1}) tels que

[9] Cela n'a pas de sens de parler de matrice inversible pour des matrices non carrées.

Copyrighted material

l'on ait l'égalité matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou, de manière équivalente (d'après les règles de calcul sur les matrices), vérifiant les n^2 équations suivantes

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{kj} = \delta_{ij} \tag{11}$$

où on rappelle que le symbole de Kronecker δ_{ij} est défini par

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

Nous verrons à la proposition 10.13 une condition nécessaire et suffisante d'existence des coefficients a'_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Cas des matrices diagonales

Cherchons à quelle condition une matrice diagonale A est inversible, et le cas échéant, calculons sa matrice inverse. La matrice A étant diagonale, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. En tenant compte de ce résultat, (11) se simplifie comme suit

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \quad a_{ii} \times a'_{ij} = \delta_{ij}.$$

Intéressons-nous en particulier aux relations pour lesquelles $i = j$. On a

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad a_{ii} \times a'_{ii} = 1$$

ou, de manière équivalente, $a_{ii} \neq 0$, $a'_{ii} \neq 0$ et $a'_{ii} = 1/a_{ii}$. Intéressons-nous à présent aux relations pour lesquelles $i \neq j$. On a

$$\forall j \in \{1,\ldots,n\} \quad j \neq i \quad a_{ii} \times a'_{ij} = 0,$$

dont on déduit que $a'_{ij} = 0$ pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $j \neq i$, puisque $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. On a ainsi démontré le résultat suivant : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale soit inversible est que tous ses coefficients diagonaux soient non nuls et on a

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{diag}\left(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}\right).$$

Par exemple, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$[10] et on a

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/(1+2\mathrm{i}) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

[10] puisque ses éléments diagonaux sont tous non nuls

Copyrighted material

Il ne faut cependant pas se laisser griser par ce résultat, ni même se laisser abuser par la terminologie employée : à l'exception des matrices diagonales, les coefficients de la matrice inverse de A ne sont pas, en général, les inverses des coefficients de la matrice A. Il n'y a pas de lien immédiat entre les coefficients de A^{-1} et ceux de A. Ainsi, ce n'est pas parce qu'une matrice possède un ou plusieurs coefficients nuls qu'elle est nécessairement singulière. Réciproquement, une matrice dont tous les coefficients sont non nuls n'est pas nécessairement inversible. Les deux exemples donnés ci-dessous illustrent cela.

Exemples

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ car

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. Supposons en effet qu'elle le soit, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou, de manière équivalente, telle que

$$\begin{cases} a'_{11} + a'_{21} &= 1 \\ a'_{11} + a'_{21} &= 0 \\ a'_{12} + a'_{22} &= 0 \\ a'_{12} + a'_{22} &= 1 \end{cases}.$$

Un tel système est bien sûr impossible (par exemple, retrancher la deuxième équation à la première conduit à une absurdité), ce qui montre que A n'est pas inversible.

Remarque Soient A une matrice d'ordre n inversible et A^{-1} son inverse. Comme nous l'avons déjà souligné, le calcul des coefficients de A^{-1} nécessite, en théorie, la résolution d'un système de n^2 équations à n^2 inconnues, ce qui peut sembler vite insurmontable, même pour des valeurs de n petites, car source de multiples erreurs lors des calculs ! Fort heureusement, on remarque (s'en convaincre) que l'équation matricielle

$$A \times A^{-1} = I_n$$

dont l'inconnue est la matrice A^{-1} (une telle équation comporte en fait n^2 inconnues qui sont les coefficients de A^{-1}), se décompose en n équations matricielles

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad A \times C'_j = I_n^{(j)}$$

Copyrighted material

où C'_j désigne la j-ième colonne de A^{-1} et $I_n^{(j)}$ désigne la j-ième colonne de I_n. Notons $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $A^{-1} = (a'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Le calcul de A^{-1} peut donc être mené en résolvant successivement, pour j variant de 1 à n,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{ij} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \longleftarrow j\text{-ième ligne}$$

dont les inconnues sont les n scalaires $a'_{1j}, \ldots, a'_{nj}$ (ce sont les coefficients de la j-ième matrice-colonne extraite de A^{-1}). Il est évident que cette méthode s'avère vite lourde à utiliser dès que n grandit. Nous donnerons plus loin une alternative, basée sur l'interprétation d'une matrice inversible comme une matrice de passage. Cette nouvelle méthode sera plus rapide car elle ne nécessitera la résolution que d'un seul système de n équations à n inconnues (contre la résolution de n systèmes de n équations à n inconnues pour la méthode donnée ci-dessus).

10.4.2 Propriétés

Proposition 10.11 ✗ *Si une matrice carrée* A *est inversible alors sa matrice inverse est elle-même inversible et*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

✗ *Si* A *et* B *sont deux matrices carrées inversibles du même ordre, alors la matrice produit* $A \times B$ *est inversible et son inverse, la matrice* $(A \times B)^{-1}$*, est donnée par*

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$

✗ *Si une matrice carrée* A *est inversible alors sa matrice transposée est elle-même inversible et*[11]

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Démonstration ⊵ Soit A une matrice inversible. D'après la définition 10.14, il est clair que la matrice inverse de A est elle-même inversible, son inverse étant la matrice A.

⊵ Soient A et B deux matrices inversibles d'ordre n. On a

$$\begin{aligned} (B^{-1} \times A^{-1}) \times (A \times B) &= B^{-1} \times (A^{-1} \times A) \times B \quad \text{car } \times \text{ est associative} \\ &= B^{-1} \times I_n \times B \quad \text{car } A^{-1} \text{ est l'inverse de A} \\ &= B^{-1} \times B = I_n \quad \text{car } B^{-1} \text{ est l'inverse de B.} \end{aligned}$$

[11] Rappelons que si une matrice est carrée alors sa matrice transposée est une matrice carrée du même ordre.

Copyrighted material

D'après la remarque effectuée page 425, on en déduit directement que la matrice $A \times B$ est inversible et que son inverse est la matrice $B^{-1} \times A^{-1}$. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de vérifier l'égalité $(A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) = I_n$.

$\trianglerighteq$ Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n. En passant à la transposition dans l'égalité

$$A^{-1} \times A = I_n$$

et en tenant compte que $(I_n)^T = I_n$, on obtient

$$A^T \times (A^{-1})^T = I_n.$$

On en déduit que A^T est inversible et que son inverse est $\left(A^{-1}\right)^T$.[12] □

Structure de groupe pour $\left(GL_n(\mathbb{K}), \times\right)$

L'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est inclus dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n :

$$GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K}).$$

La loi $\times$ (qui est une loi interne sur $M_n(\mathbb{K})$) induit sur $GL_n(\mathbb{K})$ une loi interne puisque, d'après la proposition 10.11, le produit de deux matrices inversibles est encore une matrice inversible. On vérifie les propriétés suivantes.

- La loi $\times$ est associative sur $GL_n(\mathbb{K})$ puisqu'elle l'est sur $M_n(\mathbb{K})$.
- La matrice I_n, qui est l'élément neutre de $M_n(\mathbb{K})$ pour la loi $\times$, est inversible et on a

  $$I_n^{-1} = I_n.$$

  C'est aussi l'élément neutre de $GL_n(\mathbb{K})$ pour la loi induite $\times$.
- Toute matrice A de $GL_n(\mathbb{K})$ possède un symétrique pour la loi $\times$. C'est la matrice inverse A^{-1} puisque $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et

  $$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_n.$$

Attention, la multiplication n'est pas commutative sur $GL_n(\mathbb{K})$ sauf bien sûr pour $n = 1$. Par conséquent, muni de la multiplication, l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ possède une structure de groupe non commutatif (sauf pour $n = 1$). L'ensemble structuré $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est appelé ***groupe linéaire d'ordre*** n sur le corps $\mathbb{K}$ (d'où les initiales).

---

[12] De même, on vérifie aisément que l'implication réciproque est vraie, à savoir que si A^T est inversible alors A est inversible. Un corollaire est que si les vecteurs-colonnes de A forment une famille libre alors les vecteurs-lignes de A forment aussi une famille libre, et réciproquement, résultat que nous connaissions déjà puisque $rg(A) = rg(A^T)$.

Copyrighted material

La matrice associée à une application linéaire bijective est-elle inversible ?

La réponse est « oui ». Pour s'en convaincre, considérons une matrice A carrée d'ordre n, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, munis des bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et une application linéaire f de E dans F telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{A},$$

ce qui suppose que E et F soient tous les deux de dimension n (puisque A est d'ordre n). Supposons que l'application linéaire f soit bijective, c'est-à-dire qu'il existe une application[13] f^{-1} de F dans E telle que

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F.$$

Écrivons l'une de ces deux égalités fonctionnelles (disons la première) sous forme matricielle. Puisque

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{I}_n,$$

l'égalité $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{I}_n.$$

On en déduit que la matrice associée à l'isomorphisme f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est inversible et que son inverse est la matrice associée à l'isomorphisme réciproque f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ et

$$\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\Big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}).$$

Il est à noter l'inversion de l'ordre des bases. On retiendra ce résultat grâce au schéma suivant

$$(E,\mathcal{B}) \underset{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})}{\overset{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}{\rightleftarrows}} (F,\mathcal{B}').$$

Réciproquement, on vérifie que si la matrice associée à une application linéaire f de E dans F, relativement à des bases quelconques $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, est inversible, alors l'application f est bijective. On a alors le résultat suivant.

Proposition 10.12 *Une application linéaire f d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie dans un $\mathbb{K}$-espace F de même dimension est bijective si, et seulement si, la matrice carrée associée à f relativement à des bases quelconques $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, est inversible. On a*

$$\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\Big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}).$$

[13] nécessairement linéaire puisque f l'est.

Copyrighted material

En particulier, si $E = F$ avec $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$ et si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ alors

$$f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E) \iff \Big(\forall \mathcal{B} \text{ base de } E \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Big).$$

Nous utiliserons à de nombreuses reprises cette caractérisation. De plus, pour toute base $\mathcal{B}$ de E,

$$\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\Big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}).$$

Remarque Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Il est maintenant aisé de montrer l'implication

$$\Big(\exists \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n \Big) \implies \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}.$$

En effet, considérons les endomorphismes f et g de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés aux matrices A et B. Ils vérifient

$$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}.$$

L'application composée $g \circ f$ est donc injective puisqu'elle est égale à $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ qui est elle-même injective. On en déduit que f est injective et donc bijective car pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité sont équivalentes, et que $f^{-1} = g$ ou encore, de manière équivalente, que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$. L'implication

$$\Big(\exists \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{I}_n \Big) \implies \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$$

se démontre selon le même modèle.

Isomorphisme de groupes entre $\big(\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E), \circ\big)$ et $\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times\big)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Étant donnée une base $\mathcal{B}$ fixée de E, il est clair que l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : & \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ & f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

définit une bijection. De plus, d'après la proposition 10.8, pour tous f, g appartenant à $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, et donc, *a fortiori*, pour tous f, g appartenant à $\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ définit un isomorphisme de l'ensemble structuré $\big(\mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E), \circ\big)$ dans l'ensemble structuré $\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times\big)$. Puisque ces derniers possèdent des structures de groupes (non commutatifs sauf pour $n = 1$), l'isomorphisme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est qualifié d'isomorphisme de groupes.

Donnons à présent une caractérisation d'une matrice inversible.

Proposition 10.13 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit inversible est que son rang soit égal à son ordre. Autrement dit,*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{rg}\,\mathrm{A} = n.$$

Copyrighted material

Démonstration Elle est immédiate. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$. Considérons l'endomorphisme f de E dont la matrice associée relativement à $\mathcal{B}$ est la matrice A. D'après la proposition 10.12,

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E). \tag{12}$$

D'après la proposition 9.13 (voir chap. 9 p. 378), une condition nécessaire et suffisante pour que l'application f soit bijective est que son rang soit égal à la dimension de l'espace E. Autrement dit,

$$f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E) \iff \operatorname{rg} f = n. \tag{13}$$

En regroupant les deux équivalences (12) et (13), et en tenant compte que le rang de l'application f est égal au rang de la matrice A (d'après la proposition 10.10), on obtient l'équivalence

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \operatorname{rg} \mathrm{A} = n,$$

ce qui termine la démonstration. □

Exemples

1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car son rang est 3.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car son rang est 1.

La proposition suivante est la version matricielle de la proposition 9.14.[14] Elle stipule que l'on ne change pas le rang d'une matrice lorsque l'on multiplie à gauche et/ou à droite cette matrice par une matrice inversible.

Proposition 10.14 *Soit* A *une matrice rectangulaire de type* (n, p) *à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

1. *Si* $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *alors* $\operatorname{rg}(\mathrm{B} \times \mathrm{A}) = \operatorname{rg} \mathrm{A}$.
2. *Si* $\mathrm{C} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *alors* $\operatorname{rg}(\mathrm{A} \times \mathrm{C}) = \operatorname{rg} \mathrm{A}$.
3. *Si* $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{C} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *alors* $\operatorname{rg}(\mathrm{B} \times \mathrm{A} \times \mathrm{C}) = \operatorname{rg} \mathrm{A}$.

Démonstration La démonstration de chacune des deux propriétés est immédiate. Il suffit de considérer les applications linéaires canoniquement associées à chacune des matrices et d'utiliser les résultats de la proposition 9.14. La rédaction est laissée en exercice. Il est à noter que la troisième propriété se déduit des deux premières. □

[14] voir en page 380.

Copyrighted material

10.5 Changement de bases

Nous avons vu au paragraphe 10.2.1 comment représenter sous forme matricielle une application linéaire $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ relativement à deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (la première base $\mathcal{B}$ appartenant à l'espace de départ E et la seconde $\mathcal{B}'$ à l'espace d'arrivée F).[15] Le choix de ces deux bases étant arbitraire, l'utilisation de toutes autres bases $\mathcal{C}$ de E et $\mathcal{C}'$ de F est *a priori* acceptable.[16] On a alors les deux représentations matricielles de f suivantes :

- représentation relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f),$$

- représentation relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f).$$

Ces deux matrices, bien que différentes, représentent la même application linéaire, seules les bases de départ et d'arrivée diffèrent.

Une application linéaire possède ainsi autant de représentations matricielles qu'il est possible de choisir de bases différentes. Se pose alors la question de savoir s'il est possible de passer directement d'une représentation matricielle à une autre ? Autrement dit, pouvons-nous déduire de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ l'expression de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$ sans même connaître l'application linéaire f ? Le cas échéant, suivant quel mode opératoire ? La réponse à ces questions fait l'objet des paragraphes suivants.

10.5.1 Définition d'une matrice de passage

Considérons dans un espace vectoriel E de dimension n deux bases distinctes :

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$$

et qualifions la base $\mathcal{B}$ d'« ancienne base » et la base $\mathcal{C}$ de « nouvelle base ». Décomposons chacun des vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_n$ de la nouvelle base $\mathcal{C}$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{u}_1 & = & p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{u}_2 & = & p_{12}\boldsymbol{e}_1 + p_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ & \vdots & \\ \boldsymbol{u}_n & = & p_{1n}\boldsymbol{e}_1 + p_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{array}\right.$$

[15] Rappelons qu'une seule base suffit pour représenter matriciellement un endomorphisme puisque les espaces de départ et d'arrivée sont identiques.

[16] Elle est même parfois recommandée puisque certains choix conduisent à des représentations matricielles qui se prêtent mieux au calcul des puissances d'une matrice, au calcul du déterminant (voir chap. suivant), *etc.*

Copyrighted material

c'est-à-dire,

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \boldsymbol{u}_j = p_{1j}\boldsymbol{e}_1 + p_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_{nj}\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{e}_i$$

où les scalaires p_{1j}, p_{2j}, $\ldots$, p_{nj} représentent les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{u}_j$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ de E.

Définition 10.15 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ deux bases de E. On appelle* **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$** *la matrice carrée dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans $\mathcal{B}$ du j-ième vecteur de la base $\mathcal{C}$.*

Avec les notations utilisées, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est la matrice P définie par

$$\mathrm{P} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{array}.$$

C'est une matrice carrée d'ordre n.

Exemple On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ définie par $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ (c'est la base canonique de $\mathbb{R}^3$), et de la base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ définie par

$$\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 1).$$

Pour expliciter la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, il faut d'abord écrire les trois vecteurs de $\mathcal{C}$ en fonction des trois vecteurs de $\mathcal{B}$. Cette étape préliminaire est ici très facile puisque la base $\mathcal{B}$ est la base canonique. On a immédiatement

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}.$$

On en déduit alors l'expression de la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}.$$

10.5.2 Propriétés des matrices de passage

La question suivante se pose naturellement : quelle application linéaire remarquable est associée à une matrice de passage ? La réponse donnée par la proposition 10.15 nous sera d'une grande utilité.

Copyrighted material

Proposition 10.15 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. La matrice de passage* P *de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est la matrice représentant l'application identité* $\mathrm{id}_E : \boldsymbol{x} \in E \longmapsto \boldsymbol{x} \in E$ *relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$. En d'autres termes :*

$$\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E).$$

Démonstration Notons $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ et écrivons la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ associée à l'application id_E relativement à la base de départ $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ et à la base d'arrivée $\mathcal{B}$. En appliquant la définition 10.12 (voir p. 407), pour j variant de 1 à n, la j-ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ est constituée des coordonnées du vecteur $\mathrm{id}_E(\boldsymbol{u}_j)$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}$. Or

$$\mathrm{id}_E(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{u}_j \quad \text{pour } j = 1, \ldots, n.$$

Ainsi la j-ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ est constituée des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{u}_j$ dans la base $\mathcal{B}$. C'est précisément la matrice P (d'après la définition 10.15). □

ATTENTION Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ alors P représente l'application identité avec pour base de départ la nouvelle base $\mathcal{C}$ et pour base d'arrivée l'ancienne base $\mathcal{B}$, et non l'inverse ! Schématiquement,

$$(E, \mathcal{C}) \xrightarrow{\quad \mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \quad} (E, \mathcal{B}).$$

Remarques

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à elle-même est la ***matrice unité*** I_n puisque pour toute base $\mathcal{B}$ de E,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{I}_n.$$

2. On note Φ l'endomorphisme de E qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$, c'est-à-dire tel que

$$\Phi(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{u}_1, \quad \Phi(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{u}_2, \quad \ldots, \quad \Phi(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{u}_n.$$

Cet endomorphisme est bijectif. C'est donc un automorphisme de E. On vérifie aisément que P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, est aussi la matrice associée à Φ relativement à la base $\mathcal{B}$, autrement dit, que $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi)$.

3. Une matrice de passage est nécessairement inversible puisque c'est la matrice associée à une application bijective (par exemple l'application identité). Si P est d'ordre n, on écrit

$$\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Copyrighted material

Connaissant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, pouvons-nous en déduire la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$?

Appelons $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. En appliquant la proposition 10.15, la matrice Q représente l'application $id_E : E \longrightarrow E$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (remarquer l'ordre des deux bases), c'est-à-dire

$$Q = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_E).$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. D'après la proposition 10.15,

$$P = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id_E).$$

Calculons l'un des deux produits matriciels $Q \times P$ et $P \times Q$. Rappelons que la matrice associée à l'application identité relativement à n'importe quelle base est la matrice unité. On a

$$\begin{aligned} Q \times P &= Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_E) \times Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id_E) \\ &= Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(id_E \circ id_E) = Mat_{\mathcal{C}}(id_E) = I_n. \end{aligned}$$

On en déduit directement que $P^{-1} = Q$ et on peut énoncer le résultat suivant.

Proposition 10.16 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ alors P^{-1}, la matrice inverse de P, est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.*

Exemple Reprenons l'exemple de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ et de la base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases}.$$

La matrice de passage Q de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ s'écrit

$$Q = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{matrix} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \\ \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3}(-2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \end{cases}$$

et on voit que l'on a effectivement $Q = P^{-1}$ en vérifiant l'une des deux égalités

$$Q \times P = I_3 \quad \text{ou} \quad P \times Q = I_3.$$

Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Nous avons vu plus haut que toute matrice de passage est nécessairement inversible. Réciproquement, on se convainc facilement que toute matrice inversible définit une matrice de passage. Cette remarque nous fournit une méthode de

Copyrighted material

calcul de l'inverse d'une matrice, qui ne nécessite l'inversion que d'un seul système. Présentons la méthode sur un exemple. Considérons la matrice inversible

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Interprétons A comme la matrice de passage d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ à une base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, ce qui revient à écrire le système

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 &= -2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}.$$

Son inverse, la matrice A^{-1}, peut alors s'interpréter comme la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Une méthode pour l'obtenir consiste à exprimer les vecteurs de l'ancienne base $\mathcal{B}$ en fonction des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{C}$. On déduit facilement du système précédent le nouveau système

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{u}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 &= -\boldsymbol{u}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3 \end{cases}.$$

Il contient les coefficients de la matrice A^{-1}. On obtient finalement

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cette méthode que nous venons de présenter dans le cas d'une matrice inversible d'ordre 3 se généralise au cas des matrices inversibles d'ordre quelconque.

10.5.3 Changement de bases pour un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n muni des deux bases $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ et $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$. Un vecteur $\boldsymbol{x}$ appartenant à E peut se décomposer dans chacune des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ et on qualifie ces coordonnées d'« anciennes » :

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n. \tag{14}$$

On désigne par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ les « nouvelles » coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la nouvelle base $\mathcal{C}$:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \boldsymbol{u}_j = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + x'_n\boldsymbol{u}_n. \tag{15}$$

On cherche les relations liant anciennes et nouvelles coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$. En partant de (15), on a

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \boldsymbol{u}_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \boldsymbol{e}_i \right)$$

Copyrighted material

puisque $\boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{e}_i$ pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ (par définition de P). Ainsi,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x'_j p_{ij}\boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j\boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j\right)\boldsymbol{e}_i. \qquad (16)$$

En comparant (14) et (16), on déduit l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j\right)}_{=x_i}\boldsymbol{e}_i.$$

En identifiant les coordonnées, on obtient l'expression des anciennes coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ en fonction de ses nouvelles coordonnées :

$$\forall i \in \{1,2,\dots,n\} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

ce qui démontre la proposition suivante.

Proposition 10.17 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et soient X et X' les matrices-colonnes des coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans les bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ alors*

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}'.$$

D'une manière plus concise (par rapport à la justification donnée en préambule à la proposition 10.17), l'égalité $\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}'$ correspond à l'écriture matricielle, relativement à la base de départ $\mathcal{C}$ et à la base d'arrivée $\mathcal{B}$, de l'égalité vectorielle

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{id}_E(\boldsymbol{x}).$$

En effet, $\mathrm{X}' \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ étant constituée des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la base de départ $\mathcal{C}$ et X étant constituée des coordonnées de son image par id_E (c'est-à-dire ici du même vecteur $\boldsymbol{x}$) dans la base d'arrivée $\mathcal{B}$, on a, d'après la proposition 10.5, l'équivalence suivante

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{id}_E(\boldsymbol{x}) \iff \mathrm{X} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}_{=\mathrm{P}}\mathrm{X}'$$

Copyrighted material

puisque P désigne la matrice associée à l'application id_E relativement à la base de départ $\mathcal{C}$ et à la base d'arrivée $\mathcal{B}$.

ATTENTION L'égalité matricielle $X = PX'$ signifie que les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ s'écrivent en fonction des coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans la nouvelle base $\mathcal{C}$. La matrice P étant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on serait pourtant tenté d'écrire l'inverse (chose qu'il ne faut bien évidemment pas faire !).

Si l'on désire exprimer cette fois-ci les nouvelles coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ en fonction de ses anciennes coordonnées, il suffit de multiplier l'égalité matricielle $X = PX'$ par la matrice P^{-1} (qui existe car $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$). On a en effet

$$X = PX' \iff P^{-1}X = P^{-1}PX',$$

et, puisque $P^{-1}P = I_n$, on obtient

$$X' = P^{-1}X.$$

Exemple Reprenons l'exemple de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ et de la base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ avec $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 0)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 1)$, et considérons le vecteur $\boldsymbol{x} = (3, 6, 9)$ de $\mathbb{R}^3$. Puisque $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a immédiatement

$$\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 + 9\boldsymbol{e}_3.$$

On note x'_1, x'_2 et x'_3 les coordonnées de ce même vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la nouvelle base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. On a

$$\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + x'_3\boldsymbol{u}_3.$$

Calculons x'_1, x'_2 et x'_3. On a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}}_{=X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=X},$$

ou encore, de manière équivalente,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}}_{=X'} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=X}.$$

Le vecteur X' s'obtient en effectuant le produit matriciel $P^{-1}X$. On obtient $x'_1 = -3$, $x'_2 = 0$ et $x'_3 = 6$, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{x} = -3\boldsymbol{u}_1 + 6\boldsymbol{u}_3.$$

Attention, il ne faut surtout pas écrire « $\boldsymbol{x} = (-3, 0, 6)$ ». C'est faux car $(-3, 0, 6)$ représente le vecteur $-3\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_3$.

Copyrighted material

10.5.4 Effet d'un changement de bases pour une application linéaire

On considère une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ où l'espace de départ E est de dimension p et l'espace d'arrivée F de dimension n. On munit l'espace E des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On note X et X′ les matrices-colonnes de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ constituées des coordonnées d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de E respectivement dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Si $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ alors on peut écrire :

$$\mathrm{X} = \mathrm{PX}'.$$

On munit l'espace F des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ et on note Y et Y′ les matrices-colonnes de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituées des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ de F respectivement dans $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. Si $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{C}'$ alors on peut écrire :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{QY}' \quad \text{ou} \quad \mathrm{Y}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Y}.$$

On représente par A (respectivement par B) la matrice associée à f relativement aux deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$), c'est-à-dire

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f).$$

D'après la proposition 10.5, l'égalité vectorielle $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ peut s'écrire

- relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sous la forme matricielle :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX}, \tag{17}$$

- relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sous la forme matricielle :

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{BX}'. \tag{18}$$

On cherche une relation liant les deux matrices A et B. Partons de l'égalité (17). Puisque $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a l'équivalences suivante :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX} \iff \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AX}.$$

En utilisant $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{Y}'$ et $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$, on obtient

$$\mathrm{Y}' = (\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP})\mathrm{X}'. \tag{19}$$

En comparant la dernière égalité (19) avec l'égalité (18), on en déduit, par identification, une relation donnant la matrice B en fonction de la matrice A :

$$\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}.$$

On a ainsi démontré le théorème suivant.

Théorème 10.1 *Soient E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, F un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ et f une application linéaire de E dans F. Alors les deux matrices* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ *et* $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$*, toutes les deux du même type, vérifient :*

$$\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$$

où P *est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et où* Q *est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{C}'$.*

Copyrighted material

Il est à noter que les deux matrices rectangulaires A et B sont du même type puisqu'elles représentent la même application linéaire $f : E \longrightarrow F$. En revanche, les deux matrices carrées inversibles P et Q ne sont *a priori* pas du même ordre, sauf si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$, auquel cas A, B, P et Q sont quatre matrices du même ordre.

Remarque L'égalité $B = Q^{-1}AP$ n'est rien d'autre que l'écriture matricielle de l'égalité fonctionnelle suivante

$$f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$$

que l'on vérifie aisément puisque pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, on a

$$(\mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E)(\boldsymbol{x}) = \mathrm{id}_F(f(\mathrm{id}_E(\boldsymbol{x}))) = \mathrm{id}_F(f(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}),$$

et que l'on schématise par

$$\begin{array}{ccc} & \overset{f}{\longrightarrow} & \\ E & & F \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_E}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_F} \\ E & \longrightarrow & F \\ & f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E & \end{array}.$$

Il suffit alors de compléter ce schéma en munissant l'espace E des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, et l'espace F des deux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$, puis en écrivant les matrices associées à chacune des applications relativement aux bases des espaces de départ et des espaces d'arrivée (le sens des flèches nous indique dans chaque cas l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On obtient alors le schéma

$$\begin{array}{ccc} & \overset{A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}{\longrightarrow} & \\ (E,\mathcal{B}) & & (F,\mathcal{B}') \\ {\scriptstyle P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_F) = Q^{-1}} \\ (E,\mathcal{C}) & \longrightarrow & (F,\mathcal{C}') \\ & B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) & \end{array}$$

et on retrouve l'égalité matricielle :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)}_{=B} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_F)}_{=Q^{-1}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}_{=A} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}_{=P}.$$

En particulier, lorsque f est un endomorphisme de E, on peut choisir $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. La matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$ se note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On peut aussi choisir $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ et la matrice associée à f dans la base $\mathcal{C}$ se note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. On a alors le résultat suivant.

Copyrighted material

Corollaire 10.1 *Soient E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et f un endomorphisme de E. Alors les deux matrices carrées $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, toutes les deux du même ordre, vérifient :*

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.[17]

On retrouve cette écriture matricielle à partir de l'égalité fonctionnelle :

$$f = \mathrm{id}_E \circ f \circ \mathrm{id}_E,$$

et en munissant les espaces E et F des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, puis en écrivant les matrices associées à chacune des applications. On obtient le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) & \\ (E,\mathcal{B}) & \longrightarrow & (E,\mathcal{B}) \\ \mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \uparrow & & \downarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{P}^{-1} \\ (E,\mathcal{C}) & \longrightarrow & (E,\mathcal{C}) \\ & \mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) & \end{array}.$$

On retrouve l'égalité matricielle :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)}_{=\mathrm{B}} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E)}_{=\mathrm{P}^{-1}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}_{=\mathrm{A}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}_{=\mathrm{P}}.$$

Exemple Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$\boldsymbol{y} = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Soient $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 0) \text{ et } \boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 1).$$

En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on vérifie que l'on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}}.$$

[17] L'ordre de la matrice carrée P est identique à celui des matrices carrées A et B.

Copyrighted material

Exercice 4 *Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ définie par*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1 - Déterminer B, *matrice associée à f dans la nouvelle base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ où $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 0)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 1)$.*
2 - Calculer B^n pour tout entier n.
3 - En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathrm{A}^n = \frac{(a-b)^n}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(a+2b)^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque Effectuer le produit matriciel $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$ (au lieu du produit $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$) revient à calculer la matrice associée à f relativement à $\mathcal{B}$ (base de départ) et $\mathcal{C}$ (base d'arrivée). On retrouve en effet l'égalité

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AI}_n$$

à partir du schéma suivant

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)} & \\ (E,\mathcal{B}) & \longrightarrow & (E,\mathcal{B}) \\ \mathrm{I}_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \uparrow & & \downarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{P}^{-1} \\ (E,\mathcal{B}) & \xrightarrow[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)]{} & (E,\mathcal{C}) \end{array}.$$

De même, effectuer le produit matriciel AP revient à calculer la matrice associée à f relativement, cette fois-ci, à $\mathcal{C}$ (base de départ) et $\mathcal{B}$ (base d'arrivée). En effet, l'égalité

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \mathrm{I}_n\mathrm{AP}$$

se retrouve à partir du schéma suivant

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)} & \\ (E,\mathcal{B}) & \longrightarrow & (E,\mathcal{B}) \\ \mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \uparrow & & \downarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{I}_n \\ (E,\mathcal{C}) & \xrightarrow[\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)]{} & (E,\mathcal{B}) \end{array}.$$

Copyrighted material

En reprenant l'exemple précédent, on obtient deux nouvelles représentations matricielles de l'application f (voir aussi la solution de l'exercice 2, p. 450)

$$\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}}.$$

10.5.5 Matrices équivalentes, matrices semblables

Définition 10.16 *Soient n et p deux entiers naturels non nuls.*

✗ *Soient* A *et* B *deux matrices rectangulaires de type (n,p) sur $\mathbb{K}$. On dit que* A *est* ***équivalente*** *à* B *si*

$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad \exists \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}.$$

✗ *Soient* A *et* B *deux matrices carrées d'ordre p sur $\mathbb{K}$. On dit que* A *est* ***semblable*** *à* B *si*

$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad \mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Remarques

1. Deux matrices rectangulaires et de même type sont équivalentes si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

2. Deux matrices carrées et de même ordre sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

La notion d'équivalence entre matrices de type (n,p) définit une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ au sens de la définition 2.28 en page 55. On a en effet les trois propriétés suivantes.

- Toute matrice A de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à elle-même (propriété de réflexivité) puisque

$$\mathrm{A} = \mathrm{I}_n^{-1}\mathrm{AI}_p \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{I}_p \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

- Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si A est équivalente à B alors B est équivalente à A (propriété de symétrie). En effet, A étant équivalente à B,

$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \quad \exists \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$$

Copyrighted material

En multipliant à gauche par Q et à droite par P^{-1}, on en déduit la relation $A = QBP^{-1}$, c'est-à-dire,

$$A = (Q^{-1})^{-1}BP^{-1}$$

avec $P^{-1} \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$. On a ainsi vérifié que B était équivalente à A.

– Soient A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Si A est équivalente à B et si B est équivalente à C alors A est équivalente à C (propriété de transitivité). En effet, A étant équivalente à B,

$$\exists P_1 \in GL_p(\mathbb{K}) \quad \exists Q_1 \in GL_n(\mathbb{K}) \quad B = Q_1^{-1}AP_1. \tag{20}$$

De même, B étant équivalente à C,

$$\exists P_2 \in GL_p(\mathbb{K}) \quad \exists Q_2 \in GL_n(\mathbb{K}) \quad C = Q_2^{-1}BP_2. \tag{21}$$

En injectant alors (20) dans (21), on obtient

$$C = Q_2^{-1}Q_1^{-1}AP_1P_2,$$

qui s'écrit aussi, puisque $Q_2^{-1}Q_1^{-1} = (Q_1Q_2)^{-1}$,

$$C = (Q_1Q_2)^{-1}A(P_1P_2)$$

avec $P_1P_2 \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q_1Q_2 \in GL_n(\mathbb{K})$. On a ainsi vérifié que C était équivalente à A.

Remarque En procédant comme ci-dessus, on vérifie facilement que la relation « A est semblable à B » définit une relation d'équivalence sur $M_p(\mathbb{K})$ au sens de la définition 2.28.

Proposition 10.18 *Soit* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* A *soit de rang* r *est qu'elle soit équivalente à la matrice* J_r *définie par*[18]

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

Démonstration Supposons que A soit équivalente à J_r. Cela signifie qu'il existe deux matrices inversibles P et Q d'ordres respectifs p et n telles que $J_r = Q^{-1}AP$, d'où

$$\operatorname{rg}(J_r) = \operatorname{rg}(Q^{-1}AP).$$

Or $\operatorname{rg}(Q^{-1}AP) = \operatorname{rg}(A)$ puisque les deux matrices Q^{-1} et P sont inversibles (voir la proposition 10.14), et il est clair que le rang de la matrice J_r est r. Par conséquent,

$$\operatorname{rg}(A) = r.$$

[18] La matrice J_r est de type (n, p) puisqu'elle est équivalente à la matrice A.

Copyrighted material

Réciproquement, supposons que A soit de rang r. Montrons qu'elle est alors équivalente à J_r. Utilisons pour cela une application linéaire f de E dans F telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$$

avec $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Le but est ici de trouver une base $\mathcal{C}$ de E et une base $\mathcal{C}'$ de F de telle sorte que la matrice associée à f relativement à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soit J_r, ce qui terminera la démonstration puisque les deux matrices représentant la même application linéaire f relativement à des bases différentes, nous aurons ainsi montré qu'elles sont équivalentes. Rappelons que $r \leqslant p$ et $r \leqslant n$. Nous n'effectuons la démonstration que dans le cas où $r < p$ et $r < n$. Dans les autres cas, elle s'effectue selon le même modèle. Elle est laissée en exercice. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 9.1 (théorème du rang, voir chap. 9 p. 376). On désigne par $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}f} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{p-r})$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et par $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}f} = (\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_r)$ une base de $\mathrm{Im}\, f$. Les vecteurs $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{p-r}$ appartenant au noyau de f, ils vérifient

$$\forall i \in \{1, \ldots, p-r\} \quad f(\boldsymbol{w}_i) = \mathbf{0}_F. \tag{22}$$

Soit $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{p-r})$ où les vecteurs $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ de E vérifient

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\} \quad f(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{\ell}_i. \tag{23}$$

D'après la démonstration du théorème 9.1, la famille $\mathcal{C}$ constitue bien une base de E. La base $\mathcal{C}'$ de F s'obtient en complétant $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}f}$ par $n-r$ vecteurs de F. Notons-les $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-r}$. On a $\mathcal{C}' = (\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_r, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-r})$. Écrivons à présent la matrice associée à f relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Elle se déduit de (22) et (23) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{u}_r) & f(\boldsymbol{w}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{w}_{p-r}) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boldsymbol{\ell}_1 \\ \boldsymbol{\ell}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_r \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{n-r} \end{array} \end{array}.$$

C'est la matrice J_r. □

Il vient immédiatement de la proposition 10.18 les résultats suivants.

Corollaire 10.2 *Soient* A, B *deux matrices rectangulaires de type* (n, p) *sur* $\mathbb{K}$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* A *et* B *soient équivalentes est que*

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B).$$

Copyrighted material

Démonstration Il est clair que si A et B sont équivalentes alors elles ont même rang (puisqu'elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes). Réciproquement, si elles ont même rang, alors, d'après la proposition 10.18, elles sont toutes les deux équivalentes à la matrice J_r. Elles sont donc équivalentes entre elles par transitivité de la relation d'équivalence entre matrices. □

Corollaire 10.3 *Le rang d'une matrice et celui de sa transposée sont égaux. Autrement dit,*

$$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(A^T\right).$$

Démonstration Soit A une matrice de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de rang r. D'après la proposition 10.18, il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$J_r = Q^{-1}AP,$$

d'où, en passant à la transposition,

$$J_r^T = \left(Q^{-1}AP\right)^T = P^T A^T (Q^{-1})^T,$$

c'est-à-dire, en tenant compte que $(Q^{-1})^T = (Q^T)^{-1}$,

$$J_r^T = P^T A^T (Q^T)^{-1}.$$

En multipliant à gauche par $(P^T)^{-1}$ et à droite par Q^T, on obtient

$$A^T = \left(P^T\right)^{-1} J_r^T Q^T,$$

et, en passant au rang,

$$\operatorname{rg}\left(A^T\right) = \operatorname{rg}\left((P^T)^{-1} J_r^T Q^T\right) = \operatorname{rg}\left(J_r^T\right)$$

puisque les deux matrices $(P^T)^{-1}$ et Q^T sont inversibles. Il suffit pour conclure de remarquer que, de toute évidence, $\operatorname{rg}\left(J_r^T\right) = r$. On en déduit alors que $\operatorname{rg}\left(A^T\right) = r$, ce qui termine la démonstration puisque nous avons ainsi vérifié que $\operatorname{rg}\left(A^T\right) = \operatorname{rg}(A)$. □

Remarque Deux matrices semblables sont nécessairement équivalentes (c'est immédiat). La réciproque est fausse : deux matrices équivalentes peuvent ne pas être semblables. Par exemple, les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont équivalentes puisque, d'après la corollaire 10.2, elles ont le même rang (qui vaut 3). Elles ne sont pourtant pas semblables puisque les traces sont différentes (nous utilisons ici la notion de trace d'une matrice carrée qui fait l'objet de l'exercice 5 ci-après, et en particulier la contraposition de l'implication « si deux matrices sont semblables alors elles ont la même trace » (voir la question 4 du même exercice).

Copyrighted material

10.6 Exercices de synthèse

Exercice 5 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *On appelle* **trace de** A, *et on note* $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$, *la somme des éléments de sa diagonale. Autrement dit, si* $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *alors*

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

1 - Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ *est une forme linéaire.*

2 - Montrer que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \quad \Big(\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^T \times \mathrm{A}) = 0 \iff \mathrm{A} = 0_n \Big).$$

3 - Montrer que : $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \forall \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{Tr}(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{B} \times \mathrm{A})$.

4 - Soient A *et* B *deux matrices de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *Déduire de la question précédente que si* A *et* B *sont semblables alors*

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{B}).$$

5 - Avons-nous $\mathrm{Tr}(\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{B} \times \mathrm{A} \times \mathrm{C})$ *pour tous* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *? On pourra considérer les matrices*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6 - Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \\ 3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 *On considère l'application* f *qui à tout polynôme* P *de* $\mathbb{R}_3[X]$ *associe le reste de la division euclidienne de* P *par* $X^2 - 1$. *On note* $\mathcal{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.

1 - Montrer que f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$.

2 - Montrer que $\mathcal{C} = \big(1, X-1, X^2-1, (X^2-1)(X+1)\big)$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$. *Expliciter les deux matrices suivantes*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f).$$

3 - Calculer $\mathrm{rg}\, f$. *Déterminer l'image et le noyau de* f *et montrer que*

$$\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E.$$

4 - Montrer que f *est un projecteur de* $\mathbb{R}_3[X]$.

Copyrighted material

Exercice 7 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1 - Déterminer le rang de f. L'application f est-elle bijective ? En déduire $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} f)$.

2 - Calculer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k)$ pour $k \geqslant 2$. Déterminer le rang de f^k pour $k \geqslant 2$ et en déduire $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} f^k)$ pour $k \geqslant 2$.

3 - Soit $v \notin \operatorname{Ker} f^2$. Montrer que $\mathcal{C} = (f^2(v), -f(v), v)$ est une base de E. Écrire $M' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

4 - On désigne par $P \in GL_3(\mathbb{R})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Calculer P et P^{-1} lorsque $v = e_3$ et vérifier que

$$M' = P^{-1}MP.$$

5 - On pose $N = M + I_3$. Calculer N^n en fonction de M pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de N^n.

6 - Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par récurrence par $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $r_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} p_n &= 3p_{n-1} + q_{n-1} \\ q_n &= -3p_{n-1} + r_{n-1} \\ r_n &= p_{n-1} \end{cases}.$$

Trouver les expressions de p_n, q_n, r_n en fonction de n.

10.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\forall k \geqslant 3 \quad B^k = 0_3.$$

Puisque la matrice unité commute avec toute matrice (du même ordre), on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer A^n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (B^k \times I_3^{n-k}) = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2.$$

Copyrighted material

On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & 0 \\ nc + \frac{n(n-1)}{2}ab & nb & 1 \end{pmatrix}.$$

2 - De $B = A - I_3$ il vient $B^3 = (A - I_3)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0_3$, d'où

$$A^3 = 3A^2 - 3A + I_3.$$

3 - Pour $n \geqslant 3$, en multipliant l'expression ci-dessus par A^{n-3} on obtient

$$\forall n \geqslant 3 \quad A^n = 3A^{n-1} - 3A^{n-2} + A^{n-3}.$$

Solution de l'exercice 2

La base $\mathcal{B}$ est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. À première vue, la deuxième base $\mathcal{C}$ semble quelconque. Il n'en est rien. Les vecteurs qui la composent sont ce qu'on appelle des vecteurs propres. Ils dépendent de l'endomorphisme f considéré. Pour les obtenir, nous avons dû procéder à un calcul préalable non explicité pour l'instant. L'étude et la recherche de vecteurs propres pour un endomorphisme feront l'objet du chapitre 12. On a entre les vecteurs de $\mathcal{B}$ et ceux de $\mathcal{C}$ les deux systèmes de relations

$$(S_1) \begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2) \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \\ \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3}(-2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \end{cases}.$$

$\trianglerighteq$ Pour calculer la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$, il faut au préalable calculer les trois vecteurs $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ et les exprimer par rapport aux trois vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$. On a

$$(S_3) \begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = (2,1,1) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ f(\boldsymbol{e}_2) = (1,2,1) = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ f(\boldsymbol{e}_3) = (1,1,2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \end{cases}.$$

Remarquons que, puisque $\mathcal{B}$ est la base canonique, les décompositions de $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ par rapport à $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ sont immédiates. On en déduit alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Copyrighted material

$\trianglerighteq$ Pour calculer la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$, il faut cette fois-ci commencer par calculer $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, $f(\boldsymbol{u}_3)$. On a

$$(\mathrm{S}_4)\ \begin{cases} f(\boldsymbol{u}_1) &= (1,0,-1) &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \\ f(\boldsymbol{u}_2) &= (1,-1,0) &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \\ f(\boldsymbol{u}_3) &= (4,4,4) &= 4\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3 \end{cases}.$$

Attention, il faut maintenant décomposer ces vecteurs par rapport aux trois vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$. En utilisant le système de relations (S_2), on obtient

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 \\ f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_2 \\ f(\boldsymbol{u}_3) = 4\boldsymbol{u}_3 \end{cases}.$$

On en déduit l'expression

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{u}_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Au chapitre 12, nous verrons que ce n'est pas un hasard si cette matrice est diagonale. Les éléments diagonaux s'appellent des valeurs propres.

$\trianglerighteq$ Pour calculer la matrice associée à f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, il faut cette fois-ci décomposer les vecteurs $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ (nous les avons déjà calculés plus haut, voir le système (S_3)) par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$. En injectant les relations du système (S_2) dans celles du système (S_3), il vient

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3) \\ f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3) \\ f(\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{3}(-2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3) \end{cases}.$$

On en déduit alors l'expression

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{matrix} \end{array}.$$

$\trianglerighteq$ Pour calculer la matrice associée à f relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$, il faut décomposer les vecteurs $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, $f(\boldsymbol{u}_3)$ par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$. C'est précisément ce que contient le système (S_4). On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{u}_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Copyrighted material

Remarquons que ces quatre matrices, bien que différentes, représentent néanmoins le même endomorphisme.

Solution de l'exercice 3

On désigne par $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A et par $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1 - L'indice de nilpotence de A est celui de f. De plus on sait que si f est nilpotent d'indice p alors $p \leqslant n$, ce qui termine la démonstration.

2 - Il suffit d'exprimer les images par f des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(\boldsymbol{e}_1) & = & \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n} \\ f(\boldsymbol{e}_2) & = & a_{12}\boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{K}\boldsymbol{e}_1 = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{e}_1) \\ f(\boldsymbol{e}_3) & = & a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 \in \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \\ & \vdots & \\ f(\boldsymbol{e}_n) & = & a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n-1,n}\boldsymbol{e}_{n-1} \in \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}) \end{array}\right.$$

c'est-à-dire : $f(\boldsymbol{e}_1) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$ et $\forall j \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $f(\boldsymbol{e}_j) \in \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{j-1})$. On vérifie que : $f^2(\boldsymbol{e}_1) = f^2(\boldsymbol{e}_2) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$ et $f^2(\boldsymbol{e}_j) \in \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{j-2})$ pour tout $j \in \{3, \ldots, n\}$. Plus généralement, on montre que $f^k(\boldsymbol{e}_1) = f^k(\boldsymbol{e}_2) = \ldots = f^k(\boldsymbol{e}_k) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$ et

$$\forall j \in \{k+1, \ldots, n\} \quad f^k(\boldsymbol{e}_j) \in \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{j-k})\,.$$

Par conséquent : $f^n(\boldsymbol{e}_1) = f^n(\boldsymbol{e}_2) = \ldots = f^n(\boldsymbol{e}_n) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$, c'est-à-dire $f^n = 0$ ce qui implique $\mathrm{A}^n = 0$.

3 - Décomposons la matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ comme la somme de la matrice identité et d'une matrice triangulaire supérieure stricte

$$\mathrm{A} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{B} \;\text{ avec }\; \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\text{ et }\; \mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice B est nilpotente (on vérifie que $\mathrm{B}^3 = 0_3$). Ainsi, grâce à la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\mathrm{A}^m = \mathrm{I}_3 + m\mathrm{B} + \frac{m(m-1)}{2}\mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2m^2+m \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 4

On note $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1 - Commençons par déterminer la matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{u}_1 & = & \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 & = & \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 & = & \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{array}\right. \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Copyrighted material

On déduit des équations précédentes le système suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{e}_1 &=& \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3) \\ \boldsymbol{e}_2 &=& \frac{1}{3}(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3) \\ \boldsymbol{e}_3 &=& \frac{1}{3}(-2\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3) \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \mathrm{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B associée à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{C}$ est donnée par $\mathrm{B}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. On obtient

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}.$$

2 - On en déduit alors que : $\mathrm{B}^n=\begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+2b)^n \end{pmatrix}$.

3 - De la relation $\mathrm{A}=\mathrm{PBP}^{-1}$, on déduit $\mathrm{A}^n=\mathrm{PB}^n\mathrm{P}^{-1}$. On obtient alors l'expression de A^n demandée :

$$\mathrm{A}^n=\frac{(a-b)^n}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}+\frac{(a+2b)^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 5

1 - Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ et $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{B}=(bij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. L'application trace est linéaire car

$$\mathrm{Tr}(\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B})=\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii}+\beta b_{ii})=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\beta\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\alpha\mathrm{Tr}(\mathrm{A})+\beta\mathrm{Tr}(\mathrm{B}).$$

2 - Soit $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Cherchons l'expression de $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^T\times\mathrm{A})$. On a

$$\mathrm{A}^T=(a'_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{avec} \quad a'_{ij}=a_{ji}, \quad \forall(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\},$$

d'où $\mathrm{A}^T\times\mathrm{A}=(c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec

$$\forall(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\} \quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a'_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}.$$

On obtient $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^T\times\mathrm{A})=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}^2$, d'où

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^T\times\mathrm{A})=0 \iff \Big(\forall(k,i)\in\{1,\ldots,n\}^2 \quad a_{ki}=0\Big) \iff \mathrm{A}=0_n.$$

Copyrighted material

3 - Remarquons que si A appartient à $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si B appartient à $\mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ alors les deux produits matriciels $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ et $\mathrm{B}\times\mathrm{A}$ sont bien définis et on a $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B}\times\mathrm{A}\in\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ avec

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\quad\text{et}\quad\mathrm{B}\times\mathrm{A}=\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}.$$

On vérifie

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}\times\mathrm{B})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}$$

où on a permuté les deux sommes. Les indices étant muets, remplaçons i par k, et k par i. On obtient

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}$$

et on reconnaît dans le terme de droite l'expression de $\mathrm{Tr}(\mathrm{B}\times\mathrm{A})$. On a ainsi vérifié que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}\times\mathrm{B})$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{B}\times\mathrm{A})$ étaient égaux.

4 - Les matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ étant semblables, il existe $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\mathrm{B}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. D'après la question précédente,

$$\mathrm{Tr}\big((\mathrm{P}^{-1}\times\mathrm{A})\times\mathrm{P}\big)=\mathrm{Tr}(\mathrm{P}\times(\mathrm{P}^{-1}\times\mathrm{A})).$$

On en déduit

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{B})=\mathrm{Tr}\big(\mathrm{P}^{-1}\times\mathrm{A}\times\mathrm{P}\big)=\mathrm{Tr}(\mathrm{P}\times\mathrm{P}^{-1}\times\mathrm{A})=\mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n\times\mathrm{A})=\mathrm{Tr}(\mathrm{A}).$$

5 - La réponse est non car on a $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}\times\mathrm{A}\times\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

6 - Bien que l'on ait $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})=\mathrm{Tr}(\mathrm{B})$, on ne peut pas en déduire que A et B sont semblables. L'égalité des traces est une condition nécessaire (pour que deux matrices soient semblables) mais non suffisante. En revanche, rappelons que si A et B sont semblables alors $\mathrm{rg}(\mathrm{A})=\mathrm{rg}(\mathrm{B})$ (puisqu'elles sont associées à la même application linéaire). Procédons par contraposition. On a

$$\mathrm{rg}(\mathrm{A})=1\neq\mathrm{rg}(\mathrm{B})=3.$$

On peut alors en déduire que A et B ne sont pas semblables.

Solution de l'exercice 6

1 - Commençons par montrer que f est une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même. L'image d'un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ par f est le reste de la division euclidienne de P par X^2-1. C'est donc un polynôme de degré strictement inférieur au degré de X^2-1. Ainsi $f(P)\in\mathbb{R}_3[X]$. Vérifions maintenant la propriété de linéarité de f. Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\exists!\,(Q_1,R_1)\in\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]\quad P_1=Q_1(X^2-1)+R_1\quad\text{et}\quad\deg(R_1)<2,$$

$$\exists!\,(Q_2,R_2)\in\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]\quad P_2=Q_2(X^2-1)+R_2\quad\text{et}\quad\deg(R_2)<2.$$

Copyrighted material

Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha P_1 + \beta P_2 = (\alpha Q_1 + \beta Q_2)(X^2 - 1) + \alpha R_1 + \beta R_2$$

et on vérifie

$$\begin{aligned} \deg(\alpha R_1 + \beta R_2) &\leqslant \max\{\deg(\alpha R_1), \deg(\beta R_2)\} \\ &\leqslant \max\{\deg(R_1), \deg(R_2)\} < 2, \end{aligned}$$

d'où

$$f(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha R_1 + \beta R_2 = \alpha f(P_1) + \beta f(P_2).$$

2 - Rappelons que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Il est donc suffisant de vérifier que la famille $\mathcal{C} = \big(1, X-1, X^2-1, (X^2-1)(X+1)\big)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. De la relation

$$\alpha + \beta(X-1) + \gamma(X^2-1) + \delta(X^2-1)(X+1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

on déduit

$$\delta = 0, \quad \gamma + \delta = 0, \quad \beta - \delta = 0, \quad \alpha - \beta - \gamma - \delta = 0.$$

D'où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Explicitons les deux matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. On a d'abord

$$f(1) = 1, \quad f(X-1) = X-1, \quad f(X^2-1) = 0, \quad f((X^2-1)(X+1)) = 0,$$

d'où l'on tire $f(X) = X$, $f(X^2) = 1$ et $f(X^3) = X$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 - On a $\mathrm{rg}\big(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)\big) = 2$. Ainsi $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,(1, X-1)$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$ est $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, f} = (1, X-1)$. D'après le théorème de Grassmann,

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}\, f) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X]) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}\, f) = 4 - 2 = 2.$$

Pour déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$, il suffit de trouver 2 polynômes de $\mathrm{Ker}\, f$ linéairement indépendants. Les polynômes $X^2 - 1$ et $(X^2-1)(X+1)$ appartiennent à $\mathrm{Ker}\, f$ car

$$f(X^2-1) = f((X^2-1)(X+1)) = 0$$

et ils forment une famille libre (cela se déduit facilement du fait que la famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$). Ainsi

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\,\big(X^2-1, (X^2-1)(X+1)\big)$$

Copyrighted material

et une base de $\operatorname{Ker} f$ est $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \big(X^2-1, (X^2-1)(X+1)\big)$. Par construction, $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ est le sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\operatorname{Ker} f \cup \operatorname{Im} f\right).$$

Il contient nécessairement les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ et *a fortiori* les polynômes

$$1, \quad X-1, \quad X^2-1 \quad \text{et} \quad (X^2-1)(X+1).$$

Ces quatre polynômes étant linéairement indépendants, ils forment une base. On en déduit directement $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

4 - Il suffit de vérifier que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. C'est immédiat.

Solution de l'exercice 7

Notons $\mathrm{M} = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$. Puisque $\mathrm{M} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a

$$f(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3.$$

1 - Notons C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de la matrice M. On remarque que $\mathrm{C}_3 = -\mathrm{C}_1 + 2\mathrm{C}_2$. Les trois colonnes sont liées. En revanche, les deux colonnes C_2 et C_3 sont libres, d'où $\operatorname{rg} \mathrm{M} = 2$ (la matrice M est singulière). On en déduit $\operatorname{rg} f = 2$. L'application f n'est pas bijective. Grâce au théorème du rang, on en déduit $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} f) = 1$.

2 - Puisque $\mathrm{M} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a $\mathrm{M}^k = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On obtient

$$\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où $\mathrm{M}^k = 0$ pour tout $k \geqslant 3$. L'application f est nilpotente d'indice 3. De l'expression de M^2, il vient $\operatorname{rg}(f^2) = 1$, d'où $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} f^2) = 2$. On a aussi pour tout $k \geqslant 3$, $\operatorname{rg} f^k = 0$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} f^k) = 3$.

3 - Soit $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{Ker} f^2$. Puisque l'espace E est de dimension 3, les trois vecteurs $f^2(\boldsymbol{v})$, $-f(\boldsymbol{v})$ et $\boldsymbol{v}$ forment une base s'ils constituent une famille libre dans E. Remarquons que l'hypothèse $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{Ker} f^2$ nous assure que le vecteur $f^2(\boldsymbol{v})$ est non nul. De plus, puisque l'on a l'implication $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_E \Longrightarrow f^2(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_E$, on en déduit, par contraposition, que le vecteur $f(\boldsymbol{v})$ est non nul. Suivant un raisonnement analogue, on vérifie que le vecteur $\boldsymbol{v}$ est aussi non nul. Écrivons la relation de liaison

$$\alpha f^2(\boldsymbol{v}) - \beta f(\boldsymbol{v}) + \gamma \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_E. \tag{24}$$

En appliquant f^2 à l'égalité (24), on obtient

$$\alpha f^4(\boldsymbol{v}) - \beta f^3(\boldsymbol{v}) + \gamma f^2(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_E.$$

Or, pour tout $k \geqslant 3$, $f^k = 0$. Ainsi $f^4(\boldsymbol{v}) = f^3(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_E$. Puisque $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{Ker} f^2$, $f^2(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}_E$. On en déduit alors que $\gamma = 0$ et la relation de liaison (24) s'écrit $\alpha f^2(\boldsymbol{v}) - \beta f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_E$. En appliquant f à cette égalité, on obtient

$$\alpha f^3(\boldsymbol{v}) - \beta f^2(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_E.$$

Copyrighted material

Puisque $f^3(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E$ et $f^2(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}_E$, il vient $\beta = 0$ et la relation de liaison (24) devient $\alpha f^2(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_E$, dont on déduit $\alpha = 0$. On a ainsi vérifié que la famille $\mathcal{C} = (f^2(\boldsymbol{v}), -f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v})$ était une famille libre dans E. La matrice M' associée à l'endomorphisme f relativement à cette nouvelle base $\mathcal{C}$ s'écrit

$$\mathrm{M}' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f^3(\boldsymbol{v}) & -f^2(\boldsymbol{v}) & f(\boldsymbol{v}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f^2(\boldsymbol{v}) \\ -f(\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{v} \end{array}.$$

4 - Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C} = (f^2(\boldsymbol{e}_3), -f(\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{e}_3)$. On note $\boldsymbol{u}_1 = f^2(\boldsymbol{e}_3)$, $\boldsymbol{u}_2 = -f(\boldsymbol{e}_3)$ et $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3$. On a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{u}_1 & = & \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 & = & -\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 & = & \boldsymbol{e}_3 \end{array} \right. \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit des équations précédentes le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{e}_1 & = & \boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 & = & -\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{e}_3 & = & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \right. \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que l'on a $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}$ (on vérifie en effet que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{I}_3$).

5 - La matrice unité commute avec toutes les matrices. On peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer N^n. Puisque $\forall k \geqslant 3$, $\mathrm{M}^k = 0$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{N}^n = \mathrm{I}_3 + n\mathrm{M} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{M}^2. \tag{25}$$

Des expressions de M et M^2, on déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ celle de N^n

$$\mathrm{N}^n = \begin{pmatrix} 1 + 2n + \frac{n(n-1)}{2} & n + \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} \\ -3n - n(n-1) & 1 - n - n(n-1) & n - n(n-1) \\ n + \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} & 1 - n + \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}.$$

6 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix},$$

qui s'écrit aussi, en notant $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}^T$, sous la forme suivante $\mathrm{X}_n = \mathrm{N}\,\mathrm{X}_{n-1}$. On obtient par récurrence la relation $\mathrm{X}_n = \mathrm{N}^n\,\mathrm{X}_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$. Ainsi, en tenant compte de (25),

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_n = \left(\mathrm{I}_3 + n\mathrm{M} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{M}^2\right)\mathrm{X}_0.$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = n(n+1)/2, \quad q_n = 1 - n^2 \quad \text{et} \quad r_n = n(n-1)/2.$$

Copyrighted material

Copyrighted material

Chapitre 11

Systèmes d'équations linéaires

11.1 Un outil pratique : le déterminant

11.1.1 Tel Monsieur Jourdain

En introduction à la théorie des déterminants, nous commençons par quelques rappels et commentaires sur les systèmes linéaires 2×2, puis sur les systèmes linéaires 3×3. Dans les deux cas, la notion de déterminant associé à un système y apparaît de manière naturelle. Ainsi, tel Monsieur Jourdain[1] faisant de la prose sans le savoir, vous manipulez la notion de déterminant depuis plusieurs années sans même le savoir.

Le déterminant d'un système 2×2

On considère dans $\mathbb{R}$ le système de deux équations à deux inconnues (x_1 et x_2)

$$(\mathrm{S}_{2\times 2}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

où a_{11}, a_{12}, b_1, a_{21}, a_{22} et b_2 désignent des réels donnés. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système $(\mathrm{S}_{2\times 2})$. Il vérifie

$$\mathcal{S} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$$

où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ définis par[2]

$$\mathcal{D}_1 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\big\},$$
$$\mathcal{D}_2 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\big\}.$$

Nous donnons une interprétation graphique au système $(\mathrm{S}_{2\times 2})$ sur la figure 1 où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont représentés par des droites. Pour obtenir une équation ne portant que sur l'inconnue x_1, on peut multiplier la première équation par

[1] Nous faisons référence ici à la pièce de théâtre classique « Le Bourgeois gentilhomme » écrite en 1670 par Jean-Baptiste Poquelin dit Molière (1622-1673).

[2] Remarquons que ces deux sous-ensembles ne possèdent pas, en général, de structure de sous-espace vectoriel puisque $(0,0) \notin \mathcal{D}_1$ et $(0,0) \notin \mathcal{D}_2$, sauf si $b_1 = b_2 = 0$. Nous qualifions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de sous-espaces affines de dimension 1 ou de droites affines.

Copyrighted material

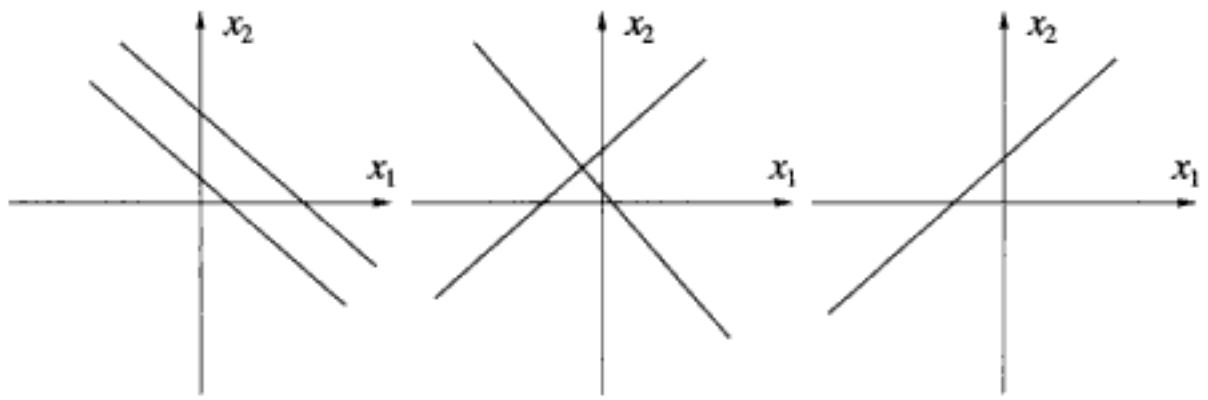


Fig. 1 Interprétation géométrique d'un système réel 2×2. Les représentations graphiques des deux équations correspondent à des droites. Trois cas sont possibles : il n'y a pas de solution (les droites sont strictement parallèles, dessin de gauche), il y a une unique solution (les droites se coupent, dessin central), il y a une infinité de solutions (les droites sont confondues, dessin de droite).

a_{22}, la seconde par $-a_{12}$ et on additionne le tout. De même, pour obtenir une équation ne portant que sur l'inconnue x_2, on peut multiplier la première équation par $-a_{21}$, la seconde par a_{11} et on additionne le tout. On obtient le système

$$(\mathrm{S}'_{2\times 2}) \quad \begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}.$$

La quantité réelle $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ est présente en facteur dans les deux équations. On l'appelle le ***déterminant du système*** 2×2. Cette quantité joue un rôle capital. Discutons de sa valeur.

- Supposons $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Le système $(\mathrm{S}_{2\times 2})$ possède alors une unique solution (on dit qu'il est déterminé), notons-la $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ où

$$\tilde{x}_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{et} \quad \tilde{x}_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

  D'un point de vue géométrique, cela signifie que les droites associées aux deux équations se coupent.

- Supposons maintenant $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Alors le système $(\mathrm{S}'_{2\times 2})$ s'écrit

$$\begin{cases} 0 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ 0 &= a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}.$$

  Il est clair que si l'un (ou les deux à la fois) des deux scalaires $b_1a_{22} - a_{12}b_2$ et $a_{11}b_2 - b_1a_{21}$ est non nul alors ce système est absurde et dans ce cas, il n'y

Copyrighted material

a pas de solution. D'un point de vue géométrique, les droites sont parallèles. En revanche, si l'on a simultanément $b_1a_{22} - a_{12}b_2 = 0$ et $a_{11}b_2 - b_1a_{21} = 0$ alors ce système est trivial puisque les deux équations sont de la forme $0 = 0$. D'un point de vue géométrique, cela signifie que les droites sont confondues. Il y a donc cette fois-ci une infinité de solutions. Pour les obtenir, on supprime une des deux équations du système initial $(S_{2\times 2})$, disons la deuxième, et on résout par rapport à l'une des deux inconnues. On obtient, par exemple, si $a_{11} \neq 0$,

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2).$$

Les deux inconnues x_1 et x_2 sont dépendantes l'une de l'autre. Les solutions sont tous les couples $\left(\frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2), x_2\right)$ où x_2 parcourt $\mathbb{R}$. On dit que le système $(S_{2\times 2})$ est indéterminé.

Pour être cohérent avec les notations que nous allons utiliser par la suite, nous notons

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet de noter sous la forme plus concise $\det(C_1, C_2)$ le déterminant du système $(S_{2\times 2})$:

$$\det(C_1, C_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Lorsque $\det(C_1, C_2)$ est non nul, les coordonnées de l'unique solution du système $(S_{2\times 2})$ s'écrivent

$$\tilde{x}_1 = \frac{\det(B, C_2)}{\det(C_1, C_2)} \quad \text{et} \quad \tilde{x}_2 = \frac{\det(C_1, B)}{\det(C_1, C_2)}.$$

Nous remarquons, non sans intérêt,[3] que le déterminant d'un système 2×2 vérifie les propriétés suivantes : pour toutes matrices-colonnes

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad C_1' = \begin{pmatrix} a_{11}' \\ a_{21}' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

appartenant à $M_{2,1}(\mathbb{R})$, et pour tous α, β appartenant à $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \det(\alpha C_1 + \beta C_1', C_2) &= (\alpha a_{11} + \beta a_{11}')a_{22} - (\alpha a_{21} + \beta a_{21}')a_{12} \\ &= \alpha(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + \beta(a_{11}'a_{22} - a_{21}'a_{12}) \\ &= \alpha \det(C_1, C_2) + \beta \det(C_1', C_2) \end{aligned}$$

et on dit que le déterminant est linéaire par rapport à C_1. On vérifie suivant le même modèle qu'il est aussi linéaire par rapport à C_2. De plus, on vérifie facilement que si les matrices-colonnes C_1 et C_2 sont égales alors

$$\det(C_1, C_2) = 0.$$

[3] Cette remarque motivera la définition générale d'une forme bilinéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (voir la définition 11.1, p. 465).

Copyrighted material

Le déterminant d'un système 3×3

Considérons maintenant dans $\mathbb{R}$ le système de trois équations à trois inconnues (x_1, x_2 et x_3) suivant

$$(\mathrm{S}_{3\times 3}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

où a_{11}, a_{12}, a_{13}, b_1, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_2, a_{31}, a_{32}, a_{33} et b_3 désignent des réels donnés. Conformément à la notation utilisée plus haut, $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des solutions du système $(\mathrm{S}_{3\times 3})$. Il vérifie

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$$

où $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par[4]

$$\mathcal{P}_1 = \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\big\},$$
$$\mathcal{P}_2 = \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2\big\},$$
$$\mathcal{P}_3 = \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\big\}.$$

Pour une interprétation graphique du système $(\mathrm{S}_{3\times 3})$, nous nous référons à la figure 2 où $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont représentés par des plans. En notant

$$\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

le système $(\mathrm{S}_{3\times 3})$ s'écrit aussi sous la forme

$$x_1\mathrm{C}_1 + x_2\mathrm{C}_2 + x_3\mathrm{C}_3 = \mathrm{B}. \tag{1}$$

Nous pouvons déduire de l'équation précédente trois équations, portant chacune uniquement sur une des trois inconnues x_1, x_2 et x_3. Pour ce faire, nous allons profiter du fait que nous travaillons ici dans l'espace $\mathbb{R}^3$, ce qui nous autorise à utiliser successivement les deux opérations de calcul vectoriel que sont le produit scalaire et le produit vectoriel.

1. Pour obtenir une équation portant uniquement sur l'inconnue x_1, on procède en deux étapes. On commence par effectuer le produit vectoriel de (1) par C_2, ce qui permet d'éliminer x_2 puisque $\mathrm{C}_2 \wedge \mathrm{C}_2 = 0$. On a

$$x_1(\mathrm{C}_1 \wedge \mathrm{C}_2) + x_3(\mathrm{C}_3 \wedge \mathrm{C}_2) = \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}_2.$$

On effectue ensuite le produit scalaire de cette dernière égalité avec C_3. On élimine ainsi x_3 puisque $(\mathrm{C}_3 \wedge \mathrm{C}_2) \cdot \mathrm{C}_3 = 0$. On obtient

$$x_1\big((\mathrm{C}_1 \wedge \mathrm{C}_2) \cdot \mathrm{C}_3\big) = (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}_2) \cdot \mathrm{C}_3. \tag{2}$$

[4] Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, le sous-ensemble $\mathcal{P}_i$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puisqu'il ne contient pas le vecteur nul, sauf, bien sûr, si $b_i = 0$. Nous le qualifions de sous-espace affine de dimension 2 ou de plan affine.

Copyrighted material

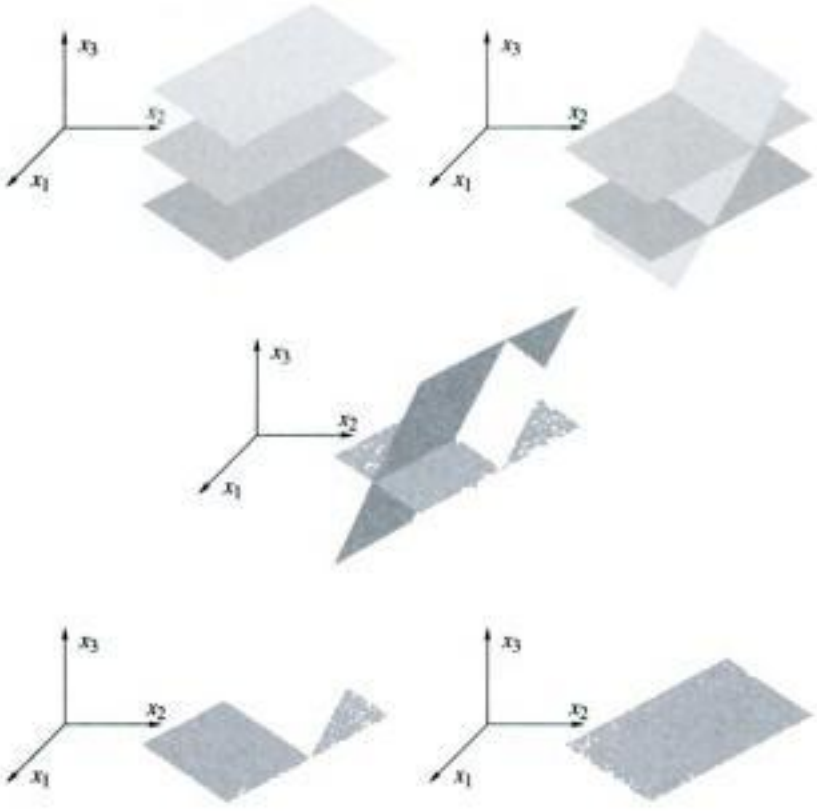


Fig. 2 Interprétation géométrique d'un système réel 3×3. Les représentations graphiques des trois équations correspondent à des plans. Trois cas sont possibles. Il n'y a pas de solution. C'est ainsi lorsque deux ou trois plans sont strictement parallèles entre eux (dessins du haut). Il y a une unique solution. C'est ainsi lorsque les plans s'interceptent en un point (dessin du milieu). Il y a une infinité de solutions. C'est ainsi lorsque seuls deux des trois plans sont confondus ou lorsque les trois plans sont confondus (dessins du bas).

2. De même, pour obtenir une équation ne portant que sur x_2, on effectue d'abord le produit vectoriel de (1) par C_1, puis on effectue le produit scalaire avec C_3. On obtient

$$x_2\big((C_2 \wedge C_1) \cdot C_3\big) = (B \wedge C_1) \cdot C_3.$$

On vérifie (revenir à la définition du produit scalaire et à celle du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$) que

$$(C_2 \wedge C_1) \cdot C_3 = -\big((C_1 \wedge C_2) \cdot C_3\big) \quad \text{et} \quad (B \wedge C_1) \cdot C_3 = -(C_1 \wedge B) \cdot C_3.$$

On en déduit

$$x_2\big((C_1 \wedge C_2) \cdot C_3\big) = (C_1 \wedge B) \cdot C_3. \tag{3}$$

Copyrighted material

3. Enfin, en effectuant dans l'ordre le produit vectoriel de (1) par C_1 et le produit scalaire avec C_2, on obtient une équation ne portant que sur l'inconnue x_3. Elle s'écrit

$$x_3\big((C_3 \wedge C_1) \cdot C_2\big) = (B \wedge C_1) \cdot C_2.$$

En revenant aux définitions du produit scalaire et du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, on vérifie que

$$(C_3 \wedge C_1) \cdot C_2 = (C_1 \wedge C_2) \cdot C_3 \quad \text{et} \quad (B \wedge C_1) \cdot C_2 = (C_1 \wedge C_2) \cdot B.$$

On en déduit

$$x_3\big((C_1 \wedge C_2) \cdot C_3\big) = (C_1 \wedge C_2) \cdot B. \tag{4}$$

On remarque la présence de la quantité réelle $(C_1 \wedge C_2) \cdot C_3$ en facteur de x_1 dans (2), en facteur de x_2 dans (3) et en facteur de x_3 dans (4). On reconnaît en $(C_1 \wedge C_2) \cdot C_3$ le produit mixte de C_1, C_2, C_3. Nous l'appelons ***déterminant du système*** 3×3 et nous le notons $\det(C_1, C_2, C_3)$, et on vérifie

$$\begin{aligned} \det(C_1, C_2, C_3) \;=\; & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \end{aligned}$$

Il est clair que si sa valeur est non nulle alors le système $(S_{3\times3})$ possède une unique solution $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ où

$$\tilde{x}_1 = \frac{\det(B, C_2, C_3)}{\det(C_1, C_2, C_3)}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{\det(C_1, B, C_3)}{\det(C_1, C_2, C_3)} \quad \text{et} \quad \tilde{x}_3 = \frac{\det(C_1, C_2, B)}{\det(C_1, C_2, C_3)}.$$

Le système est dit déterminé. D'un point de vue géométrique, cela signifie que les plans associés aux équations du système $(S_{3\times3})$ s'interceptent en un seul point.

Afin d'alléger l'exposé, nous laissons là la discussion et nous renvoyons le lecteur aux commentaires de la figure 2. Nous pouvons néanmoins déjà remarquer que la quantité $\det(C_1, C_2, C_3)$ joue le même rôle (capital) vis-à-vis d'un système linéaire 3×3, que la quantité $\det(C_1, C_2)$ vis-à-vis d'un système linéaire 2×2 et on peut vérifier que le déterminant d'un système 3×3 possède des propriétés analogues à celles du déterminant d'un système 2×2. En effet, il est facile de vérifier que le déterminant d'un système 3×3 est linéaire par rapport à C_1, par rapport à C_2 et par rapport à C_3. De plus, il est nul si, parmi les trois matrices-colonnes C_1, C_2, C_3, deux sont identiques.[5]

Le but est maintenant de définir le déterminant pour un système comportant n équations et n inconnues (avec n un entier non nul quelconque) et à coefficients dans $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour y arriver, nous le déduirons, comme cas particulier, de la définition encore plus générale d'un déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n. Nous nous intéressons dans un premier temps aux cas $n = 2$ et $n = 3$.

[5] Ces remarques seront à l'origine de la définition générale d'une forme trilinéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (voir la définition 11.3, p. 467).

Copyrighted material

11.1.2 Déterminant d'ordre 2

Commençons par donner la définition d'une forme bilinéaire alternée.

Définition 11.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

✗ *Une application $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \in E \times E \longmapsto \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \in \mathbb{K}$ est une* ***forme bilinéaire*** *si elle est linéaire en chacune des variables $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$.*

✗ *La forme bilinéaire $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite* ***alternée*** *si*

$$\forall \boldsymbol{c} \in E \quad \varphi(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = 0.$$

En d'autres termes, $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire si pour tous α, β appartenant à $\mathbb{K}$, on a

- pour tout $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1') \in E^2$ et pour tout $\boldsymbol{c}_2 \in E$,

$$\varphi(\alpha \boldsymbol{c}_1 + \beta \boldsymbol{c}_1', \boldsymbol{c}_2) = \alpha \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) + \beta \varphi(\boldsymbol{c}_1', \boldsymbol{c}_2),$$

- pour tout $\boldsymbol{c}_1 \in E$ et pour tout $(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2') \in E^2$,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \alpha \boldsymbol{c}_2 + \beta \boldsymbol{c}_2') = \alpha \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) + \beta \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2').$$

Propriété d'antisymétrie

Soient $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$ deux vecteurs de E. Puisque φ est alternée,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) = 0.$$

Or, puisque φ est bilinéaire, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) &= \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) + \varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) \\ &= \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1) + \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) + \varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1) + \varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2). \end{aligned}$$

De plus, $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1) = \varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2) = 0$ (car φ est alternée). Donc

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = -\varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1).$$

Le signe de $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$ change lorsque l'on permute les deux vecteurs $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$. On dit que φ est antisymétrique.

Quel intérêt avons-nous à disposer d'une forme bilinéaire alternée ?

Notre motivation résulte de la constatation suivante. Si $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$ sont deux vecteurs liés alors $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = 0$. En effet, si $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$ sont liés alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tels que : $\alpha \boldsymbol{c}_1 + \beta \boldsymbol{c}_2 = 0_E$. Supposons (sans perte de généralité) que β soit non nul. Alors $\boldsymbol{c}_2 = -(\alpha/\beta)\boldsymbol{c}_1$ et

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = \varphi\left(\boldsymbol{c}_1, -\frac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{c}_1\right) = -\frac{\alpha}{\beta} \underbrace{\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1)}_{=0} = 0.$$

Copyrighted material

Une conséquence est que $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$ ne change pas lorsqu'on ajoute à l'un des vecteurs un multiple de l'autre. Par exemple, pour tout $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \in E^2$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 + \gamma \boldsymbol{c}_1) = \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) + \gamma \underbrace{\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1)}_{=0} = \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2).$$

Cas d'un espace vectoriel de dimension 2

Vous remarquerez qu'à ce stade du chapitre, nous ne connaissons toujours pas de forme qui soit à la fois bilinéaire et alternée. Pour trouver une telle forme, nous nous plaçons dans le cas particulier d'un espace E de dimension 2. Nous nous donnons une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ de E ainsi qu'une forme bilinéaire alternée

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Calculons $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$ où $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_2$ sont deux vecteurs de E rapportés à la base $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{c}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{c}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2$$

où $(a_{11}, a_{21}) \in \mathbb{K}^2$ et $(a_{12}, a_{22}) \in \mathbb{K}^2$. On vérifie que l'on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) &= \varphi(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2, a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2) \\
&= \varphi(a_{11}\boldsymbol{e}_1, a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2) + \varphi(a_{21}\boldsymbol{e}_2, a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2) \\
&= \varphi(a_{11}\boldsymbol{e}_1, a_{12}\boldsymbol{e}_1) + \varphi(a_{11}\boldsymbol{e}_1, a_{22}\boldsymbol{e}_2) + \varphi(a_{21}\boldsymbol{e}_2, a_{12}\boldsymbol{e}_1) + \varphi(a_{21}\boldsymbol{e}_2, a_{22}\boldsymbol{e}_2) \\
&= a_{11}a_{12}\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_{11}a_{22}\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_{21}a_{12}\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_{21}a_{22}\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2),
\end{aligned}$$

d'où, puisque $\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 0$ (φ est alternée),

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = a_{11}a_{22}\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_{21}a_{12}\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1).$$

En tenant compte du fait que $\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, on obtient finalement[6]

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \times \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2).$$

Étant donné le choix d'une base $\mathcal{B}$, parmi toutes les formes bilinéaires alternées existantes, une seule joue un rôle privilégié en algèbre linéaire. C'est celle qui vérifie : $\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$. Notons-la

$$\det_{\mathcal{B}} : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}.$$

La notation indicielle utilisée pour $\mathcal{B}$ rappelle que cette forme est définie relativement à la base $\mathcal{B}$. On a

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \times \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$$

[6] ce qui signifie qu'une forme bilinéaire alternée $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension 2, est entièrement déterminée par son action sur une base de E.

Copyrighted material

avec $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$, d'où

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

On peut vérifier que la forme $\det_{\mathcal{B}}$ est effectivement bilinéaire et alternée.[7] De plus, elle est unique. Ceci se déduit de l'unicité de son écriture. La définition suivante a alors un sens.

Définition 11.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. Étant donnée une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ de E, on appelle* **déterminant d'ordre 2 dans la base $\mathcal{B}$** *l'unique forme bilinéaire alternée notée $\det_{\mathcal{B}} : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant*

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1.$$

Si $\boldsymbol{c}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{c}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2$ alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \overset{\text{déf.}}{=} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

On note symboliquement : $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \overset{\text{not.}}{=} \begin{array}{|cc|c} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \\ a_{11} & a_{12} & \boldsymbol{e}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{e}_2 \end{array}$.

Exemple Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2 muni de la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Les deux vecteurs $\boldsymbol{c}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{c}_2 = 10\boldsymbol{e}_1 + 15\boldsymbol{e}_2$ sont liés car :

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \overset{\text{not.}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 2 \times 15 - 3 \times 10 = 0.$$

En revanche les deux vecteurs $\boldsymbol{c}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2$ forment une famille libre (et ainsi une base de E puisque $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2$) car :

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}) \overset{\text{not.}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times 7 - 3 \times 5 = -1 \neq 0.$$

11.1.3 Déterminant d'ordre 3

Commençons par donner la définition d'une forme trilinéaire alternée.

Définition 11.3 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

✗ *Une application $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2) \in E^3 \longmapsto \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) \in \mathbb{K}$ est une* **forme trilinéaire** *si elle est linéaire en chacune des variables $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ et $\boldsymbol{c}_3$.*

✗ *La forme trilinéaire $\varphi : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite* **alternée** *si*

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) = 0$$

dès que deux des trois vecteurs $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ et $\boldsymbol{c}_3$ sont égaux.[8]

[7] Il suffit de le vérifier à partir de son expression

Copyrighted material

En d'autres termes, $\varphi : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme trilinéaire si pour tous α, β appartenant à $\mathbb{K}$, on a

- pour tout $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1') \in E^2$, pour tout $\boldsymbol{c}_2 \in E$ et pour tout $\boldsymbol{c}_3 \in E$,

$$\varphi(\alpha \boldsymbol{c}_1 + \beta \boldsymbol{c}_1', \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) = \alpha\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) + \beta\varphi(\boldsymbol{c}_1', \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3),$$

- pour tout $\boldsymbol{c}_1 \in E$, pour tout $(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2') \in E^2$ et pour tout $\boldsymbol{c}_3 \in E$,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \alpha \boldsymbol{c}_2 + \beta \boldsymbol{c}_2', \boldsymbol{c}_3) = \alpha\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) + \beta\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2', \boldsymbol{c}_3),$$

- pour tout $\boldsymbol{c}_1 \in E$, pour tout $\boldsymbol{c}_2 \in E$ et pour tout $(\boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_3') \in E^2$,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \alpha \boldsymbol{c}_3 + \beta \boldsymbol{c}_3') = \alpha\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) + \beta\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3')$$

Propriétés

Si l'on fixe l'un quelconque des trois vecteurs, φ devient une forme bilinéaire alternée par rapport aux deux autres. On en déduit les propriétés suivantes.

1. Dès que l'on permute deux vecteurs parmi les trois, la valeur par φ change de signe. Par exemple, pour tous $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$ appartenant à E,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) = -\varphi(\boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1) = -(-\varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_1)) = \varphi(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_1).$$

2. Si l'un des trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres **alors la** valeur par φ est nulle. Par exemple, considérons trois vecteurs $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$ de E et supposons qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\boldsymbol{c}_3 = \alpha \boldsymbol{c}_1 + \beta \boldsymbol{c}_2$. Alors

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) = \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \alpha \boldsymbol{c}_1 + \beta \boldsymbol{c}_2) = \alpha\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1) + \beta\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2)$$

d'où, puisque $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1) = 0$ et $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2) = 0$ (φ est alternée),

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \alpha \boldsymbol{c}_1 + \beta \boldsymbol{c}_2) = 0.$$

3. Lorsqu'on ajoute à l'un des trois vecteurs une combinaison linéaire des deux autres, la valeur par φ ne change pas. Par exemple, pour tous α, β appartenant à $\mathbb{K}$ et pour tous $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$ appartenant à E,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3 + \alpha \boldsymbol{c}_1 + \beta \boldsymbol{c}_2) = \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) + \alpha\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1) + \beta\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2),$$

d'où, puisque $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1) = 0$ et $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2) = 0$ (φ est alternée),

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3 + \alpha \boldsymbol{c}_1 + \beta \boldsymbol{c}_2) = \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3).$$

---

(8) Autrement dit, la forme trilinéaire $\varphi : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ est alternée si

$$\forall (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \in E^2 \quad \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1) = \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2) = 0.$$

Copyrighted material

Cas d'un espace vectoriel de dimension 3

Plaçons-nous dans un espace E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ et cherchons à caractériser une forme trilinéaire alternée

$$\varphi : E \times E \times E \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Procédons comme au paragraphe précédent en calculant $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ où $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ et $\boldsymbol{c}_3$ sont trois vecteurs de E rapportés à la base $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{c}_1 = \sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1,1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_2,2}\boldsymbol{e}_{i_2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c}_3 = \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3,3}\boldsymbol{e}_{i_3}.$$

En utilisant le fait que φ est une forme trilinéaire alternée, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) &= \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1,1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_2,2}\boldsymbol{e}_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3,3}\boldsymbol{e}_{i_3}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\sum_{i_3=1}^{3} a_{i_1,1}a_{i_2,2}a_{i_3,3}\,\varphi\big(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \boldsymbol{e}_{i_3}\big) \\
&= a_{11}a_{12}a_{13}\underbrace{\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}_{=0} + a_{11}a_{12}a_{23}\underbrace{\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}_{=0} + \dots
\end{aligned}$$

Nous n'avons explicité que les deux premiers termes de la somme. Il y a en fait $3^3 = 27$. Il est inutile de les écrire tous car on sait que $\varphi(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \boldsymbol{e}_{i_3}) = 0$ dès que deux indices sont égaux. Ainsi, parmi les 27 termes, on ne considère que les termes où les indices i_1, i_2 et i_3 sont tous les trois distincts. Autrement dit, on ne considère que les termes pour lesquels

$$\{i_1, i_2, i_3\} = \sigma(\{1, 2, 3\})$$

avec σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire $\sigma \in \mathfrak{S}_3$. On sait qu'il y a $3! = 6$ permutations possibles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ (voir page 48). Elles s'écrivent :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \tau_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_3 = \tau_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \sigma_4 = \tau_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_5 = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_6 = \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

où $\tau_{i,j}$ désigne la permutation qui opère uniquement sur le sous-ensemble $\{i, j\}$ de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ (en échangeant i et j) et laisse invariant l'élément de $\{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$. On a ainsi

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}a_{\sigma(3),3}\,\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(2)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(3)}\big), \tag{5}$$

Copyrighted material

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3) &= a_{11}a_{22}a_{33}\,\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)+a_{21}a_{32}a_{13}\,\varphi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)\\ &\quad +a_{31}a_{12}a_{23}\,\varphi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)+a_{31}a_{22}a_{13}\,\varphi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)\\ &\quad +a_{21}a_{12}a_{33}\,\varphi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)+a_{11}a_{32}a_{23}\,\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2).\end{aligned}$$

Montrons que pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_3$, le terme $\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma(2)},\boldsymbol{e}_{\sigma(3)}\big)$ est égal, à un signe multiplicatif près, à $\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. Le cas de σ_1 est immédiat puisque σ_1 est l'application identité :

$$\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma_1(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma_1(2)},\boldsymbol{e}_{\sigma_1(3)}\big)=\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3).$$

Considérons les 5 autres cas :

- cas où $\sigma_2=\tau_{1,2}$: $\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma_2(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma_2(2)},\boldsymbol{e}_{\sigma_2(3)}\big)=\varphi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)=-\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$,
- cas où $\sigma_3=\tau_{2,3}$: $\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma_3(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma_3(2)},\boldsymbol{e}_{\sigma_3(3)}\big)=\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)=-\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$,
- cas où $\sigma_4=\tau_{1,3}$: $\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma_4(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma_4(2)},\boldsymbol{e}_{\sigma_4(3)}\big)=\varphi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)=-\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$,
- cas où $\sigma_5=\tau_{2,3}\circ\tau_{1,3}$: $\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma_5(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma_5(2)},\boldsymbol{e}_{\sigma_5(3)}\big)=\varphi(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)=\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$,
- cas où $\sigma_6=\tau_{2,3}\circ\tau_{1,2}$: $\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma_6(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma_6(2)},\boldsymbol{e}_{\sigma_6(3)}\big)=\varphi(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.

En résumé, nous avons montré que

$$\forall\sigma\in\mathfrak{S}_3\quad\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\boldsymbol{e}_{\sigma(2)},\boldsymbol{e}_{\sigma(3)}\big)=\varepsilon(\sigma)\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$$

avec $\varepsilon(\sigma)=+1$ (respectivement $\varepsilon(\sigma)=-1$) lorsque la permutation σ est une transposition (resp. la composée de deux transpositions). On déduit de (5)

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3)=\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}a_{\sigma(3),3}\Big)\times\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3),\qquad(6)$$

c'est-à-dire[9]

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3) &= \Big(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}\\ &\quad -a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}\Big)\times\varphi(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3).\end{aligned}$$

Là encore, étant donné le choix d'une base $\mathcal{B}$, parmi toutes les formes trilinéaires alternées existantes, une seule joue un rôle privilégié en algèbre linéaire. On la note

$$\det_{\mathcal{B}}:E\times E\times E\longrightarrow\mathbb{K}.$$

[9] ce qui signifie qu'une forme trilinéaire alternée $\varphi:E\times E\times E\longrightarrow\mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension 3, est entièrement déterminée par son action sur une base de E.

Copyrighted material

C'est celle qui vérifie $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$. On peut vérifier qu'elle est effectivement trilinéaire et alternée, et ce en effectuant les calculs à partir de son expression (qui se déduit de (6)) :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.\end{aligned}$$

Une fois de plus, l'unicité de l'écriture prouve l'unicité de la forme. Tout cela nous conduit à la définition suivante.

Définition 11.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Étant donnée une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de E, on appelle* **déterminant d'ordre 3 dans la base** *$\mathcal{B}$ l'unique forme trilinéaire alternée notée $\det_{\mathcal{B}} : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant*

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1.$$

Si pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$ on note a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{c}_j$ dans la base $\mathcal{B}$ alors

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) &\overset{déf.}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.\end{aligned}$$

On note symboliquement : $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) \overset{not.}{=} \begin{array}{|ccc|c} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boldsymbol{e}_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boldsymbol{e}_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boldsymbol{e}_3 \end{array}$.

Développement selon la règle de Sarrus

Pour se souvenir de la formule du déterminant d'ordre 3, on peut utiliser la disposition pratique

$$\begin{array}{|ccc|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & \searrow & & & \nearrow & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & \nearrow & & & \searrow & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}.$$

Ainsi, dans l'expression de $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$

- les trois premiers termes (ceux précédés d'un signe $+$) se retrouvent grâce aux trois premières diagonales descendantes,
- et les trois derniers termes (ceux précédés d'un signe $-$) se retrouvent grâce aux trois premières diagonales montantes.

Copyrighted material

En procédant ainsi, on dit que l'on a developpé le déterminant d'ordre 3 selon la ***règle de Sarrus.***[10]

Exemple Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension 3 muni de la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Les trois vecteurs

$$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{c}_2 = -\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{c}_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$$

forment une famille libre car leur déterminant dans la base $\mathcal{B}$ est non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Remarques

1. Les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ de chacun des trois vecteurs $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ et $\boldsymbol{c}_3$ peuvent être disposées soit en colonne (comme nous l'avons fait dans l'exemple ci-dessus), soit en ligne. Cela n'influe pas sur la valeur finale de $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$. En effet, on vérifie facilement l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Un déterminant d'ordre 3 peut se décomposer en une combinaison linéaire de 3 déterminants d'ordre 2. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

On dit que l'on a développé le déterminant d'ordre 3 par rapport à sa première colonne. Nous reviendrons sur cette remarque au § 11.1.5.

11.1.4 Déterminant d'ordre n

Nous généralisons maintenant les notions de forme bilinéaire alternée et de forme trilinéaire alternée en introduisant celle de forme multilinéaire alternée.

[10] SARRUS, Pierre (1798, Saint Affrique (dans l'aveyron) - 1861, Saint Affrique). Mathématicien français, Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg.

Copyrighted material

Définition 11.5 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.*

✗ *Une application $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \in E^n \longmapsto \varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \in \mathbb{K}$ est une* ***forme n-linéaire alternée*** *si elle est linéaire en chacune de ses variables.*

✗ *La forme n-linéaire $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite* ***alternée*** *si*

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = 0$$

dès que au moins deux des vecteurs $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, ..., $\boldsymbol{c}_n$ sont égaux.

Commentons cette définition.

- Dire qu'une application $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est n-linéaire signifie que pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et pour tous vecteurs $\boldsymbol{c}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, appartenant à E, l'application

$$\boldsymbol{c}_i \in E \longrightarrow \varphi(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{i-1}, \boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \in \mathbb{K}$$

  est linéaire.

- Lorsque l'on permute les vecteurs $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$, la valeur de $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ est inchangée à un signe multiplicatif près. On rappelle que toute permutation est décomposable d'au moins une manière en un produit de transpositions (voir l'exercice 8, p. 78). En notant $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble constitué de toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \varphi\big(\boldsymbol{c}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{c}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{c}_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma)\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$$

  avec $\varepsilon(\sigma) = +1$ (respectivement $\varepsilon(\sigma) = -1$) lorsque la permutation σ peut s'écrire comme le produit d'un nombre pair (resp. impair) de transpositions. Le nombre $\varepsilon(\sigma)$ s'appelle la ***signature de la permutation*** σ.

Cas d'un espace vectoriel de dimension n

On suppose $n \geqslant 2$. Pour trouver une forme n-linéaire alternée $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$, nous nous plaçons dans un espace E de dimension n que nous munissons d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. L'expression de φ s'obtient alors en développant $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ où chacun des vecteurs $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ est décomposé dans la base $\mathcal{B}$ comme suit

$$\boldsymbol{c}_1 = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}\boldsymbol{e}_{i_2}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{c}_n = \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\boldsymbol{e}_{i_n}.$$

On a donc, puisque φ est une forme n-linéaire alternée,

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) &= \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}\boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\boldsymbol{e}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1}a_{i_2,2}\ldots a_{i_n,n}\varphi\big(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}\big).\end{aligned}$$

Copyrighted material

Parmi tous les termes présents dans la somme (il y en a n^n), tous sont nuls sauf ceux pour lesquels

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \sigma(\{1, 2, \ldots, n\})$$

avec σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, c'est-à-dire $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Rappelons qu'il y a $n!$ permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. On obtient ainsi

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\big).$$

Par commodité, nous utilisons la notation indicielle suivante :

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = a_{\sigma(1),1} \times a_{\sigma(2),2} \times \ldots \times a_{\sigma(n),n}.$$

De plus, puisque $\varphi\big(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma)\varphi(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\varphi(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\right)\right] \times \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n). \tag{7}$$

Afin d'alléger les notations, on note parfois $\varphi(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ sous la forme $\varphi(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est la famille définie par $\mathcal{F} = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$. Ainsi, l'égalité (7) donnée ci-dessus s'écrit

$$\varphi(\mathcal{F}) = \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\right)\right] \times \varphi(\mathcal{B}). \tag{8}$$

Une forme n-linéaire alternée $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-espace de dimension n, est par conséquent entièrement déterminée par son action sur une base de E. La définition suivante a alors un sens.

Définition 11.6 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Étant donnée une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ de E, on appelle* **déterminant d'ordre n dans la base $\mathcal{B}$** *l'unique forme n-linéaire alternée notée $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant*

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1.$$

Si pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on note a_{1j}, a_{2j}, $\ldots$, a_{nj} les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{c}_j$ dans la base $\mathcal{B}$ alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\right)$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Copyrighted material

On note symboliquement

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \overset{not.}{=} \left|\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n & \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \boldsymbol{e}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \boldsymbol{e}_n \end{array}\right| .$$

Il est évident que la formule donnant l'expression d'un déterminant d'ordre n généralise celle d'un déterminant d'ordre 3 (voir la définition 11.4, p. 471). On retrouve aussi l'expression d'un déterminant d'ordre 2. En effet,

$$\begin{aligned} \left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right| &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{2} a_{\sigma(i),i} \right) = \sum_{\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2\}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \\ &= \varepsilon(\sigma_1) a_{\sigma_1(1),1} a_{\sigma_1(2),2} + \varepsilon(\sigma_2) a_{\sigma_2(1),1} a_{\sigma_2(2),2} \end{aligned}$$

car $\mathfrak{S}_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ avec $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} &\sigma_1(1) = 1 \text{ et } \sigma_1(2) = 2, \quad \text{d'où} \quad a_{\sigma_1(1),1} = a_{11} \text{ et } a_{\sigma_1(2),2} = a_{22}, \\ &\sigma_2(1) = 2 \text{ et } \sigma_2(2) = 1, \quad \text{d'où} \quad a_{\sigma_2(1),1} = a_{21} \text{ et } a_{\sigma_2(2),2} = a_{12}. \end{aligned}$$

De plus, $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = -1$. Finalement,

$$\left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

On a ainsi retrouvé l'expression d'un déterminant d'ordre 2.

Notations

Soit $n \geqslant 2$. Pour toute famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ de vecteurs de E, on note parfois $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ sous la forme $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. En particulier, l'égalité

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$$

s'écrit aussi

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1.$$

Remarques

1. D'après la définition de la forme $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$, l'égalité (8) s'écrit maintenant sous la forme

$$\varphi(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \times \varphi(\mathcal{B}) \tag{9}$$

où $\mathcal{F}$ désigne une famille de n vecteurs de E et où $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ désigne une forme n-linéaire alternée (quelconque). En particulier, puisque la forme $\det_{\mathcal{B}}$ est elle-même n-linéaire alternée, elle vérifie aussi l'égalité (9) et, dans ce cas,

Copyrighted material

cette dernière est triviale.[11] On peut aussi considérer comme forme n-linéaire alternée, le déterminant dans n'importe quelle autre base $\mathcal{C}$ de E. Ainsi, pour toute famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E,

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \times \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \tag{10}$$

ou encore, en inversant les rôles des deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}). \tag{11}$$

Ce dernière égalité nous sera utile pour démontrer la première propriété de la proposition 11.3. En particulier, en choisissant $\mathcal{F}$ égale à $\mathcal{C}$ dans (10), ou encore $\mathcal{F}$ égale à $\mathcal{B}$ dans (11), on obtient

$$1 = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \times \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}).$$

car $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = 1 = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$. Nous utiliserons ce résultat dans la démonstration de la proposition 11.1.

L'intérêt de disposer d'une forme n-linéaire alternée devient évident au vue de la proposition suivante.

Proposition 11.1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ muni d'une base $\mathcal{B}$ et $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ des vecteurs de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ forment une base de E est que*

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \neq 0.$$

Démonstration $\trianglerighteq$ Montrons que si $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ est non nul alors la famille $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ est libre et constitue donc une base de E puisque

$$\operatorname{card}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

Utilisons un raisonnement par contraposée. Supposons la famille $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ liée et montrons que $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = 0$. D'après la proposition 8.6 (voir p. 320), un de ses vecteurs s'écrit alors comme une combinaison linéaire des autres vecteurs :

$$\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j$$

où $\beta_j \in \mathbb{K}$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. On en déduit

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n),$$

[11] Elle s'écrit en effet sous la forme

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}),$$

c'est-à-dire $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ puisque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Copyrighted material

et par la propriété de linéarité de la forme $\det_{\mathcal{B}}$ par rapport à sa i-ième variable,

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\beta_j\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n).$$

Il apparaît ainsi $n-1$ déterminants dans la somme de droite. Pour chacun d'eux, le vecteur $\boldsymbol{v}_j$ y est répété deux fois. Puisque la forme $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée, chacun de ces $n-1$ déterminants est nul et on en déduit que $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ est nul.

$\trianglerighteq$ Montrons maintenant la réciproque. Supposons la famille $(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ libre et montrons que $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)\neq 0$. Puisque $(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ est libre et puisque son cardinal est égal à la dimension de E, c'est donc une base de E. Notons-la désormais $\mathcal{C}$. On peut ainsi définir l'unique forme n-linéaire alternée notée $\det_{\mathcal{C}}:E^n\longrightarrow\mathbb{K}$ vérifiant $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})=1$. La relation suivante (nous l'avons établie plus haut)

$$1=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\times\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$$

permet de conclure directement car il est clair que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ ne peut être nul. □

Déterminant d'une matrice carrée

En s'inspirant de la formule donnée dans la définition 11.6, on peut définir le déterminant d'une matrice carrée indépendamment de tout contexte vectoriel.

Définition 11.7 *Soit* $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *une matrice carrée d'ordre* $n\geqslant 2$. *On appelle* ***déterminant de*** A, *et on note* $\det(\mathrm{A})$, *le scalaire*[12]

$$\det(\mathrm{A})\overset{\text{déf.}}{=}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}\Big).$$

Donnons à présent une interprétation vectorielle au déterminant d'une matrice A d'ordre n. Considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n\geqslant 2$, muni d'une base $\mathcal{B}$ et désignons par $\boldsymbol{c}_1,\ldots,\boldsymbol{c}_n$ les vecteurs de E dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{B}$ correspondent aux colonnes $\mathrm{C}_1,\ldots,\mathrm{C}_n$ de A. Le déterminant de la matrice A s'interprète alors comme le déterminant des vecteurs $\boldsymbol{c}_1,\ldots,\boldsymbol{c}_n$ de E par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$\det(\mathrm{A})=\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{c}_1,\ldots,\boldsymbol{c}_n)$$

et on écrit parfois

$$\det(\mathrm{A})=\det(\mathrm{C}_1,\ldots,\mathrm{C}_n).$$

[12] La notion de déterminant est dépourvue de sens pour des matrices rectangulaires et non carrées. Il ne faut pas faire l'amalgame avec le rang d'une matrice qui, lui, est défini pour n'importe quel type de matrice (qu'elle soit rectangulaire ou carrée).

Copyrighted material

C'est l'écriture que nous avions utilisée au paragraphe 11.1.1.

Remarque Il est clair que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ pour toute base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$. On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\det(\mathrm{I}_n) = 1.$$

La caractérisation suivante est très utile en pratique.

Proposition 11.2 *Pour qu'une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{K}$ soit inversible il faut et il suffit que son déterminant soit non nul. En d'autres termes, pour toute matrice carrée* A *d'ordre $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{K}$,*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

Démonstration L'inversibilité de la matrice A carrée d'ordre n équivaut à l'indépendance linéaire de ses n vecteurs colonnes, qui équivaut à son tour à $\det(\mathrm{A}) \neq 0$. □

Proposition 11.3 *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tous* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, *on a :*

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \det(\mathrm{A}) \times \det(\mathrm{B}).$$

En particulier, si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *alors* $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}$.

Démonstration ⊵ Elle s'effectue en considérant séparément les cas où A est inversible et où A n'est pas inversible. Supposons dans un premier temps la matrice A inversible. Elle s'interprète alors comme une matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n à une base $\mathcal{C}$ du même espace. Cela signifie que sa j-ième colonne est formée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du j-ième vecteur de la base $\mathcal{C}$. On a ainsi

$$\det(\mathrm{A}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}). \tag{12}$$

Soient $\mathrm{C}'_1, \ldots, \mathrm{C}'_n$ les colonnes de la matrice B et $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$ celles du produit AB. Désignons par $\mathcal{F}$ la famille constituée des vecteurs de E dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{C}$ correspondent à $\mathrm{C}'_1, \ldots, \mathrm{C}'_n$, autrement dit telle que

$$\det(\mathrm{B}) = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}). \tag{13}$$

Il est clair que $\mathrm{C}_j = \mathrm{AC}'_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Les colonnes de la matrice produit AB contiennent ainsi les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. On a donc

$$\det(\mathrm{AB}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}). \tag{14}$$

Copyrighted material

Or, nous avons vu que l'on pouvait écrire (voir page 476) :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}).$$

Ainsi, en tenant compte des égalités (12), (13) et (14), on en déduit que

$$\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{B}) \times \det(\mathrm{A}).$$

Le cas où A n'est pas inversible est immédiat. On a $\det(\mathrm{A}) = 0$ (d'après la proposition 11.2) et la matrice produit AB est nécessairement non inversible **car,** sinon, il existerait une matrice C telle que $(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{I}_n$, ou encore, par associativité du produit matriciel, telle que $\mathrm{A}(\mathrm{BC}) = \mathrm{I}_n$ et A serait inversible. On a donc $\det(\mathrm{AB}) = 0$ et l'égalité $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{B}) \times \det(\mathrm{A})$ est satisfaite.

$\trianglerighteq$ Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. En prenant la matrice B égale à A^{-1} (qui existe puisque A est inversible) et en utilisant le fait que $\det(\mathrm{I}_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on obtient

$$1 = \det(\mathrm{A}) \times \det(\mathrm{A}^{-1}).$$

On en déduit d'une part que les deux scalaires $\det(\mathrm{A})$ et $\det(\mathrm{A}^{-1})$ sont non nuls puisque leur produit est non nul, et d'autre part que

$$\det(\mathrm{A}^{-1}) = 1/\det(\mathrm{A}),$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarques

1. Puisque le produit est commutatif dans $\mathbb{K}$, on déduit de la proposition 11.3 que, pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$,

$$\det(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \det(\mathrm{B} \times \mathrm{A}).$$

2. Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Si A et B sont semblables alors leurs déterminants ont la même valeur. En effet, A et B sont semblables signifie qu'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et on en déduit

$$\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \det(\mathrm{P}^{-1}) \times \det(\mathrm{A}) \times \det(\mathrm{P}) = \det(\mathrm{A})$$

car $\det(\mathrm{P}^{-1}) = 1/\det(\mathrm{P})$.

Proposition 11.4 *Pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $n \geqslant 2$,

$$\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^T).$$

Démonstration Rappelons que si $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ alors $\mathrm{A}^T = (a'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. On doit montrer que $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^T)$, autrement dit que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right). \tag{15}$$

Copyrighted material

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. En posant $j = \sigma(i)$, soit $i = \sigma^{-1}(j)$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}. \tag{16}$$

Un tel changement d'indice revient en fait à réordonner le produit des scalaires $a_{\sigma(1),1}, a_{\sigma(2),2}, \ldots, a_{\sigma(n),n}$ suivant le premier indice.[13] On vérifie facilement que la signature d'une permutation σ et celle de sa réciproque, la permutation σ^{-1}, sont identiques. En multipliant le terme de gauche dans (16) par $\varepsilon(\sigma)$ et celui de droite par $\varepsilon(\sigma^{-1})$, on obtient

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}. \tag{17}$$

Il revient au même de sommer le terme de gauche dans (17) par rapport à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ que de sommer le terme de droite de (17) par rapport à $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$. Ainsi,

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \right) = \sum_{\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)} \right). \tag{18}$$

On reconnaît à gauche dans l'égalité (18), l'expression du déterminant de A. Intéressons-nous à celle de droite. On a

$$\sum_{\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right) \tag{19}$$

où on a remplacé σ^{-1} par σ (puisque l'indice de sommation est muet) et j par i (puisque l'indice de produit est aussi muet). On reconnaît cette fois-ci à droite dans l'égalité (19) l'expression du déterminant de A^T. En regroupant (18) et (19), on obtient finalement (15), c'est-à-dire $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^T)$. □

Remarque Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Rappelons que les colonnes de la matrice A^T correspondent aux lignes de la matrice A. Puisque le déterminant de A et celui de sa matrice transposée, la matrice A^T, sont égaux, le déterminant

---

[13] Pour s'en convaincre, plaçons-nous, à titre d'exemple, dans le cas où $n = 4$ et considérons la permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 2$ et $\sigma(4) = 1$. D'où

$$\begin{aligned} & a_{\sigma(1),1} \times a_{\sigma(2),2} \times a_{\sigma(3),3} \times a_{\sigma(4),4} \\ &= a_{31} \times a_{42} \times a_{23} \times a_{14} \\ &= a_{14} \times a_{23} \times a_{31} \times a_{42} \quad \text{où on a réordonné suivant le 1er indice} \\ &= a_{1,\sigma^{-1}(1)} \times a_{2,\sigma^{-1}(2)} \times a_{3,\sigma^{-1}(3)} \times a_{4,\sigma^{-1}(4)} \end{aligned}$$

car $\sigma^{-1}(1) = 4$, $\sigma^{-1}(2) = 3$, $\sigma^{-1}(3) = 1$ et $\sigma^{-1}(4) = 2$.

Copyrighted material

de A s'obtient aussi en calculant le déterminant de ses lignes L_1, L_2, ..., L_n, et on écrit

$$\det(A) = \det(L_1, L_2, \ldots, L_n).$$

11.1.5 Développement d'un déterminant suivant une colonne ou une ligne

En pratique, la formule du déterminant d'ordre n donnée dans la définition 11.6 est rarement utilisée. On lui préfère la formule de récurrence (sur l'ordre) donnée ci-après.

Soient A une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 3$ telle que $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Son déterminant est donné par

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \times a_{ij} \times \det\left(A^{(i,j)}\right) \right)$$

où l'indice j prend une valeur quelconque entre 1 et n, et où $A^{(i,j)}$ désigne la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans A la i-ième ligne et la j-ième colonne. On dit que l'on a développé le déterminant suivant la j-ième colonne. Afin d'alléger l'exposé, nous décidons de ne pas démontrer ce résultat.[14]

Pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, le déterminant de la sous-matrice $A^{(i,j)}$ s'appelle le ***mineur de*** a_{ij} ***dans*** A et le produit $(-1)^{i+j}\det\left(A^{(i,j)}\right)$ s'appelle le ***cofacteur de*** a_{ij} ***dans*** A.

Ainsi, un déterminant d'ordre n se décompose en une combinaison linéaire de n déterminants d'ordre $n-1$, ces derniers se décomposant chacun en une combinaison linéaire de $n-1$ déterminants d'ordre $n-2$, et ainsi de suite jusqu'à s'être ramené à l'ordre 3. À ce niveau-là, on a le choix entre

- calculer directement chacun des déterminants d'ordre 3 en utilisant la règle de Sarrus,[15]
- ou développer chacun des déterminants d'ordre 3 par rapport à une ligne ou à une colonne pour faire apparaître une combinaison linéaire de déterminants d'ordre 2.

Nous insistons sur le fait que le calcul d'un déterminant est indépendant du choix de la colonne par rapport à laquelle on effectue le développement. Ainsi, on développera de préférence par rapport à la colonne comportant le moins de termes non nuls.

---

[14] Vous en trouverez une démonstration dans l'ouvrage : *Algèbre I*, J.-M. Monier, Collection J'intègre (Dunod, 2000).

[15] Rappelons que la règle de Sarrus n'est valable que pour les déterminants d'ordre 3. Elle ne peut donc être généralisée pour $n \geqslant 4$.

Copyrighted material

Exemple En utilisant un développement par rapport à la première colonne,[16]

$$\begin{vmatrix} 2^{(+)} & 0 & 0 \\ 5^{(-)} & -1 & 2 \\ 3^{(+)} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 5\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 3\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} = -2.$$

On peut aussi développer par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0^{(-)} & 0 \\ 5 & -1^{(+)} & 2 \\ 3 & 0^{(-)} & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Puisque le déterminant d'une matrice et celui de sa matrice transposée sont égaux, on peut aussi développer le déterminant suivant n'importe quelle ligne. Par exemple, en développant par rapport à la deuxième ligne,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5^{(-)} & -1^{(+)} & 2^{(-)} \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} = -2.$$

Déterminant d'une matrice triangulaire

La formule de récurrence d'un déterminant nous donne immédiatement l'expression du déterminant d'une matrice triangulaire.

Proposition 11.5 *Si* $\mathrm{T} = (t_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *est une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) alors son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux :*

$$\det(\mathrm{T}) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}.$$

Démonstration Rappelons que si une matrice est triangulaire supérieure, alors sa transposée est une matrice triangulaire inférieure. De plus, le déterminant d'une matrice et celui de sa transposée sont égaux. Ainsi, nous n'effectuons la démonstration que dans le cas d'une matrice triangulaire supérieure. Démontrons la propriété en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'ordre n. Il est clair que la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie à l'ordre $n-1$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et montrons qu'elle est vraie à l'ordre n. Soit T une matrice triangulaire supérieure d'ordre n :

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

[16] Il est à noter la présence symbolique du signe de $(-1)^{i+j}$ (où i est l'indice de la ligne et j celui de la colonne correspondant au coefficient considéré) en exposant de chacun des termes de la colonne par rapport à laquelle on a développé. Cela aide à ne pas les oublier lorsque l'on développe !

Copyrighted material

En développant par rapport à la n-ième ligne, on obtient

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} \times t_{nn} \times \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,n-1} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Utilisons à présent notre hypothèse de récurrence. Elle s'écrit

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,n-1} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1} t_{ii}. \quad (21)$$

En injectant (21) dans (20), on obtient

$$\det(\mathrm{T}) = t_{nn} \times \prod_{i=1}^{n-1} t_{ii}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \det(\mathrm{T}) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii},$$

ce qui termine la récurrence sur n. □

On déduit immédiatement des deux propositions 11.2 et 11.5 la caractérisation suivante.

Corollaire 11.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) soit inversible est que ses coefficients diagonaux soient tous non nuls.*

11.1.6 Propriétés des déterminants

Chacune des propriétés que nous énonçons dans ce paragraphe se justifie en considérant le déterminant comme une forme multilinéaire alternée. Pour bien les assimiler, nous conseillons de les vérifier sur un déterminant d'ordre 2 ou sur un déterminant d'ordre 3. Rappelons que le déterminant d'une matrice et celui de sa matrice transposée sont égaux. Par conséquent, toute propriété énoncée par rapport aux colonnes reste valable si elle est énoncée par rapport aux lignes. Il nous semble plus approprié d'énoncer chacune des propriétés du déterminant par rapport aux rangées, englobant ainsi lignes et colonnes.

- PROPRIÉTÉ 1 : si tous les éléments d'une même rangée sont nuls alors le déterminant est nul.
- PROPRIÉTÉ 2 : si l'on permute deux rangées du même type (ligne ou colonne) alors le déterminant change de signe.
- PROPRIÉTÉ 3 : si l'on multiplie par $\alpha \in \mathbb{K}$ tous les éléments d'une même rangée alors le déterminant est multiplié par α. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Copyrighted material

En particulier, si toutes les rangées d'une matrice $n \times n$ sont multipliées par le même scalaire α alors son déterminant est multiplié par α^n. Autrement dit,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 4^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4^3 \times 7.$$

- PROPRIÉTÉ 4 : si une rangée s'écrit comme une combinaison linéaire des autres rangées du même type alors son déterminant est nul. En particulier, si deux rangées parallèles sont égales alors le déterminant est nul.
- PROPRIÉTÉ 5 : le déterminant ne change pas lorsque l'on ajoute à une rangée une combinaison linéaire des rangées du même type, à l'exception de la rangée considérée.

Les propriétés du déterminant que nous venons d'énoncer sont très utiles dans les calculs. En effet, avant de procéder au développement par rapport à une colonne ou à une ligne, on a souvent intérêt à faire apparaître le plus de zéros sur la ligne ou la colonne par rapport à laquelle on a choisi de développer.

Exemples

1. Calculons le déterminant D_1 suivant

$$D_1 = \begin{vmatrix} (1+\mathrm{i})/3 & (1-2\mathrm{i})/3 & (1+\mathrm{i})/3 \\ (1-2\mathrm{i})/3 & (1+\mathrm{i})/3 & (1+\mathrm{i})/3 \\ (1+\mathrm{i})/3 & (1+\mathrm{i})/3 & (1-2\mathrm{i})/3 \end{vmatrix}$$

où $\mathrm{i}^2 = -1$. Toutes les lignes étant multipliées par $1/3$, on en déduit

$$D_1 = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \end{vmatrix}.$$

En retranchant la colonne 1 aux colonnes 2 et 3, on obtient

$$D_1 = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 0 \\ 1-2\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 0 & -3\mathrm{i} \end{vmatrix}.$$

Puis, en additionnant la ligne 3 à la ligne 2, il vient

$$D_1 = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 0 \\ 2-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & 0 \\ 1+\mathrm{i} & 0 & -3\mathrm{i} \end{vmatrix}.$$

Enfin, en développant par rapport à la dernière colonne, on trouve

$$D_1 = -\frac{3\mathrm{i}}{27} \begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & -3\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{vmatrix} = 1.$$

Copyrighted material

2. Calculons à présent le déterminant D_2 suivant

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{vmatrix}$$

où $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. En additionnant les colonnes 1 et 2 à la troisième colonne, et en tenant compte de l'égalité $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$, il vient

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & \mathrm{j} & 0 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

d'où, en développant par rapport à la troisième colonne,

$$D_2 = 3 \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{j} \\ 1 & \mathrm{j}^2 \end{vmatrix} = 3\mathrm{j}(\mathrm{j} - 1).$$

Exercice 1 *Calculer les déterminants d'ordre n suivants :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}.$$

Application au calcul du rang d'une matrice rectangulaire

Nous donnons dans ce paragraphe une méthode permettant le calcul du rang d'une matrice rectangulaire, basée sur la théorie des déterminants.

Définition 11.8 *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On appelle* **déterminant d'ordre** k **extrait de** A *tout déterminant d'une matrice carrée d'ordre k déduite de* A *par suppression de $n-k$ lignes et de $p-k$ colonnes.*

En particulier, une matrice carrée déduite de A par suppression de $n-1$ lignes et de $p-1$ colonnes est d'ordre 1. On l'identifie alors à un scalaire et on convient que son déterminant est égal au scalaire lui-même.

Le résultat suivant peut s'avérer très utile en pratique.

Proposition 11.6 *Soit* A *une matrice non nulle de* $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Le rang de* A *est le plus grand entier ρ tel qu'il existe un déterminant non nul d'ordre ρ extrait de* A.

Copyrighted material

Démonstration Pour une démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage : *Algèbre I*, J.-M. Monier, Collection J'intègre (Dunod, 2000). □

Exemple Calculons le rang de la matrice rectangulaire 4×3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son rang est au moins égal à deux puisqu'il existe (au moins) une matrice extraite d'ordre 2 dont le déterminant est non nul. Par exemple, la matrice obtenue à partir de A par suppression des deux dernières lignes et de la dernière colonne convient car

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Examinons à présent les déterminants d'ordre 3 extraits de A. Intéressons-nous d'abord à la matrice extraite correspondant aux trois premières lignes de A. Son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

En revanche, la matrice extraite obtenue en supprimant la première ligne a un déterminant non nul :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On a donc exhibé un déterminant non nul d'ordre 3 extrait de A. Il est clair qu'on ne peut pas extraire de déterminant d'ordre supérieur (puisque la matrice est de type $(4, 3)$). On conclut donc que le rang de A est égal à 3.[17]

11.2 Généralités sur les systèmes d'équations linéaires

11.2.1 Définition

Commençons par la définition générale d'un système d'équations linéaires. Les entiers n et p sont toujours non nuls.

[17] À titre d'entrainement, on peut vérifier que la méthode des zéros échelonnés confirme ce résultat.

Copyrighted material

Définition 11.9 ✗ *On appelle* ***système de n équations linéaires à p inconnues et à coefficients dans*** $\mathbb{K}$[18] *un système d'équations de la forme :*

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$

où les ***inconnues*** *sont les scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de $\mathbb{K}$ et où les* ***données*** *sont les scalaires a_{ij} de $\mathbb{K}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ (appelés* ***coefficients*** *du système) et les scalaires b_i de $\mathbb{K}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (appelés* ***seconds membres*** *du système).*

✗ *On appelle* ***solution du système*** *tout p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui vérifie les n équations du système précédent.*

✗ *Un système est dit* ***homogène*** *si tous les seconds membres sont nuls.*

Un système d'équations linéaires peut avoir

- plus d'équations que d'inconnues (c'est le cas si $n > p$ et le système est dit surabondant),
- moins d'équations que d'inconnues (c'est le cas si $n < p$ et le système est dit sousabondant),
- autant d'équations que d'inconnues (c'est le cas si $n = p$).

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de tous les p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations du système (S). Il vérifie

$$\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$$

où, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{H}_i$ est le sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$ défini par

$$\mathcal{H}_i \overset{\text{déf.}}{=} \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \;\middle|\; a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p = b_i\right\}.$$

Il est à noter que, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{H}_i$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ puisqu'il ne contient pas le vecteur nul, sauf si $b_i = 0$.[19]

Comme nous le verrons, un système linéaire de type (n, p) peut, soit ne posséder aucune solution, soit en posséder une seule, soit en posséder une infinité, et il

[18] On dit aussi un système rectangulaire de type (n, p) ou $n \times p$.

[19] Les sous-ensembles $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$ sont qualifiés de sous-espace affine de dimension $p-1$ (on dit aussi hyperplan affine). Il sera établi plus loin, qu'à l'instar des sous-ensembles $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système linéaire ne possède pas de structure de sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, sauf dans le cas particulier où tous les seconds membres sont nuls.

Copyrighted material

n'y a pas d'autres alternatives.[20] Ce n'est pas parce qu'un système possède autant d'équations que d'inconnues qu'il possède nécessairement une solution. Le « bon » critère porte non pas sur la taille du système mais sur son rang (le rang d'un système sera défini au § 11.2.3). Néanmoins, remarquons dès à présent qu'un système homogène de type (n, p) admet toujours pour solution le vecteur

$$(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^p,$$

qualifié de ***solution banale*** ou ***solution triviale***, et ce quelles que soient les valeurs prises par n et p.

Définition 11.10 ✗ *On dit que deux systèmes linéaires sont* **équivalents** *s'ils ont le même ensemble de solutions.*

✗ *Un système est dit* **déterminé** *(respectivement* **indéterminé***) lorsqu'il possède une unique solution (resp. une infinité de solutions).*

11.2.2 Interprétation matricielle

Il est commode d'écrire un système de type (n, p) sous la forme d'une équation matricielle. Pour cela, considérons la matrice rectangulaire $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et les matrices-colonnes $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définies par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Le système (S) s'écrit sous la forme d'une équation matricielle (équivalente au système)

$$(\mathrm{EM}) \quad \mathrm{AX} = \mathrm{B}$$

où les données sont la matrice rectangulaire $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la matrice-colonne $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et où l'inconnue est la matrice-colonne $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Par conséquent, il est équivalent de résoudre le système (S) ou de résoudre l'équation matricielle (EM). Dans ce cas, il s'agit de déterminer toutes les matrices-colonnes X de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifiant l'équation matricielle $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$.

Remarque En notant $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p$ les colonnes de la matrice A (ce sont des éléments de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$), l'équation matricielle (EM) peut aussi s'écrire sous la forme

$$(\mathrm{EM}') \quad x_1\mathrm{C}_1 + x_2\mathrm{C}_2 + \ldots + x_p\mathrm{C}_p = \mathrm{B}.$$

Nous utiliserons parfois cette écriture.

[20] Lorsque l'application n'est pas linéaire, il y a d'autres alternatives. Par exemple, l'équation $x^2 = 4$ possède deux solutions distinctes. L'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas linéaire.

Copyrighted material

Définition 11.11 *Un système d'équation matricielle* $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ *avec*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

est dit ***rectangulaire****. En particulier, il est dit*

- ***échelonné*** *si la matrice* A *est échelonnée,*
- ***carré*** *si la matrice* A *est carrée,*
- ***triangulaire*** *si la matrice* A *est triangulaire,*
- ***diagonal*** *si la matrice* A *est diagonale.*

11.2.3 Interprétation vectorielle

Pour discuter de l'existence de solutions à l'équation matricielle (EM), nous allons réécrire cette dernière sous la forme d'une équation vectorielle.

Équation vectorielle équivalente

On sait qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ admettant $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour matrice associée relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$. Nous l'avons appelée application canoniquement associée à A. Notons

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Le système d'équations linéaires (S) et l'équation matricielle (EM) sont alors équivalents à l'équation vectorielle

$$(\mathrm{EV}) \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

où l'application linéaire $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et le vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$ sont les données du problème, et le vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p$ l'inconnue du problème. Ainsi, il est équivalent de résoudre le système (S) ou de résoudre l'équation (linéaire) vectorielle (EV). Il s'agit par conséquent de trouver tous les vecteurs $\boldsymbol{x}$ appartenant à $\mathbb{K}^p$ qui vérifient l'équation (EV). L'ensemble des solutions s'écrit

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}.$$

Remarque En notant $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_p$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$, l'équation vectorielle (EV) s'écrit

$$(\mathrm{EV}') \quad x_1\boldsymbol{c}_1 + x_2\boldsymbol{c}_2 + \ldots + x_p\boldsymbol{c}_p = \boldsymbol{b}$$

où $\boldsymbol{c}_1 = f(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{c}_2 = f(\boldsymbol{e}_2)$, $\ldots$, $\boldsymbol{c}_p = f(\boldsymbol{e}_p)$. C'est la version vectorielle de l'égalité matricielle (EM'). Résoudre (EV), ou de manière équivalente résoudre (EV'), revient donc à chercher si le vecteur $\boldsymbol{b}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_p$, et, le cas échéant, à trouver toutes les combinaisons linéaires possibles auquelles $\boldsymbol{b}$ est égal.

Copyrighted material

Discussion sur l'ensemble des solutions

Nous allons maintenant chercher à caractériser l'ensemble $\mathcal{S}$. Est-il vide ? S'il ne l'est pas, possède-t-il un ou plusieurs éléments ? Remarquons sans attendre que si $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$ (l'équation est dite homogène) alors

$$\mathcal{S} = \operatorname{Ker} f.$$

Or le noyau de f n'est jamais vide puisqu'il contient toujours le vecteur nul. Ainsi une équation homogène n'est jamais impossible. Elle admet toujours $\mathbf{0}_{\mathbb{K}^p}$ pour solution.

Proposition 11.7 *Soient $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire et $\boldsymbol{b}$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$. Alors l'ensemble $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}$ vérifie*

1. *$\mathcal{S} = \emptyset$ si $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$;*
2. *$\mathcal{S} = \{\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f\}$ si $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$, où $\tilde{\boldsymbol{x}}$ est un vecteur de $\mathbb{K}^p$ tel que*

$$f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{b}.$$

Démonstration Il est clair que si $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$ et l'équation est impossible (voir p. 38). Supposons à présent que $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$. Cela signifie qu'il existe au moins un vecteur appartenant à $\mathbb{K}^p$, notons-le $\tilde{\boldsymbol{x}}$, tel que

$$f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{b}$$

et on a $\mathcal{S} \neq \emptyset$ (puisque $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$). L'équation est possible. Montrons maintenant que les deux ensembles $\mathcal{S}$ et $\{\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f\}$ sont égaux. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$. Raisonnons par équivalence. On a

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff f(\boldsymbol{x}) = f(\tilde{\boldsymbol{x}}) \iff f(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}.$$

Ainsi, l'appartenance de $\boldsymbol{x}$ à $\mathcal{S}$ est équivalente à l'existence d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\operatorname{Ker} f$ tel que $\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}$, c'est-à-dire tel que $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}$, ce qui termine la démonstration. □

Remarques

1. Dans le cas particulier où l'équation est homogène, l'ensemble $\mathcal{S}$ constitue un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, puisque $\mathcal{S}$ est le noyau de f. En revanche, en général, $\mathcal{S}$ ne possède pas de structure de sous-espace vectoriel. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre deux vecteurs $\boldsymbol{w}_1$ et $\boldsymbol{w}_2$ dans $\mathcal{S}$ et de vérifier que leur somme n'appartient pas au même sous-ensemble $\mathcal{S}$ (c'est immédiat).

2. La dimension de $\operatorname{Ker} f$ s'obtient grâce au théorème du rang :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p) = \operatorname{rg} f + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f).$$

D'où, en notant $r = \operatorname{rg} f$,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = p - r.$$

Supposons qu'il existe une solution $\tilde{\boldsymbol{x}}$ à (EV).

Copyrighted material

- Si $\operatorname{Ker} f$ est réduit au vecteur $\mathbf{0}_{\mathbb{K}^p}$ alors $\tilde{\boldsymbol{x}}$ est l'unique solution à (EV) puisque
$$\mathcal{S} = \{\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}^p}\}\} = \{\tilde{\boldsymbol{x}} + \mathbf{0}_{\mathbb{K}^p}\} = \{\tilde{\boldsymbol{x}}\}.$$
Le système (S) équivalent à (EV) est déterminé.
- Si maintenant $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) \geqslant 1$ alors cela signifie qu'il y a une infinité de solutions à (EV). En effet, si on note $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{p-r}$ les vecteurs d'une base de $\operatorname{Ker} f$, alors
$$\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{S} \quad \exists!\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-r}) \in \mathbb{K}^{p-r} \quad \boldsymbol{w} = \tilde{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_{p-r}\boldsymbol{v}_{p-r}}_{\in \operatorname{Ker} f}.$$
La forme générale d'une solution dépend donc de $p - r$ scalaires que sont les coordonnées d'un vecteur de $\operatorname{Ker} f$ dans une base du même sous-espace $\operatorname{Ker} f$. Dans ce cas, le système (S) équivalent à (EV) est indéterminé.

En résumé, l'équation vectorielle linéaire $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ peut

- ne posséder aucune solution (c'est le cas si $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$),
- posséder une solution unique (c'est le cas si $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}^p}\}$),
- posséder une infinité de solutions (c'est le cas si $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}^p}\}$),

et il n'y a pas d'autres cas de figure.

Il est à noter l'importance dans notre discussion des deux sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$. En pratique, ce n'est pas tant ces deux espaces qui nous intéressent mais plutôt leurs dimensions. Définissons à présent le rang d'un système linéaire.

Définition 11.12 *On appelle* **rang d'un système** *le rang de la matrice* A *qui lui est associée (ou de manière équivalente celui de l'application f canoniquement associée). On le note*
$$r \overset{\text{déf.}}{=} \operatorname{rg} \mathrm{A} = \operatorname{rg} f.$$

Comment savoir si $b \in \operatorname{Im} f$ sans expliciter complètement $\operatorname{Im} f$?

Considérons la base canonique $\mathcal{B}_c$ de l'espace $\mathbb{K}^p$. On rappelle que $\operatorname{Im} f$ est engendré par $f(\mathcal{B}_c)$. Ainsi, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ signifie que la sur-famille $(f(\mathcal{B}_c), \boldsymbol{b})$ est liée. En pratique, cela revient à vérifier que le rang de la famille $(f(\mathcal{B}_c), \boldsymbol{b})$ est égal à celui de la famille $f(\mathcal{B}_c)$. Par conséquent, si $\mathcal{B}_c = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ alors on a l'équivalence
$$\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f \iff \operatorname{rg}\big(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p), \boldsymbol{b}\big) = \operatorname{rg}\big(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\big).$$

Copyrighted material

Exemple Soit $m \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre le système réel 3×3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & m \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

et l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'équation vectorielle associée s'écrit $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\boldsymbol{b} = (m, 2, 3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et où

$$f : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

avec

$$\boldsymbol{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3).$$

C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Nous l'avons déjà étudié au chapitre 9 (voir p. 367). Son image est engendrée par les trois vecteurs $\boldsymbol{c}_1 = f(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{c}_2 = f(\boldsymbol{e}_2)$ et $\boldsymbol{c}_3 = f(\boldsymbol{e}_3)$ où $\mathcal{B}_c = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\boldsymbol{c}_1 = (1, 0, 1), \quad \boldsymbol{c}_2 = (1, 1, 2) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c}_3 = (0, 1, 1).$$

Ces trois vecteurs forment une famille liée puisque $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_3$. On vérifie sans peine que deux des trois vecteurs, par exemple $\boldsymbol{c}_1$ et $\boldsymbol{c}_3$, forment une famille libre. On a donc $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3) = 2$. De plus, il est aisé de vérifier (en utilisant la méthode des zéros échelonnés par exemple) que

$$\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{b}) = \left\{\begin{array}{ll} 3 & \text{si } m \neq 1 \\ 2 & \text{si } m = 1 \end{array}\right. .$$

Par conséquent,

- si $m \neq 1$ alors $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{b}) \neq \operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$, d'où $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$;
- si $m = 1$ alors $\operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{b}) = \operatorname{rg}(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$, d'où $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$.

Vérifions ces résultats. L'image de f est nécessairement un plan vectoriel puisque c'est un sous-espace de dimension 2. Nous avons déjà établi (voir p. 367) que

$$\operatorname{Im} f = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 - y_1 - y_2 = 0\right\}.$$

Il est alors très facile de savoir si le vecteur $\boldsymbol{b}$ appartient à $\operatorname{Im} f$. En effet, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \operatorname{Im} f$ si, et seulement si, $b_3 - b_1 - b_2 = 0$. On vérifie alors facilement que l'unique valeur de m pour laquelle $\boldsymbol{b} = (m, 2, 3) \in \operatorname{Im} f$ est $m = 1$. La figure 3 résume la situation. À gauche est représenté le cas $m \neq 1$ et à droite le cas $m = 1$.

Copyrighted material

Fig. 3 Illustration de $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$ (dessin de gauche) et de $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ (dessin de droite).

11.3 Résolution d'un système de Cramer

En préambule à l'étude générale des systèmes linéaires que nous effectuerons au paragraphe 11.4, nous nous intéressons ici à l'étude de systèmes linéaires particuliers, les systèmes de Cramer. Comme nous nous en rendrons compte au paragraphe 11.4.3, l'étude de tels systèmes linéaires est primordiale puisque, dans le cas général, nous essaierons de nous y ramener (ce qui constituera une étape essentielle de la méthode d'élimination de Gauss).

11.3.1 Définition

Définition 11.13 *Un système de n équations linéaires à p inconnues est dit de* ***Cramer***

- *s'il possède autant d'équations que d'inconnues (c'est-à-dire si $n = p$)*
- *et si le rang r du système vérifie : $r = n = p$.*

Un système de Cramer est aussi appelé ***système régulier****.*

Un système de Cramer est donc un système carré dont la matrice associée est inversible. Avec les notations utilisées, un système de Cramer s'écrit

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

et il vérifie

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Copyrighted material

Interprétation vectorielle

D'un point de vue vectoriel, un système est de Cramer si, et seulement si, l'application f canoniquement associée à ce système est bijective. Par conséquent, pour tout vecteur $\boldsymbol{b}$ appartenant à $\mathbb{K}^n$, il existe une unique solution à l'équation vectorielle (EV). C'est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ que nous avons noté $\tilde{\boldsymbol{x}}$ dans la proposition 11.7. La surjectivité de f nous assure l'existence de ce vecteur et l'injectivité de f nous assure son unicité puisque le noyau de f est réduit au vecteur nul de $\mathbb{K}^n$:

$$\mathcal{S} = \left\{\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \;\middle|\; \boldsymbol{v} \in \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}\}\right\} = \left\{\tilde{\boldsymbol{x}} + \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}\right\} = \left\{\tilde{\boldsymbol{x}}\right\}.$$

Le vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}}$ de $\mathbb{K}^n$ s'obtient en appliquant l'application réciproque f^{-1} à l'égalité vectorielle (EV). On a

$$f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{b} \iff f^{-1}(f(\tilde{\boldsymbol{x}})) = f^{-1}(\boldsymbol{b}) \iff \tilde{\boldsymbol{x}} = f^{-1}(\boldsymbol{b}).$$

Interprétation matricielle

D'un point de vue matriciel, dire qu'un système est de Cramer signifie que sa matrice associée est une matrice carrée inversible. L'équation matricielle (EM) possède une unique solution. Nous la notons $\tilde{\mathrm{X}}$. C'est la matrice-colonne composée des coordonnées du vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}}$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Elle s'obtient en multipliant à gauche les deux membres de (EM) par A^{-1} (qui existe puisque A est inversible). On a

$$\mathrm{A}\tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{B} \iff \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}\tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \iff \tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}.$$

On a ainsi démontré de deux manières différentes le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Proposition 11.8 *Un système de Cramer possède une solution et une seule.*

11.3.2 Les formules de Cramer

Il existe des formules donnant chacune des coordonnées $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, ..., $\tilde{x}_n$ en fonction des coefficients a_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et b_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Elles sont données ci-dessous.

Proposition 11.9 (Formules de Cramer) *Les coordonnées $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ de l'unique solution d'un système de Cramer d'équation matricielle* $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$, *sont données par*

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \tilde{x}_j = \frac{\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{B}, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n)}{\det \mathrm{A}}$$

où C_1, C_2, ..., C_n *représentent les n colonnes de la matrice* A *et où le numérateur est le déterminant de la matrice déduite de* A *en remplaçant la j-ième colonne* C_j *par la matrice-colonne* B.

Copyrighted material

Démonstration On commence par écrire l'équation matricielle $\mathrm{A}\tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{B}$ sous la forme matricielle équivalente

$$\tilde{x}_1\mathrm{C}_1 + \tilde{x}_2\mathrm{C}_2 + \ldots + \tilde{x}_n\mathrm{C}_n = \mathrm{B}$$

où C_1, C_2, $\ldots$, C_n appartenant à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, désignent les n colonnes de la matrice A. Étant donné $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}&\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{B}, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n)\\ &= \det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k\mathrm{C}_k, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n),\end{aligned}$$

et en utilisant la propriété de linéarité du déterminant par rapport à sa j-ième colonne, on obtient

$$\begin{aligned}&\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{B}, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k \det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{C}_k, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n). \qquad (22)\end{aligned}$$

Il apparaît ainsi une somme de n déterminants à droite de l'égalité. Remarquons que dans $n-1$ déterminants, la matrice-colonne C_k, $k \neq j$, y est répétée deux fois. Le déterminant étant une forme alternée, il ne reste dans la somme que le terme $\tilde{x}_j \det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{C}_j, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n)$ correspondant à l'indice $k = j$, les autres étant nuls. Ainsi, la relation (22) se simplifie sous la forme suivante

$$\begin{aligned}&\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{B}, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n)\\ &= \tilde{x}_j \det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{C}_j, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n). \qquad (23)\end{aligned}$$

On remarque que

$$\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{C}_j, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n) = \det \mathrm{A}.$$

C'est le déterminant de la matrice A. Il est bien évidemment non nul puisque l'application f étant bijective, la matrice A est inversible. On déduit alors de (23) la relation

$$\tilde{x}_j = \frac{\det(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{j-1}, \mathrm{B}, \mathrm{C}_{j+1}, \ldots, \mathrm{C}_n)}{\det \mathrm{A}},$$

ce qui termine la démonstration. □

Les formules données dans la proposition 11.9 sont connues sous le nom de ***formules de Cramer***, du nom du mathématicien suisse Gabriel Cramer. L'utilisation de telles formules nécessite le calcul de $n+1$ déterminants. Par conséquent, elles deviennent vite lourdes à manipuler lorsque la taille du système croît. En pratique, les formules de Cramer sont attractives pour un système d'ordre $n = 2$ ou $n = 3$, elles le sont un peu moins pour $n = 4$. Elles sont rédhibitoires pour $n \geqslant 5$.

Copyrighted material

CRAMER, Gabriel (1704, Genève (Suisse) - 1752, Bagnols-sur-Cèze (France)).

Il a été Professeur de mathématiques et de philosophie à Genève. Dans son article *Introduction to the analysis of algebraic curves* publié en 1750, Cramer a été le premier à énoncer une règle générale permettant le calcul des solutions d'un système linéaire $n \times n$, règle qui est à l'origine des formules qui portent son nom. S'il l'illustre avec soin dans plusieurs cas simples ($n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$), en revanche, il n'en donne aucune démonstration dans le cas général.

Une méthode beaucoup plus utilisée que les formules de Cramer pour la résolution d'un système linéaire est la méthode d'élimination de Gauss. Elle sera présentée plus loin (voir p. 500).

Exemples

1. Considérons dans $\mathbb{R}$ le système 3×3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

C'est un système de Cramer. Les coordonnées $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ de son unique solution sont les réels donnés par

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$\text{et} \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

On a donc $\mathcal{S} = \{(5, 3, 4)\} \subset \mathbb{R}^3$.

2. Soit j le complexe défini par $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Considérons dans $\mathbb{C}$ le système 3×3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & \mathrm{j} \\ x_1 & + & \mathrm{j}x_2 & + & \mathrm{j}^2x_3 & = & \mathrm{j} \\ x_1 & + & \mathrm{j}^2x_2 & + & \mathrm{j}x_3 & = & \mathrm{j} \end{array}\right. \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{vmatrix} = 3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1) \neq 0.$$

C'est aussi un système de Cramer. Son unique solution $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ appartient à $\mathbb{C}^3$. On obtient

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)}\begin{vmatrix} \mathrm{j} & 1 & 1 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{vmatrix} = \frac{1}{3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)}\left(3\mathrm{j}^2(\mathrm{j}-1)\right) = \mathrm{j}.$$

Copyrighted material

Les valeurs de $\tilde{x}_2$ et $\tilde{x}_3$ s'obtiennent plus facilement. En effet, on a

$$\tilde{x}_2 = \frac{1}{3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)}\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{j} & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{3\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathrm{j} \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j} \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{vmatrix} = 0$$

puisque dans l'expression du déterminant donnant $\tilde{x}_2$ (respectivement donnant $\tilde{x}_3$), la deuxième colonne (resp. la troisième colonne) est un multiple de la première colonne. On a donc $\mathcal{S} = \{(\mathrm{j}, 0, 0)\} \subset \mathbb{C}^3$.

11.4 Résolution d'un système d'équations linéaires

Nous reprenons ici l'étude générale d'un système de n équations linéaires à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$, d'équation matricielle

$$(\mathrm{EM}) \quad \mathrm{AX} = \mathrm{B}.$$

Nous insistons sur le fait que les deux entiers n et p ne sont pas nécessairement égaux. Ainsi, le système considéré pourra être sousabondant (cas où $n < p$) ou surabondant (cas où $n > p$). Remarquons que, pour ces deux cas, la matrice A sera rectangulaire et les deux matrices-colonnes X et B ne possèderont pas le même nombre de lignes. Le système considéré pourra aussi être carré et, dans ce cas, la matrice A sera elle-même carrée et les deux matrices-colonnes X et B possèderont le même nombre de lignes.[21] Conformément à ce qui a été fait dans les paragraphes précédents, nous utiliserons souvent l'équivalence entre l'équation matricielle (EM) et l'équation vectorielle

$$(\mathrm{EV}) \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}.$$

11.4.1 Compatibilité d'un système

Définition 11.14 *Soient* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. *On note* $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p$ *les colonnes de la matrice rectangulaire* A. *Le système d'équation matricielle* $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ *est dit* ***compatible*** *si*

$$\mathrm{rg}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p, \mathrm{B}) = \mathrm{rg}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p).$$

D'après ce que nous avons déjà vu à la fin du paragraphe 11.2.3, l'interprétation vectorielle que l'on peut donner à un système compatible est évidente. Si on note $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_p$ les vecteurs de la base canonique de l'espace de départ $\mathbb{K}^p$ alors, pour j variant de 1 à p, la colonne C_j est constituée des coordonnées

[21] Attention, rappelons qu'un système carré n'est pas nécessairement de Cramer. Pour qu'il le soit, il lui reste à vérifier une condition sur son rang (voir la définition 11.13, p. 493).

Copyrighted material

du vecteur $f(\boldsymbol{e}_j)$ dans la base canonique de l'espace d'arrivée $\mathbb{K}^n$. Dire que le système d'équation matricielle AX = B est compatible revient donc à écrire

$$\operatorname{rg}\big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p), \boldsymbol{b}\big) = \operatorname{rg}\big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_p)\big),$$

ou, de manière équivalente,

$$\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f.$$

La propriété de compatibilité du système d'équation matricielle AX = B signifie donc que $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$, c'est-à-dire que l'équation est possible. Elle nous assure l'existence d'au moins une solution.

11.4.2 Le théorème de Rouché-Fontené

Le point de départ à l'étude d'un système linéaire de type (n, p) est le calcul de son rang. Notons-le r. Rappelons que

$$r \leqslant n \qquad \text{et} \qquad r \leqslant p.$$

Nous allons considérer successivement les trois cas suivants : $r = n = p$ (cas 1), $r = n < p$ (cas 2) et $r < n$ (cas 3). À toutes fins utiles, rappelons que, d'après le théorème du rang,

$$\dim_{\mathbb{K}} (\operatorname{Ker} f) = p - r.$$

Procédons à l'étude des cas.

Cas 1 : $r = n = p$

Lorsque $r = n = p$, le système est de Cramer. Ce premier cas a fait l'objet du paragraphe 11.3 dans son intégralité. Quel que soit le vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$, l'équation vectorielle admet toujours une unique solution (voir la proposition 11.8).

Cas 2 : $r = n$ **et** $n < p$

Nous considérons maintenant le cas où le rang est égal au nombre des équations $(r = n)$ et où le système est sousabondant $(n < p)$. Remarquons que le cas où $n = p$, que nous excluons ici, correspond au cas 1 précédent. Du point de vue vectoriel, la condition $r = n$ signifie que

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$$

ou, de manière équivalente, que $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}^n$, ou encore que f est surjective. Ainsi, quel que soit le vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$, l'équation vectorielle admet non seulement toujours une solution (le système est compatible : $\mathcal{S} \neq \emptyset$) mais, en plus, il y en a une infinité puisque

$$\dim_{\mathbb{K}} (\operatorname{Ker} f) = p - n > 0.$$

Une solution est donc un vecteur de $\mathbb{K}^p$ dépendant de $p - n$ paramètres.

Copyrighted material

Cas 3 : $r < n$

Considérons à présent le cas où le rang est strictement inférieur au nombre des équations ($r < n$). Remarquons que pour ce deuxième cas, le système peut être surabondant, sousabondant ou même carré. En revenant au point de vue vectoriel, la condition $r < n$ signifie que

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) < \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$$

ou, de manière équivalente, que $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{K}^n$ avec $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{K}^n$, ou encore que f n'est pas surjective. On ne peut résoudre l'équation vectorielle que si $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$. Il faut par conséquent envisager les deux cas suivants.

- Si $\boldsymbol{b} \notin \operatorname{Im} f$ (c'est-à-dire si le système est incompatible) alors il n'y a pas de solution,
$$\mathcal{S} = \emptyset.$$
- Si $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f$ (c'est-à-dire si le système est compatible) alors il y a au moins une solution et elle dépend de $p - r$ paramètres puisque
$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = p - r.$$
Cette solution est peut-être l'unique solution (c'est le cas si $p = r$, ce qui signifie que f est injective puisque $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 0$). Il y en a peut-être une infinité (c'est le cas si $p > r$). Tout dépend donc de la valeur de $p - r$.

On résume ces trois situations dans le théorème suivant.

Théorème 11.1 (de Rouché-Fontené[22]) *Considérons un système* (S) *de n équations linéaires à p inconnues, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de rang r. Trois cas sont possibles.*

1. *Si $r = n = p$ alors le système* (S) *est de Cramer. Il admet une unique solution.*
2. *Si $r = n < p$ alors le système* (S) *admet une infinité de solutions et ce quels que soient les seconds membres.*
3. *Si $r < n$ alors le système* (S) *admet au moins une solution si, et seulement si, le système est compatible. Dans le cas où le système* (S) *est compatible, il possède une unique solution lorsque $r = p$; il en possède une infinité lorsque $r < p$.*

Il ressort de ce théorème que le point de départ à l'étude de n'importe quel système linéaire, qu'il soit sousabondant, surabondant ou même carré, est le calcul de son rang. Il est à noter que si le théorème de Rouché-Fontené offre l'avantage de donner une vue synthétique pour la résolution d'un système linéaire, il ne nous donne en revanche aucune stratégie pour savoir si un système

[22] ROUCHÉ, Eugène (1832 - 1910) : mathématicien français, il fut élu à l'Académie des Sciences en 1896. FONTENÉ, Georges (1848 - 1923) : mathématicien français.

Copyrighted material

est compatible ou non, et, le cas échéant, aucune technique pour résoudre ce système. La méthode d'élimination de Gauss, présentée au paragraphe suivant, va remédier à ce manque.

11.4.3 Méthode d'élimination de Gauss

La méthode d'élimination de Gauss (appelée aussi méthode du pivot de Gauss) est une méthode de résolution systématique d'un système linéaire de type (n, p) de la forme

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$

d'inconnues les scalaires x_1, x_2, ..., x_p de $\mathbb{K}$. Elle permet une discussion sur l'existence éventuelle d'une solution, suivie, dans le cas où l'existence est établie, d'un calcul de sa forme générale. La méthode se décompose en deux étapes : une première étape dite d'élimination, suivie (éventuellement) d'une seconde étape dite de remontée.

Gauss, Karl Friedrich (1777, Brunswick - 1855, Göttingen).

Illustre mathématicien et physicien, il était surnommé par ses pairs *Prince des mathématiciens*. Son œuvre est considérable. La paternité de la méthode qui porte son nom, revient initialement au mathématicien chinois Liu Hui (200 ans avant notre ère) qui en exposa en quelques phrases les principes dans son livre *Neuf chapitres sur la science du calcul*. Gauss s'en inspira lorsqu'il étudia l'orbite de l'astéroid Pallas, laquelle étude le conduisit à la résolution d'un système de six équations à six inconnues.

Étape d'élimination

Cette première étape vise à écrire le système (S) (que nous qualifions d'initial) sous une forme échelonnée. Pour y arriver, la manière de procéder est identique à celle de la méthode des zéros échelonnés, à l'exception du fait que nous opérons cette fois-ci directement sur les équations du système. La méthode des zéros échelonnés est détaillée au chapitre 8. Nous ne la rappelons pas. On désigne par E_1, E_2, ..., E_n les équations du système initial, et par C_1, C_2, ..., C_p les colonnes de la matrice associée à ce système. Le passage du système initial au système échelonné s'effectue en utilisant les opérations élémentaires suivantes :

- multiplication d'une équation E_k par un scalaire non nul, ce que nous notons

$$\mathrm{E}_k \longleftarrow \alpha \mathrm{E}_k \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \mathbb{K}^*,$$

Copyrighted material

- addition d'un multiple d'une équation $\mathrm{E}_{k'}$ à une autre équation E_k, ce que nous notons
$$\mathrm{E}_k \longleftarrow \mathrm{E}_k + \alpha \mathrm{E}_{k'} \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \mathbb{K},$$
- échange des équations E_k et $\mathrm{E}_{k'}$, et/ou des colonnes C_k et $\mathrm{C}_{k'}$, noté
$$\mathrm{E}_k \longleftrightarrow \mathrm{E}_{k'}, \qquad \mathrm{C}_k \longleftrightarrow \mathrm{C}_{k'}.$$

Il est facile de vérifier que le système échelonné est équivalent au système initial. Supposons par exemple que le rang r du système initial soit strictement inférieur au nombre de lignes et au nombre de colonnes. À l'issue de l'étape d'élimination, on aura le système échelonné de type (n, p) suivant

$$(\mathrm{S}') \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \ldots + a'_{1r}x'_r + \ldots + a'_{1p}x'_p &=& b'_1 \\ a'_{22}x'_2 + \ldots + a'_{2r}x'_r + \ldots + a'_{2p}x'_p &=& b'_2 \\ \ddots \qquad\qquad \vdots &=& \vdots \\ a'_{rr}x'_r + \ldots + a'_{rp}x'_p &=& b'_r \\ 0 &=& b'_{r+1} \\ \vdots &=& \vdots \\ 0 &=& b'_n \end{array} \right.$$

où les scalaires $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{rr}$ sont tous non nuls et où $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ correspondent à une permutation éventuelle des inconnues. Bien sûr, en l'absence de permutation des colonnes,

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \ldots, \quad x'_p = x_p.$$

On désigne par $\mathrm{E}'_1, \mathrm{E}'_2, \ldots, \mathrm{E}'_n$ les équations du nouveau système. Les équations

$$0 = b'_{r+1}, \quad \ldots, \quad 0 = b'_n$$

ne contiennent pas d'inconnue. Elles traduisent la compatibilité ou l'incompatibilité du système. En effet,

- si pour l'une d'entre elles, disons la ℓ-ième où $\ell \in \{r+1, \ldots, n\}$, le scalaire b'_ℓ est non nul alors l'égalité $0 = b'_\ell$ est absurde, ce qui signifie que le système n'est pas compatible.[23] Il n'y a donc pas de solution :
$$\mathcal{S} = \emptyset.$$
- Si $b'_i = 0$ pour tout $i \in \{r+1, \ldots, n\}$ alors les équations $\mathrm{E}'_{r+1}, \ldots, \mathrm{E}'_n$ sont toutes triviales (de la forme $0 = 0$), ce qui signifie que le système est compatible.[24] Il possède au moins une solution. La forme générale d'une

[23] On vérifie en effet que l'on a $\mathrm{rg}(\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_p) = r$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_p, \mathrm{B}') = r+1$ où $\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_p$ désignent les colonnes de la matrice associée au système échelonné et où B' désigne le second membre.

[24] puisque l'on a, cette fois-ci, $\mathrm{rg}(\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_p) = r = \mathrm{rg}(\mathrm{C}'_1, \mathrm{C}'_2, \ldots, \mathrm{C}'_p, \mathrm{B}')$.

Copyrighted material

solution est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, dépendant de $p-r$ paramètres. Pour l'obtenir, on commence par résoudre le système (S'') de type (r,r) donné ci après, obtenu à partir de (S') en supprimant les équations triviales $E'_{r+1}, \ldots, E'_n$ (qualifiées de non principales ou de secondaires) et en faisant passer aux seconds membres dans les équations $E'_1, E'_2, \ldots, E'_r$ (qualifiées de principales) les termes comportant les scalaires $x'_{r+1}, \ldots, x'_p$. Le système (S'') s'écrit

$$(S'') \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \ldots + a'_{1r}x'_r & = & b''_1 \\ a'_{22}x'_2 + \ldots + a'_{2r}x'_r & = & b''_2 \\ \ddots & \vdots & \\ a'_{rr}x'_r & = & b''_r \end{array} \right.$$

où les scalaires $x'_1, x'_2, \ldots, x'_r$ sont les inconnues (dites principales) et où les seconds membres $b''_1, b''_2, \ldots, b''_r$ sont définis par

$$\begin{array}{rcl} b''_1 & = & b'_1 - \left(a'_{1,r+1}x'_{r+1} + \ldots + a'_{1p}x'_p\right), \\ b''_2 & = & b'_2 - \left(a'_{2,r+1}x'_{r+1} + \ldots + a'_{2p}x'_p\right), \\ & \vdots & \\ b''_r & = & b'_r - \left(a'_{r,r+1}x'_{r+1} + \ldots + a'_{rp}x'_p\right). \end{array}$$

Les $p-r$ scalaires $x'_{r+1}, \ldots, x'_p$ apparaissent uniquement dans les seconds membres $b''_1, b''_2, \ldots, b''_r$ et sont maintenant traités comme des paramètres (ils sont qualifiés d'inconnues non principales). Le système (S'') est de Cramer car

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{rr} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{r} a'_{ii} \neq 0.$$

Il possède donc une unique solution. C'est un vecteur de $\mathbb{K}^r$ dont chacune des coordonnées va dépendre des $p-r$ paramètres $x'_{r+1}, \ldots, x'_p$.

Étape de remontée

Le système (S'') obtenu à l'issue de l'étape d'élimination est un système triangulaire supérieur dont la résolution s'effectue en partant de la dernière équation, puis en remontant jusqu'à la première équation. En effet, de la dernière équation

$$a'_{rr}x'_r = b''_r,$$

il vient immédiatement, puisque $a'_{rr} \neq 0$,

$$x'_r = \frac{b''_r}{a'_{rr}}.$$

On injecte alors ce résultat dans l'avant-dernière équation

$$a'_{r-1,r-1}x'_{r-1} + a'_{r-1,r}x'_r = b''_{r-1},$$

Copyrighted material

Hidden page

membres les termes comportant les deux inconnues non principales x_4 et x_5, autrement dit en résolvant le système 3×3 suivant

$$(\mathrm{S}_1'') \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 - 6x_4 + 6x_5 \\ x_2 + x_3 = 1 + 2x_4 \\ x_3 = 2 + 3x_5 \end{cases}$$

où les inconnues sont maintenant x_1, x_2 et x_3 et où x_4 et x_5 sont des paramètres. C'est un système de Cramer. Il possède une unique solution. On déduit facilement de (S_1'')

$$x_3 = 2 + 3x_5, \quad \text{puis} \quad x_2 = -1 + 2x_4 - 3x_5 \quad \text{et enfin} \quad x_1 = -2 - \frac{9}{2}x_5.$$

Il convient maintenant de revenir à la solution du système (S_1) initial. C'est un vecteur de $\mathbb{R}^5$ de la forme

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2 - \tfrac{9}{2}x_5, -1 + 2x_4 - 3x_5, 2 + 3x_5, x_4, x_5)$$

où chacun des deux paramètres x_4 et x_5 parcourt l'ensemble $\mathbb{R}$. On a

$$\mathcal{S} = \left\{(-2 - \tfrac{9}{2}x_5, -1 + 2x_4 - 3x_5, 2 + 3x_5, x_4, x_5) \text{ avec } x_4 \in \mathbb{R} \text{ et } x_5 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Il y a une infinité de solutions.

Remarque On peut aussi développer l'expression générale d'une solution du système (S_1) comme suit

$$\begin{aligned} &(-2 - \tfrac{9}{2}x_5, -1 + 2x_4 - 3x_5, 2 + 3x_5, x_4, x_5) \\ &= (-2, -1, 2, 0, 0) + x_4(0, 2, 0, 1, 0) + x_5(-\tfrac{9}{2}, -3, 3, 0, 1), \end{aligned}$$

ce qui permet de réécrire l'ensemble $\mathcal{S}$ sous la forme

$$\mathcal{S} = \left\{\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \;\middle|\; \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f\right\}$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = (-2, -1, 2, 0, 0) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left((0, 2, 0, 1, 0), (-\tfrac{9}{2}, -3, 3, 0, 1)\right).$$

Étude d'un système carré

Reprenons l'exemple du système réel 3×3 dont nous avions étudié l'équation vectorielle au paragraphe 11.2.3 en page 492. Il s'écrit

$$(\mathrm{S}_2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

où les réels x_1, x_2 et x_3 sont les inconnues et où m est un paramètre réel. C'est un système carré (il possède autant d'équations que d'inconnues), ce qui

Copyrighted material

Hidden page

Remarque Lorsque $m = 1$, l'ensemble des solutions s'écrit aussi

$$\mathcal{S} = \{\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f\}$$

avec $\tilde{\boldsymbol{x}} = (-1, 2, 0)$ et $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}(1, -1, 1)$ car

$$(-1 + x_3, 2 - x_3, x_3) = (-1, 2, 0) + x_3(1, -1, 1).$$

Étude d'un système surabondant

Considérons dans $\mathbb{R}$ le système 4×3

$$(\mathrm{S}_3) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 - 5x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$$

d'inconnues les réels x_1, x_2 et x_3. Ce système est surabondant (il possède plus d'équations que d'inconnues).[26] Écrivons le système sous une forme échelonnée. En effectuant à partir de (S_3) les trois opérations élémentaires $\mathrm{E}_2 \longleftarrow \mathrm{E}_2 + 2\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 + 3\mathrm{E}_1$ et $\mathrm{E}_4 \longleftarrow \mathrm{E}_4 + 3\mathrm{E}_1$, puis les deux opérations $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_2$ et $\mathrm{E}_4 \longleftarrow \mathrm{E}_4 - 7\mathrm{E}_2$, et enfin $\mathrm{E}_4 \longleftrightarrow \mathrm{E}_3$, on obtient le système échelonné

$$(\mathrm{S}'_3) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 - 5x_3 = -7 \\ x_2 - 11x_3 = -10 \\ 60x_3 = 60 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

dont on déduit que le rang est 3 et que le système est compatible (puisque la dernière équation est de la forme $0 = 0$). Il existe donc au moins une solution et il ne peut en exister d'autres puisque le rang du système est ici égal au nombre des inconnues. Déterminons cette unique solution. On l'obtient en résolvant les trois premières équations du système (S'_3), autrement dit en résolvant le système 3×3 de Cramer suivant

$$(\mathrm{S}''_3) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 - 5x_3 = -7 \\ x_2 - 11x_3 = -10 \\ 60x_3 = 60 \end{cases}.$$

On obtient facilement (méthode de remontée) que

$$x_3 = 1, \quad \text{puis} \quad x_2 = 1 \quad \text{et enfin} \quad x_1 = 3.$$

L'ensemble des solutions de (S_3) est donc un singleton. Il s'écrit

$$\mathcal{S} = \{(3, 1, 1)\}.$$

---

[26] Nous sommes assurément dans le cas 3 du théorème de Rouché-Fontené. Il convient d'étudier la compatibilité du système pour savoir s'il possède au moins une solution.

Copyrighted material

11.5 Exercices de synthèse

Exercice 2 *Résoudre, lorsque cela est possible, les systèmes linéaires*

$$\begin{cases} x & & & = & 2 \\ -2x & + & y & = & 1 \\ x & - & 3y & + & z & = & 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 11y & - & 5z & = & 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 11y & - & 5z & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & & & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 7 \end{cases}$$

Exercice 3 *Soient* $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ *et* V_n *le déterminant (d'ordre* n*) de Vandermonde défini par*

$$V_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1 - Vérifier que : $V_n = \prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$.

2 - En déduire que : $V_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Exercice 4 *On considère le déterminant d'ordre* n *suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

1 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$,

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = x^2 \times (\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}).$$

2 - En déduire que : $\Delta_n = \Delta_{n-1} + x^{2n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

3 - Calculer Δ_n *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

Copyrighted material

Exercice 5 *Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, et résoudre lorsque cela est possible, les systèmes linéaires réels suivants*

$$(S_1)\quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + mz = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$(S_2)\quad \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y + mz = 7 \\ mx + 8y - 7z = m \end{cases}$$

11.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Il suffit de retirer à la première colonne la somme de toutes les autres. De cette manière, la première colonne contiendra $n-1$ zéros :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire étant égal au produit de ses coefficients diagonaux, on obtient $\Delta_n = 2-n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2 - En retirant la dernière colonne aux $n-1$ premières, on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 3-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

On en déduit $D_n = (1-n) \times (2-n) \times \cdots \times (-1) \times n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut montrer facilement que $D_n = (-1)^{n-1} n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 2

1 - La résolution est ici facilitée par la forme triangulaire inférieure du système

$$(S_1)\quad \begin{cases} x = 2 \\ -2x + y = 1 \\ x - 3y + z = 3 \end{cases}.$$

Copyrighted material

Le système est carré et son rang est 3 (puisque son déterminant est non nul). Le système est donc de Cramer (on est dans le cas 1 du théorème de Rouché-Fontené) : il y a existence et unicité d'une solution. Ainsi,

$$\mathcal{S} = \{(2, 5, 16)\}.$$

2 - Considérons à présent le système carré

$$(\mathrm{S}_2) \quad \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 11y - 5z = 5 \end{cases}.$$

Remarquons que son rang est au moins égal à 2 puisque l'on peut extraire au moins une sous-matrice 2×2 de déterminant non nul, et il n'est pas égal à 3 car

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Écrivons le système sous une forme échelonnée. En effectuant à partir du système (S_2) les opérations élémentaires $\mathrm{E}_2 \longleftarrow \mathrm{E}_2 - 2\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_1$, puis $\mathrm{E}_3 \longleftarrow \mathrm{E}_3 - 2\mathrm{E}_2$, on obtient le système échelonné

$$(\mathrm{S}_2') \quad \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 7y - 3z = -3 \\ 0 = 10 \end{cases}.$$

Nous retrouvons que le rang est égal à 2 (nous sommes donc dans le troisième cas du théorème de Rouché-Fontené). La dernière égalité est absurde. Elle traduit l'incompatibilité du système. Il n'y a donc pas de solution :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

3 - Nous nous intéressons au système carré

$$(\mathrm{S}_3) \quad \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 11y - 5z = 0 \end{cases}.$$

La matrice de ce système est identique à celle du système (S_2) étudié à la question précédente. On est donc encore dans le cas 3 du théorème de Rouché-Fontené. Observons que cette fois-ci, le système est nécessairement compatible puisque tous les seconds membres sont nuls. Nous sommes donc assurés de l'existence d'au moins une solution. Puisque le rang du système vaut 2, la forme générale d'une solution dépend de $3 - 2 = 1$ paramètre. L'étape d'élimination s'effectue comme dans l'exemple précédent et conduit au système échelonné (homogène)

$$(\mathrm{S}_3') \quad \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 7y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Copyrighted material

Hidden page

En effet, en procédant ainsi, on obtient

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on a

$$V_n = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix},$$

puis en factorisant par $a_2 - a_1$ dans la première colonne, par $a_3 - a_1$ dans la deuxième colonne, ..., et enfin par $a_n - a_1$ dans la (dernière) $(n-1)$-ième colonne, on obtient

$$V_n = \prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

2 - Par souci de clarté, notons $V_n^{(1)} = V_n$. À la question précédente, nous avons établi la relation suivante

$$V_n^{(1)} = \left(\prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1)\right) V_{n-1}^{(2)} \quad \text{avec} \quad V_{n-1}^{(2)} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Remarquons que $V_{n-1}^{(2)}$ est un déterminant (de Vandermonde) d'ordre $n-1$. On procède alors de même avec $V_{n-1}^{(2)}$. On transforme les lignes $\mathrm{L}_i^{(2)}$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, de la manière suivante : $\mathrm{L}_i^{(2)} \leftarrow \mathrm{L}_i^{(2)} - a_2 \mathrm{L}_{i-1}^{(2)}$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, puis en développant par rapport à la première colonne, on obtient que

$$V_{n-1}^{(2)} = \left(\prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2)\right) V_{n-2}^{(3)} \quad \text{avec} \quad V_{n-2}^{(3)} \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_3^{n-4} & a_4^{n-4} & \cdots & a_n^{n-4} \\ a_3^{n-3} & a_4^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \end{vmatrix}.$$

Copyrighted material

Hidden page

Solution de l'exercice 5

1 - Remarquons que le système (S_1) étant carré, cela exclut le cas 2 du théorème de Rouché-Fontené. En effectuant à partir du système (S_1) les opérations $E_2 \longleftarrow E_2 - 2E_1$, $E_3 \longleftarrow E_3 - 3E_1$, puis $E_3 \longleftarrow 5E_3 - 4E_2$, on obtient le système échelonné

$$(S_1') \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -5y + (m-6)z = 1 \\ (-4m-16)z = 6 \end{cases}$$

dont le rang dépend de la valeur du paramètre réel m.

- Si $m = -4$ alors le rang est 2 et la dernière équation est absurde puisqu'elle devient $0 = 6$. Nous sommes dans le cas 3 du théorème de Rouché-Fontené : le rang du système est strictement inférieur au nombre d'équations et le système n'est pas compatible. Il n'y a pas de solution.
- Si $m \neq -4$ alors le rang est 3. Nous sommes maintenant dans le cas 1 du théorème de Rouché-Fontené : le rang du système est égal au nombre d'équations et le système est carré. Le système est de Cramer. Il possède une unique solution $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On obtient

$$z = \frac{-3}{2m+8}, \quad \text{puis} \quad y = \frac{-m+2}{2m+8} \quad \text{et enfin} \quad x = \frac{2m+5}{2m+8}.$$

En résumé, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions vérifie

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \left\{\left(\dfrac{2m+5}{2m+8}, \dfrac{-m+2}{2m+8}, -\dfrac{3}{2m+8}\right)\right\} & \text{si } m \in \mathbb{R} \setminus \{-4\} \\ \emptyset \quad \text{si } m = -4 \end{cases}.$$

2 - Remarquons que le système (S_2) étant surabondant, cela exclut les cas 1 et 2 du théorème de Rouché-Fontené. En effectuant à partir du système (S_2) les trois opérations élémentaires $E_2 \longleftarrow E_2 - 2E_1$, $E_3 \longleftarrow E_3 - E_1$ et $E_4 \longleftarrow 2E_4 - mE_1$, puis $E_2 \longleftarrow -\frac{1}{7}E_2$, et enfin $E_3 \longleftarrow E_3 + 2E_2$ et $E_4 \longleftarrow E_4 - (16 - 5m)E_2$, on obtient le système

$$(S_2') \quad \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ y - z = 1 \\ (m+6)z = 1 \\ (2+3m)z = -m-16 \end{cases}.$$

Interrompons l'étape d'élimination pour discuter de la valeur du pivot $m + 6$.

- Supposons $m = -6$. Il est facile de voir que le rang du système vaut 3 (il est strictement inférieur au nombre d'équations) et le système n'est pas compatible (la troisième équation est absurde) : le système ne possède pas de solution.

Copyrighted material

Hidden page

CHAPITRE 12

Réduction des endomorphismes

12.1 Éléments propres d'un endomorphisme

12.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 12.1 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle* **valeur propre de** f *tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe un vecteur $\boldsymbol{u}$ non nul de E tel que*

$$f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}.$$

Ce vecteur $\boldsymbol{u}$ non nul de E se nomme **vecteur propre** *de f associé à la valeur propre λ et le couple $(\lambda, \boldsymbol{u})$ de $\mathbb{K} \times \left(E \setminus \{\mathbf{0}_E\}\right)$ se nomme* **élément propre** *de f.*

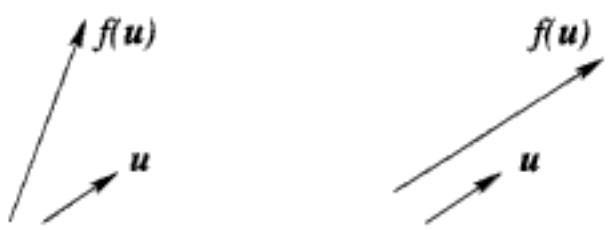


Fig. 1 Représentation dans $\mathbb{R}^2$ du cas où $f(\boldsymbol{u}) \neq \lambda \boldsymbol{u}$ (figure de gauche, le vecteur $\boldsymbol{u}$ et son image par f ne sont pas colinéaires) et du cas où $f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$ (figure de droite, le vecteur $\boldsymbol{u}$ et son image par f sont colinéaires).

Remarques

1. Dans la définition 12.1, la condition qu'un vecteur vérifiant $f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$ soit non nul est impérative, car si on autorisait le vecteur nul, n'importe quel scalaire λ de $\mathbb{K}$ conviendrait et la définition d'une valeur propre serait alors dépourvue d'intérêt.

Copyrighted material

2. Bien évidemment, les notions de valeur propre et de vecteur propre n'ont de sens que pour des endomorphismes puisqu'un vecteur propre et son image appartiennent nécessairement au même espace vectoriel.

Un vecteur propre associé à une valeur propre est-il unique ?

La réponse est « non ». Pour s'en convaincre, considérons un vecteur propre $\boldsymbol{u}$ appartenant à E, associé à la valeur propre λ. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur non nul appartenant à $\mathbb{K}\boldsymbol{u}$. On a $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{u}$ avec $\alpha \neq 0$ et

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) = \alpha\lambda\boldsymbol{u} = \lambda\alpha\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Ainsi, tout vecteur non nul colinéaire à $\boldsymbol{u}$ est aussi vecteur propre associé à λ.

Exemples

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. On considère l'endomorphisme f défini par

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_3) &= -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Le vecteur $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ car

$$f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3) = -(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{u}_1.$$

Comme nous l'avons noté plus haut, tout vecteur non nul colinéaire à $\boldsymbol{u}_1$ est aussi vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$. Les vecteurs $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$ et $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$ sont deux vecteurs propres de f associés à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ car

$$f(\boldsymbol{u}_2) = f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_3) = 2(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{u}_2$$

et

$$f(\boldsymbol{u}_3) = f(\boldsymbol{e}_2) - f(\boldsymbol{e}_3) = 2(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{u}_3.$$

Tout vecteur non nul colinéaire à $\boldsymbol{u}_2$ ou à $\boldsymbol{u}_3$ est aussi vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$. On peut aussi vérifier que toute combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$ est aussi vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$. Comme nous le verrons par la suite, $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$ sont les deux seules valeurs propres de f.

2. Considérons à présent le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Cet espace est de dimension infinie. Considérons l'application linéaire f qui à un élément φ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ lui associe son application dérivée,

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}.$$

Copyrighted material

L'application f est un endomorphisme de E et les applications de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ sont des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda \in \mathbb{R}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

L'ensemble des valeurs propres de f est donc l'ensemble $\mathbb{R}$. Remarquons que cet ensemble est infini.

12.1.2 Caractérisation des valeurs propres

On note $\mathrm{id}_E : \boldsymbol{x} \in E \longmapsto \boldsymbol{x} \in E$ l'application identité de E. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de l'endomorphisme f et $\boldsymbol{u}$ un vecteur propre associé à λ. On a les équivalences suivantes

$$f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u} \quad \Longleftrightarrow \quad (f - \lambda \mathrm{id}_E)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_E \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{id}_E).$$

L'existence d'un vecteur propre $\boldsymbol{u}$ nécessairement non nul signifie que le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{\boldsymbol{0}_E\}$ ou, de manière équivalente, que l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.

On peut par conséquent énoncer la caractérisation suivante.

Proposition 12.1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit valeur propre de f est que l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$ ne soit pas injectif.*

Une valeur propre peut-elle être nulle ?

Bien évidemment, la réponse est « oui ».[(1)] En effet, 0 est valeur propre d'un endomorphisme f de E signifie qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}_E$ tel que

$$f(\boldsymbol{u}) = 0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_E.$$

Autrement dit, 0 est valeur propre de f signifie que

$$\mathrm{Ker}\, f \neq \{\boldsymbol{0}_E\},$$

c'est-à-dire que f n'est pas injectif. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit valeur propre de f est que f ne soit pas injectif.

Proposition 12.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{K} \times (E \setminus \{\boldsymbol{0}_E\})$ un élément propre de f. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda^k, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de f^k où*

$$f^k \overset{not.}{=} \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

De plus, si f est bijectif alors $\lambda \neq 0$ et $(\lambda^{-1}, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de f^{-1}.

(1) En revanche, un vecteur propre n'est, par définition, jamais égal au vecteur nul.

Copyrighted material

Démonstration Soit $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{K} \times \left(E \setminus \{\mathbf{0}_E\}\right)$ un élément propre de f.

$\trianglerighteq$ Montrons que $(\lambda^k, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de f^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une récurrence sur l'entier k. La propriété est immédiate pour $k = 1$. Supposons que $(\lambda^{k-1}, \boldsymbol{u})$ soit un élément propre de f^{k-1} (c'est notre hypothèse de récurrence) et déduisons-en que $(\lambda^k, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de f^k. Par hypothèse,

$$f^{k-1}(\boldsymbol{u}) = \lambda^{k-1}\boldsymbol{u}.$$

En appliquant f à cette égalité et en utilisant la propriété de linéarité de f, on obtient

$$f^k(\boldsymbol{u}) = f(\lambda^{k-1}\boldsymbol{u}) = \lambda^{k-1}f(\boldsymbol{u}) = (\lambda^{k-1} \times \lambda)\boldsymbol{u}$$

où il a été tenu compte que $(\lambda, \boldsymbol{u})$ était un élément propre de f. On a ainsi obtenu l'égalité

$$f^k(\boldsymbol{u}) = \lambda^k\boldsymbol{u},$$

ce qui montre que $(\lambda^k, \boldsymbol{u})$ est élément propre de f^k.

$\trianglerighteq$ Supposons à présent que l'endomorphisme f soit bijectif. Il est ainsi injectif et donc $\lambda \neq 0$ (nous utilisons ici la caractérisation suivante : 0 est valeur propre d'un endomorphisme f si, et seulement si, f n'est pas injectif). Par hypothèse,

$$f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}.$$

Appliquons f^{-1} (qui existe car f est bijective) à cette égalité. On obtient

$$f^{-1}(f(\boldsymbol{u})) = f^{-1}(\lambda\boldsymbol{u}).$$

Or, $f^{-1}(f(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{u}$ (par définition de f^{-1}) et

$$f^{-1}(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda f^{-1}(\boldsymbol{u})$$

puisque f^{-1} est linéaire. On en déduit l'égalité

$$\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{u} = f^{-1}(\boldsymbol{u}),$$

ce qui montre que $(\lambda^{-1}, \boldsymbol{u})$ est élément propre de f^{-1}. □

12.2 Sous-espaces propres

12.2.1 Définition

Considérons deux vecteurs propres $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ associés à la même valeur propre λ de f. On vérifie que tout vecteur de la forme $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ est aussi vecteur propre associé à λ. En effet,

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v}) = \alpha\lambda\boldsymbol{u} + \beta\lambda\boldsymbol{v} = \lambda(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}).$$

Copyrighted material

Rappelons qu'un vecteur propre est (par définition) non nul. Aussi, pour que l'ensemble formé de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ définisse un sous-espace vectoriel, il faut lui adjoindre le vecteur nul.

Définition 12.2 *Soient f un endormorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. On appelle* **sous-espace propre associé à** *λ, et on note E_λ, le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs propres associés à λ et du vecteur $\mathbf{0}_E$. Autrement dit,*

$$E_\lambda = \left\{ \boldsymbol{x} \in E \;\middle|\; f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} \right\} = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E).$$

Remarques

1. Tous les vecteurs de l'espace propre E_λ sont des vecteurs propres de f (associés à la valeur propre λ), à l'exception du vecteur nul.

2. Si $\boldsymbol{u} \in E$ est un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\mathbb{K}\boldsymbol{u} \subset E_\lambda$.

3. Si 0 est valeur propre de f alors $E_0 = \operatorname{Ker} f$. En d'autres termes, si 0 est valeur propre de f alors son sous-espace propre est le noyau de f.

12.2.2 Somme de sous-espaces propres

Soient E_{λ_1} et E_{λ_2} deux sous-espaces propres de f associés aux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Nous allons montrer que les deux sous-espaces E_{λ_1} et E_{λ_2} sont en somme directe dans E. Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-espaces soient en somme directe est que leur intersection soit réduite au vecteur nul (voir la proposition 8.16, p. 341). Pour le cas présent, on doit vérifier que l'on a

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_E\}.$$

C'est immédiat. En effet, si $\boldsymbol{u} \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$, alors

$$f(\boldsymbol{u}) = \lambda_1 \boldsymbol{u} \qquad \text{et} \qquad f(\boldsymbol{u}) = \lambda_2 \boldsymbol{u}.$$

On obtient

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$$

et on en déduit $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$ puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$. La somme des deux sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} se note alors

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}.$$

Bien entendu, un endomorphisme peut posséder plus de deux sous-espaces propres. La somme de sous-espaces n'ayant été définie au chapitre 8 que dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, nous allons généraliser les définitions de somme, somme directe et sous-espaces supplémentaires au cas de plus de deux sous-espaces.

Copyrighted material

Définition 12.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces de E.*

✗ *La* **somme** $F_1 + \ldots + F_m$ *est le sous-espace de E défini par*

$$F_1 + \ldots + F_m \overset{\text{déf.}}{=} \left\{ \boldsymbol{x}_{F_1} + \ldots + \boldsymbol{x}_{F_m} \;\middle|\; \boldsymbol{x}_{F_1} \in F_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{F_m} \in F_m \right\}.$$

✗ *En particulier, la somme des sous-espaces $F_1, \ldots, F_m$ est dite* **directe** *si pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ appartenant au sous-espace $F_1 + \ldots + F_m$,*

$$\exists\,!\,(\boldsymbol{x}_{F_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{F_m}) \in F_1 \times \ldots \times F_m \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{F_1} + \ldots + \boldsymbol{x}_{F_m}.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}_{F_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{F_m}$ sont alors appelés les **composants** *du vecteur $\boldsymbol{x}$ respectivement dans $F_1, \ldots, F_m$ et le sous-espace $F_1 + \ldots + F_m$ se note*

$$F_1 \oplus \ldots \oplus F_m.$$

✗ *Enfin, les sous-espaces $F_1, \ldots, F_m$ sont dits* **supplémentaires** *dans E si*

$$E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_m.$$

Exemple Considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. On vérifie facilement que les droites vectorielles $\mathbb{K}\boldsymbol{e}_1$, $\mathbb{K}\boldsymbol{e}_2$, $\ldots$, $\mathbb{K}\boldsymbol{e}_n$ sont supplémentaires dans E et on écrit alors

$$E = \mathbb{K}\boldsymbol{e}_1 \oplus \mathbb{K}\boldsymbol{e}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}\boldsymbol{e}_n.$$

En effet, puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de E,

$$\exists\,!\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n,$$

ou encore, en notant $\boldsymbol{x}_i = \alpha_i\boldsymbol{e}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\exists\,!\,(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{K}\boldsymbol{e}_1 \times \mathbb{K}\boldsymbol{e}_2 \times \ldots \times \mathbb{K}\boldsymbol{e}_n \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{x}_n.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sont les composants du vecteur $\boldsymbol{x}$ respectivement dans $\mathbb{K}\boldsymbol{e}_1$, $\mathbb{K}\boldsymbol{e}_2$, $\ldots$, $\mathbb{K}\boldsymbol{e}_n$.

Revenons à présent à l'étude des sous-espaces propres.

Proposition 12.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace et f une application linéaire de E dans F. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont des valeurs propres de f deux à deux distinctes alors la somme des sous-espaces propres correspondants $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$ est directe. On la note dans ce cas*

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_m}.$$

Copyrighted material

Hidden page

alors, de la relation de liaison

$$\underbrace{\alpha_1^{(1)}\boldsymbol{u}_1^{(1)} + \ldots + \alpha_{n_1}^{(1)}\boldsymbol{u}_{n_1}^{(1)}}_{\in E_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{\alpha_1^{(1)}\boldsymbol{u}_1^{(1)} + \ldots + \alpha_{n_m}^{(m)}\boldsymbol{u}_{n_m}^{(m)}}_{\in E_{\lambda_m}} = \mathbf{0}_E,$$

on déduit, puisque la somme des sous-espaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_m}$ est directe, que

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)}\boldsymbol{u}_1^{(1)} + \ldots + \alpha_{n_1}^{(1)}\boldsymbol{u}_{n_1}^{(1)} &= \mathbf{0}_E \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots & \\ \alpha_1^{(m)}\boldsymbol{u}_1^{(m)} + \ldots + \alpha_{n_m}^{(m)}\boldsymbol{u}_{n_m}^{(m)} &= \mathbf{0}_E \end{cases}.$$

D'où, puisque chacune des familles $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_m$ est libre,

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} = \ldots = \alpha_{n_1}^{(1)} = 0 \\ \qquad\vdots \\ \alpha_1^{(m)} = \ldots = \alpha_{n_m}^{(m)} = 0 \end{cases}.$$

On a donc montré que la famille $\mathcal{L}$ était libre.

Le sous-espace $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_m}$ n'a aucune raison d'être l'espace E tout entier. Autrement dit, les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$ ne sont pas nécessairement supplémentaires dans E. Mais rien ne s'oppose à ce qu'ils le soient, et dans ce cas particulier, on dira que l'endomorphisme f est diagonalisable. Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans la suite du chapitre.

Exercice 1 *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ vérifiant*

$$f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$$

Soit $\mathrm{j} = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2$. *Montrer que :*

$$E = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{j}\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{j}^2\,\mathrm{id}_E\right).$$

12.3 Cas d'un espace de dimension finie

On se restreint maintenant au cas où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et on note

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = n.$$

Copyrighted material

12.3.1 Écriture sous forme matricielle

On munit l'espace E d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Soient f un endomorphisme de E, λ une valeur propre de f ($\lambda \in \mathbb{K}$) et $\boldsymbol{x}$ un vecteur propre de f associé à λ ($\boldsymbol{x} \in E$ et $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_E$). En notant $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice (carrée d'ordre n) associée à f relativement à $\mathcal{B}$ et X la matrice-colonne formée des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du vecteur propre $\boldsymbol{x}$ dans la même base $\mathcal{B}$, l'égalité vectorielle

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$$

s'écrit dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme matricielle

$$\mathrm{A}\,\mathrm{X} = \lambda\,\mathrm{X},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On étend aux matrices carrées[(2)] les notions définies sur les endomorphismes.

Définition 12.4 *Soit* A *une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

✗ *On appelle* **valeur propre de** A *tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe une matrice-colonne $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que*

$$\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}.$$

La matrice-colonne $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée **vecteur propre de** A *associé à λ et le couple (λ, X) se nomme* **élément propre** *de* A. *On appelle* **espace propre de** A *associé à λ, et on note E_λ, le sous-espace de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par*

$$E_\lambda = \left\{ \mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; \mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \right\}.$$

✗ *On appelle* **spectre de** A *le sous-ensemble de $\mathbb{K}$ constitué de toutes les valeurs propres de* A. *On le note* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

12.3.2 Calcul des valeurs propres

Commençons par donner une caractérisation des valeurs propres, plus pratique que celle de la proposition 12.1. On note I_n la matrice unité d'ordre n. On rappelle que I_n est inversible et que c'est la matrice associée à l'application identité relativement à n'importe quelle base de E. Puisque $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la

(2) Les notions de valeur propre et de vecteur propre sont dépourvues de sens pour des matrices rectangulaires et non carrées !

Copyrighted material

matrice associée à l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$ relativement à $\mathcal{B}$ est $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$. D'après la proposition 12.1,

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \iff f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non injectif.} \tag{2}$$

D'après la proposition 9.8 (voir chap. 9 p. 369), puisque l'espace E est de dimension finie, on a équivalence entre les propriétés d'injectivité et de bijectivité de l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$. Autrement dit,

$$f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non injectif} \iff f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non bijectif.} \tag{3}$$

Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit bijectif est que sa matrice représentative dans n'importe quelle base soit inversible (voir la proposition 10.12 chap. 10 p. 430). On a ainsi l'équivalence suivante

$$f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non bijectif} \iff \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n \text{ non inversible.} \tag{4}$$

Enfin, la matrice $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$ est non inversible si, et seulement si, son déterminant est nul. En regroupant ce dernier résultat avec les trois équivalences (2), (3) et (4), on obtient finalement

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \iff \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = 0.$$

On a ainsi établi la proposition suivante.

Proposition 12.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, f un endomorphisme de E et A sa matrice associée relativement à $\mathcal{B}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit valeur propre de f est que*

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = 0.$$

On en déduit que, pour que 0 soit valeur propre de A, il faut et il suffit que $\det(\mathrm{A}) = 0$, c'est-à-dire que A ne soit pas inversible (d'après la proposition 11.2, chap. 11, p. 478). On a ainsi montré la caractérisation suivante.

Corollaire 12.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée A soit inversible est que 0 ne soit pas valeur propre de A. En d'autres termes, pour toute matrice A carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$, on a l'équivalence :*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff 0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{A}).$$

Étant donnée la matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$\lambda \in \mathbb{K} \longmapsto \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) \in \mathbb{K}$$

est une application polynomiale de degré n. Cela conduit à la définition suivante.

Copyrighted material

Définition 12.5 *Soit* A *une matrice de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

✗ *On appelle* **polynôme caractéristique de** A *le polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, de degré* n*, noté* P_{A}*, défini par*

$$P_{\mathrm{A}}(\lambda) \overset{\text{déf.}}{=} \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n).$$

✗ *L'équation algébrique* $P_{\mathrm{A}}(\lambda) = 0$ *s'appelle* **équation caractéristique** *associée à la matrice* A.

La détermination des valeurs propres de f dans $\mathbb{K}$ équivaut au calcul des zéros du polynôme caractéristique $P_{\mathrm{A}} \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. En effet, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f équivaut à

$$P_{\mathrm{A}}(\lambda) = 0,$$

c'est-à-dire à

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f qui au vecteur $\boldsymbol{x}$, de coordonnées x_1, x_2, x_3 dans $\mathcal{B}$, associe le vecteur $\boldsymbol{y}$, de coordonnées y_1, y_2, y_3 dans $\mathcal{B}$ telles que

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 - x_3 \\ y_2 = -x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 = -x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Relativement à la base $\mathcal{B}$, la matrice associée à f est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P_{\mathrm{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

Les valeurs propres de A, et donc de f, sont les deux réels -1 et 2. On écrit

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{-1, 2\}.$$

Copyrighted material

Hidden page

Le polynôme caractéristique P_A est par conséquent invariant lorsqu'on remplace A par une matrice semblable ou, de manière équivalente, lorsqu'on représente f dans des bases différentes. On le note ainsi P_f et on dit que $P_f \in \mathbb{K}[X]$ est le ***polynôme caractéristique de l'endomorphisme*** f. On a

$$P_f(\lambda) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \mathrm{I}_n\big) \quad \text{pour toute base } \mathcal{B} \text{ de } E.$$

Le calcul des valeurs propres étant invariant par changement de base, nous pouvons ainsi nous placer dans n'importe quelle base de E pour calculer les valeurs propres d'un endormophisme f de E.

Définition 12.6 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie.*

✗ *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine simple du polynôme caractéristique de f, on dit que λ est une* **valeur propre simple** *de f.*

✗ *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité h du polynôme caractéristique de f, on dit que λ est une* **valeur propre multiple d'ordre h** *de f.*

Existe-t-il toujours des valeurs propres ?

La réponse est « oui » à la condition que le corps $\mathbb{K}$ considéré soit algébriquement clos. C'est le cas du corps $\mathbb{C}$. Rappelons que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n admet n racines (comptées avec leurs multiplicités) dans $\mathbb{C}$ (voir le théorème de d'Alembert-Gauss, p. 248). Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E se factorise ainsi dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$P_f(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{h_i}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ désignent les valeurs propres distinctes de f, de multiplicités respectives $h_1, h_2, \ldots, h_m$ et on a

$$m \leqslant n \qquad \text{et} \qquad h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n.$$

Ainsi, un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, admet toujours (au moins) une valeur propre (dans $\mathbb{C}$) et le nombre de valeurs propres distinctes est inférieur ou égal à n, ce que l'on résume sous forme matricielle par :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \quad \Big(\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \mathrm{card}\big(\mathrm{Sp}(\mathrm{A})\big) \leqslant n \Big).$$

La situation est différente lorsque l'on travaille sur le corps des nombres réels car, contrairement à $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos. Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel peut ne pas avoir de valeur propre. C'est le cas dans l'exemple suivant.

Copyrighted material

Exemple Soient $\theta \in [0, 2\pi[$ et $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On a

$$P_{A_\theta}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A_\theta)\lambda + \det(A_\theta) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1.$$

Les valeurs propres sur $\mathbb{C}$ sont $\lambda_1 = e^{i\theta}$ et $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ car

$$P_{A_\theta}(e^{i\theta}) = P_{A_\theta}(e^{i\theta}) = 0.$$

Si $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ alors A_θ ne possède aucune valeur propre dans $\mathbb{R}$; son spectre est vide ($\mathrm{Sp}(A_\theta) = \emptyset$). En revanche, si $\theta = 0$ ou si $\theta = \pi$ alors le spectre est non vide puisque

$$\mathrm{Sp}(A_0) = \mathrm{Sp}(I_2) = \{1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}(A_\pi) = \mathrm{Sp}(I_2) = \{-1\}.$$

Exercice 2 *1 - Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A \in M_n(\mathbb{K})$ associée au vecteur propre X alors λ^n est valeur propre de A^n associée à X ($n \in \mathbb{N}^*$).*
2 - Déterminer les valeurs propres d'une matrice idempotente, c'est-à-dire d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$A^2 = A,$$

et d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A^n = I_n.$$

3 - Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors (λ, X) est élément propre de A si, et seulement si, (λ^{-1}, X) est élément propre de A^{-1}.

12.3.3 Calcul des vecteurs propres

Intéressons-nous maintenant au calcul des vecteurs propres correspondant à chacune des valeurs propres. Soit $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Calculer $\boldsymbol{x}$, c'est résoudre l'équation

$$(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_E.$$

Les solutions sont les vecteurs du sous-espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$. Puisque $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas injective, il existe des solutions autres que le vecteur $\boldsymbol{0}_E$. Se pose alors la question de la dimension du sous-espace propre E_λ. Remarquons que si $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}_E$ désigne un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ alors, nécessairement,

$$\mathbb{K}\boldsymbol{u} \subset E_\lambda \quad \text{d'où} \quad \dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) \geqslant 1$$

car $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\boldsymbol{u}) = 1$. Le sous-epace propre E_λ est donc de dimension supérieure ou égale à 1. La proposition suivante complète ce résultat.

Copyrighted material

Hidden page

où R est une matrice rectangulaire de type $(p, n-p)$ et S une matrice carrée d'ordre $n-p$. En développant par rapport aux p premières colonnes, on obtient

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) - \lambda \mathrm{I}_n\right) \\ &= (\tilde{\lambda} - \lambda)^p \times \det(\mathrm{S} - \lambda \mathrm{I}_{n-p}) \\ &= (-1)^p \times (\lambda - \tilde{\lambda})^p \times \det(\mathrm{S} - \lambda \mathrm{I}_{n-p}). \end{aligned}$$

Ainsi, $(\lambda - \tilde{\lambda})^p$ divise le polynôme P_f, ce qui termine la démonstration puisque $(\lambda - \tilde{\lambda})^p$ ne divisant pas Q, cela signifie qu'il divise nécessairement $(\lambda - \tilde{\lambda})^h$, d'où $p \leqslant h$. En particulier, si la multiplicité de $\tilde{\lambda}$ est égale à 1, on en déduit immédiatement que $p = 1$. □

Comment déterminer la dimension d'un sous-espace propre ?

Dans le cas d'une valeur propre simple, c'est immédiat car le sous-espace propre associé est de dimension égale à 1. En revanche, dans le cas d'une valeur propre de multiplicité $h \geqslant 2$, cela l'est moins car la dimension du sous-espace propre associé n'est *a priori* pas égale à h. Pour déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda)$, il suffit d'appliquer le théorème du rang à l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$. On obtient alors la relation

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \mathrm{rg}\big(f - \lambda \mathrm{id}_E\big) + \dim_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)\big),$$

d'où, puisque $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{id}_E)$,

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \mathrm{rg}\big(f - \lambda \mathrm{id}_E\big).}$$

Le calcul du rang de $f - \lambda \mathrm{id}_E$ nous permet donc de trouver $\dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda)$.

Détermination d'une base d'un sous-espace propre

Après avoir calculé la dimension du sous-espace propre E_λ, on en cherche une base. Si $p = \dim_{\mathbb{K}}(E_\lambda)$ alors cela revient à chercher p vecteurs linéairement indépendants vérifiant l'équation vectorielle

$$\big(f - \lambda \mathrm{id}_E\big)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_E$$

ou, de manière équivalente (en se plaçant dans la base $\mathcal{B}$), vérifiant l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, la détermination d'une base du sous-espace propre E_λ se ramène à la résolution

Copyrighted material

Hidden page

Son rang est égal à 2. Ainsi, $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}-(-1)\mathrm{I}_3)=2$, d'où $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1})=3-2=1$. On retrouve bien que le sous-espace propre E_{λ_1} est de dimension égale à 1. En éliminant dans le système (S′) la dernière équation et en faisant passer aux seconds membres les termes comportant l'unique inconnue non principale x_3, on se ramène au système 2×2

$$(\mathrm{S}'')\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & x_2 & = & x_3 \\ & & 3x_2 & = & 3x_3 \end{array}\right. .$$

On obtient $x_1=x_3$ et $x_2=x_3$. Ainsi, un vecteur propre $\mathrm{X}\in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de A associé à λ_1 s'écrit

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad x_3\in\mathbb{R}.$$

Finalement, un vecteur propre $\boldsymbol{x}$ de f associé à λ_1 s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{x}=x_3\boldsymbol{e}_1+x_3\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3 \quad \text{avec} \quad x_3\in\mathbb{R}.$$

On obtient le vecteur propre $\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ en choisissant $x_3=1$. Le sous-espace propre associé est une droite vectorielle. Il est donné par

$$E_{\lambda_1}=\mathbb{R}\boldsymbol{u}_1.$$

Détermination du sous-espace propre associé à $\lambda_2=2$

La valeur propre $\lambda_2=2$ est une valeur propre multiple d'ordre 2 et on a $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2})=1$ ou 2. Un vecteur propre de A vérifie $(\mathrm{A}-2\,\mathrm{I}_3)\,\mathrm{X}=0$, c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De manière évidente, $\mathrm{rg}(\mathrm{A}-2\,\mathrm{I}_3)=1$, d'où $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2})=3-1=2$. Les trois équations du système sont identiques. On se ramène à une seule équation à trois inconnues, qui se résoud en fixant deux des trois variables et en résolvant par rapport à la variable restante. En fixant x_2 et x_3 on voit que la solution de l'équation

$$-x_1-x_2-x_3=0$$

est $x_1=-(x_2+x_3)$. Ainsi, un vecteur propre X de A associé à λ_2 s'écrit

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(x_2+x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad x_2\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_3\in\mathbb{R}.$$

Un vecteur propre $\boldsymbol{x}$ de f associé à λ_2 s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{x}=-(x_2+x_3)\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3 \quad \text{avec} \quad x_2\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_3\in\mathbb{R}.$$

Copyrighted material

En choisissant d'une part $x_2 = 0$ et $x_3 = -1$, et d'autre part $x_2 = 1$ et $x_3 = -1$, on obtient les deux vecteurs propres $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$ et $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$. Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants (vérification immédiate). Le sous-espace propre associé est un plan vectoriel. Il est donné par

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3).$$

Pour faire la transition avec le paragraphe suivant, on remarque que

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1})}_{=1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2})}_{=2} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(E)}_{=3}.$$

Puisque $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, on en déduit que les deux sous-espaces sont supplémentaires dans E et on écrit

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}.$$

12.4 Diagonalisation et trigonalisation

12.4.1 Diagonalisation d'un endomorphisme

Comme nous l'avons vu au paragraphe 12.3.2, tous les endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E n'admettent pas nécessairement de valeurs propres (et donc de vecteurs propres). Cependant, s'ils existent, les vecteurs propres d'un endomorphisme f associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre dans l'espace E (voir les commentaires à la suite de la proposition 12.3). Cela fait d'une famille de vecteurs propres un « bon candidat » pour constituer une base de E puisque, pour être une base, il ne lui reste plus qu'à être génératrice de l'espace E tout entier. Et si c'est le cas, on dira que f est diagonalisable.

Définition 12.7 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie ou infinie. Un endomorphisme f de E est dit* **diagonalisable** *sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.* **Diagonaliser** *f, c'est trouver une telle base.*

Quel intérêt avons-nous à diagonaliser un endomorphisme ?

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un espace vectoriel E de dimension n. Supposons que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ soit diagonalisable, c'est-à-dire supposons qu'il existe une base notée

$$\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$$

constituée de vecteurs propres de f. Écrivons la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$. Par définition, son j-ième vecteur colonne est constitué des coordonnées du vecteur $f(\boldsymbol{u}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. Or, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, …, $\boldsymbol{u}_n$ étant des

Copyrighted material

vecteurs propres de f, cela signifie qu'il existe n valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et appartenant toutes à $\mathbb{K}$, telles que

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1, \quad f(\boldsymbol{u}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{u}_2, \quad \ldots, \quad f(\boldsymbol{u}_n) = \lambda_n \boldsymbol{u}_n.$$

On en déduit alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{u}_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{matrix}.$$

C'est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres (distinctes ou confondues) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de f. On la note aussi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \overset{not.}{=} \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

En notant $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage d'une base (quelconque) $\mathcal{B}$ de E à la base des vecteurs propres $\mathcal{C}$, on a la relation

$$\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{P}.$$

Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est ainsi semblable à une matrice diagonale.

En résumé, si un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ alors sa matrice associée dans la base formée de ses vecteurs propres est diagonale et toute matrice associée à f relativement à une base (quelconque) de E est semblable à une matrice diagonale.

On a la définition suivante.

Définition 12.8 *Soit* A *une matrice de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que* A *est* ***diagonalisable*** *si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et s'il existe une matrice diagonale* $\mathrm{D} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Diagonaliser A, *c'est trouver* D.

Dire qu'une matrice rectangulaire est diagonalisable n'a pas de sens ! Il faut qu'elle soit carrée. Comme le montre l'exemple qui suit, la manière de diagonaliser une matrice (qui est diagonalisable) n'est pas unique.

Exemple Soient la matice carrée A appartenant à $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et les trois vecteurs colonnes U_1, U_2 et U_3 appartenant à $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{U}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Copyrighted material

On a déjà vérifié que U_1 est un vecteur propre de A associé à $\lambda_1 = -1$ et que U_2, U_3 sont deux vecteurs propres de A associés à $\lambda_2 = 2$ (voir p. 531). Considérons les trois matrices P, Q et R de $GL_3(\mathbb{R})$ suivantes

$$P = \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} U_2 & U_1 & U_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} U_2 & U_3 & U_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{= \mathrm{diag}(-1,2,2)} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{= P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{= A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{= P},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{= \mathrm{diag}(2,-1,2)} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{= Q^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{= A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{= Q},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{= \mathrm{diag}(2,2,-1)} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{= R^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{= A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{= R}.$$

Remarque Soit A une matrice d'ordre n diagonalisable. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ désignent les valeurs propres de A, distinctes deux à deux et de multiplicités respectives $h_1, \ldots, h_m$, alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, la valeur propre λ_i est présente h_i fois sur la diagonale principale de la matrice D. Le rang de A est alors égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leurs multiplicités). De plus, puisque $\det(D) = \det(A)$, on a

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{h_i} = \underbrace{(\lambda_1 \times \ldots \times \lambda_1)}_{h_1 \text{ fois}} \times \ldots \times \underbrace{(\lambda_m \times \ldots \times \lambda_m)}_{h_m \text{ fois}}.$$

Puisque $\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(A)$, on a

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} h_i \lambda_i = \underbrace{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_1)}_{h_1 \text{ fois}} + \ldots + \underbrace{(\lambda_m + \ldots + \lambda_m)}_{h_m \text{ fois}}.$$

Copyrighted material

12.4.2 Caractérisation de la diagonalisation en dimension finie

Proposition 12.6 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et f un endomorphisme de E. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$ les sous-espaces propres correspondants. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable est que*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_1}) + \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_2}) + \ldots + \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_m}) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

Démonstration $\trianglerighteq$ Soient $n_i = \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_i})$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Supposons f diagonalisable et montrons que $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$. Si f est diagonalisable alors il existe une base $\mathcal{C}$ de vecteurs propres de f. De plus, la matrice associée à f dans cette base est diagonale. On s'en sert pour calculer le polynôme caractéristique P_f. En notant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes, de multiplicités respectives $h_1, h_2, \ldots, h_m$, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad P_f(\lambda) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) - \lambda \mathrm{I}_n\right) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{h_i},$$

d'où $h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n$ puisque P_f est un polynôme de degré égal à n. Il est alors suffisant de montrer que $n_i = h_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ car de l'égalité $h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n$, on pourra en déduire l'égalité recherchée :

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n.$$

- Pour tout i appartenant à $\{1, 2, \ldots, m\}$, les vecteurs propres de $\mathcal{C}$ correspondant à la valeur propre λ_i (il y en a h_i) forment une famille libre. On a donc nécessairement

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad n_i \geqslant h_i. \tag{5}$$

- D'après la proposition 12.5, la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre à laquelle il est associé. On a donc

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad n_i \leqslant h_i. \tag{6}$$

De (5) et (6) on déduit $n_i = h_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

$\trianglelefteq$ Montrons à présent la réciproque. Supposons que $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ et montrons que f est diagonalisable. On extrait une base de chacun des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$. Soient

$$\mathcal{C}_1 = \left(\boldsymbol{u}_i^{(1)}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n_1}, \quad \mathcal{C}_2 = \left(\boldsymbol{u}_i^{(2)}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n_2}, \quad \ldots, \quad \mathcal{C}_m = \left(\boldsymbol{u}_i^{(m)}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n_m}$$

des bases respectives des sous-espaces $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_m}$. Tous les vecteurs appartenant à ces bases sont des vecteurs propres. On considère la famille $\mathcal{C}$ que l'on obtient en réunissant l'ensemble des m bases $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m$:

$$\mathcal{C} = \Big(\underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(1)}, \boldsymbol{u}_2^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_1}^{(1)}}_{\in E_{\lambda_1}}, \underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(2)}, \boldsymbol{u}_2^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_2}^{(2)}}_{\in E_{\lambda_2}}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(m)}, \boldsymbol{u}_2^{(m)}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n_m}^{(m)}}_{\in E_{\lambda_m}}\Big).$$

Copyrighted material

C'est une famille libre dans E. Nous avons déjà vérifié ce point au paragraphe 12.2.2 (c'est une conséquence de la proposition 12.3). Or, les familles $\mathcal{C}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, étant disjointes deux à deux, on a

$$\text{card}(\mathcal{C}) = \text{card}(\mathcal{C}_1) + \text{card}(\mathcal{C}_2) + \ldots + \text{card}(\mathcal{C}_m) = n_1 + n_2 + \ldots + n_m.$$

En tenant compte de notre hypothèse ($n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$), on obtient

$$\text{card}(\mathcal{C}) = n.$$

Puisque toute famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n est une base, la famille (de vecteurs propres) $\mathcal{C}$ ainsi construite est effectivement une base de E ; cela qui termine la démonstration. □

Remarque Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E soit diagonalisable est que l'espace E se décompose en une somme directe des sous-espaces propres E_{λ_1}, E_{λ_2}, …, E_{λ_m} :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_m}.$$

On déduit immédiatement de la proposition 12.6 une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Corollaire 12.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Si un endomorphisme f de E possède exactement n valeurs propres distinctes deux à deux, alors f est diagonalisable*

Démonstration Soit f un endomorphisme de E avec $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$. Supposons que les valeurs propres λ_1, λ_2, …, λ_n soient distinctes deux à deux. Ce sont donc nécessairement des valeurs propres simples de f et, d'après la proposition 12.5, la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1. On a ainsi

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_1})}_{=1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_2})}_{=1} + \ldots + \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda_n})}_{=1} = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(E)}_{=n},$$

et, d'après la proposition 12.6, cela nous permet de conclure que f est diagonalisable. □

Comme l'illustre le deuxième exemple ci-après, la condition donnée dans le corollaire 12.2 est suffisante mais non nécessaire.

Exemples

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$ et on vérifie que :

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Copyrighted material

Hidden page

Tout endomorphisme est-il diagonalisable ?

On se convainc facilement que la réponse à cette question est « non ». En effet, d'après le corollaire 12.3, pour qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E soit diagonalisable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. le nombre de ses valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités) est égal à la dimension de E ;
2. la dimension de chacun des sous-espaces propres est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

Il existe des endomorphismes pour lesquels l'une ou l'autre de ces deux conditions (ou les deux à la fois) n'est pas vérifiée (voir l'exemple précédent et l'exercice 3). Néanmoins, nous pouvons remarquer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors la première condition (celle portant sur le nombre de valeurs propres) est automatiquement vérifiée puisque tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. L'obstruction à la diagonalisation d'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ne pourra apparaître que si la deuxième condition (celle portant sur la dimension des sous-espaces propres) n'est pas vérifiée.

Il est intéressant de noter que certaines catégories d'endomorphismes ne sont jamais diagonalisables. C'est le cas des endomorphismes nilpotents, à l'exception de l'application nulle. Ce point est développé ci-après.

Endomorphisme nilpotent

Proposition 12.7 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Supposons f non identiquement nul. Si f est nilpotent alors f n'est pas diagonalisable.*

Démonstration Utilisons un raisonnement par contraposée. Supposons que f soit à la fois nilpotent et diagonalisable et déduisons-en que f est identiquement nul. Soit $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Plaçons-nous dans une base $\mathcal{B}$ de E. Soit $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice associée à f dans $\mathcal{B}$. D'après notre hypothèse, N est nilpotente et diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible P telle que

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{NP}$$

avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sont les valeurs propres (distinctes ou confondues) de la matrice N. En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient

$$\mathrm{N} = \mathrm{PDP}^{-1}$$

et on montre (par récurrence sur l'entier k) que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{N}^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}.$$

Copyrighted material

Puisque N est nilpotente, $N^p = 0_n$ pour un certain entier p non nul. Il vient alors que $D^p = 0_n$, autrement dit que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. La matrice diagonale D est donc nulle. On en déduit que la matrice N est nulle, ou, de manière équivalente, que l'endomorphisme f est identiquement nul. □

Décomposition de Dunford

L'importance de l'étude des endomorphismes nilpotents apparaît clairement dans la proposition suivante.

Proposition 12.8 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ (ce qui est toujours le cas lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors il existe un unique couple (g, h) d'endomorphismes de E, tel que*

$$f = g + h \qquad et \qquad g \circ h = h \circ g$$

avec g diagonalisable et h nilpotent. Cette décomposition est connue sous le nom de ***décomposition de Dunford****.*

Démonstration Admise. □

Les deux endomorphismes g et h sont définis à partir de f. L'endomorphisme g (respectivement h) est appelé partie diagonalisable (resp. partie nilpotente) de f. Il est à noter que lorsque le corps de référence est $\mathbb{C}$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable est que sa partie nilpotente soit l'endomorphisme nul.

Exemple Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La partie diagonalisable g et la partie nilpotente h de f sont les endomorphismes dont les matrices respectives dans la base canonique sont G et H avec

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Copyrighted material

Nous verrons ultérieurement (voir p. 549) suivant quelle méthode nous avons obtenu les expressions des deux matrices G et H. Nous pouvons néanmoins vérifier les points suivants.

- La matrice A se décompose comme la somme des deux matrices G et H :

$$A = G + H.$$

- Le polynôme caractéristique de G s'écrit pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_G(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

  La matrice G possède ainsi une valeur propre double ($\lambda_1 = 1$) et une valeur propre simple ($\lambda_2 = 2$). Elle est diagonalisable car $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 2$ et $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1$.
- La matrice H est nilpotente puisque $H^2 = 0_3$.
- Le produit des deux matrices G et H est commutif :

$$G \times H = H \times G.$$

12.4.3 Trigonalisation d'un endomorphisme

Définition 12.9 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie. Un endomorphisme f de E est dit* **trigonalisable**[4] *s'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de f est triangulaire.* **Trigonaliser** *f, c'est trouver une telle base.*

Remarquons que cette définition ne précise pas si la matrice triangulaire doit être supérieure ou inférieure. À ce propos, rappelons que si $\mathcal{B}$ désigne une base de E et si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure alors, en désignant par $\mathcal{C}$ la base obtenue à partir de $\mathcal{B}$ en inversant l'ordre des vecteurs, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ est triangulaire inférieure. On peut donc toujours supposer, sans restriction aucune, que la matrice triangulaire dont il est question dans la définition 12.9, est supérieure.

Définition 12.10 *Une matrice* A *de* $M_n(\mathbb{K})$ *est dite* ***trigonalisable*** *si elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *et s'il existe une matrice triangulaire* $T \in M_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$T = P^{-1}AP.$$

Trigonaliser A, *c'est trouver* T.

Donnons à présent une caractérisation d'un endomorphisme trigonalisable en dimension finie.

[4] On dit aussi ***triangularisable***.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Cet endomorphisme est-il trigonalisable ? Pour répondre à cette question, nous choisissons[5] de munir l'espace $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ où

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \quad \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1),$$

et d'effectuer la recherche des valeurs propres dans cette base (c'est la base canonique). Notons A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$. Elle s'écrit

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{matrix} \end{array}.$$

On vérifie sans difficulté que l'on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad P_f(\lambda) = \det\bigl(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}_3\bigr) = (1-\lambda)^3.$$

L'endomorphisme f est trigonalisable (puisque son polynôme caractéristique est scindé) et $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1\}$. Remarquons que la matrice A n'est certainement pas diagonalisable, car si elle l'était, elle serait semblable à la matrice identité d'ordre 3, et donc nécessairement égale à I_3, ce qui, de toute évidence, n'est pas le cas. Cherchons à présent les vecteurs propres de f associés à la valeur propre triple $\lambda = 1$. Effectuons les calculs dans la base $\mathcal{B}$. Soit $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ un vecteur propre rapporté à la base canonique $\mathcal{B}$. On doit résoudre

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 11 \\ -14 & -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient $x_1 = x_3/2$ et $x_2 = x_3/2$ avec $x_3 \in \mathbb{R}$. En choisissant $x_3 = 2$, on obtient le vecteur propre $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,2)$, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3. \tag{7}$$

Il s'agit à présent de compléter le vecteur $\boldsymbol{u}_1$ par deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de telle sorte que l'on obtienne une base. Il y a une infinité de manière d'y arriver. Par souci de simplicité, nous choisissons de compléter $\boldsymbol{u}_1$ par les deux vecteurs $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ et $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ de la base canonique. Nous obtenons la nouvelle base $\mathcal{B}_1 = \bigl(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\bigr)$ de $\mathbb{R}^3$. Écrivons la matrice représentative de f dans cette nouvelle base. En utilisant l'égalité $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$ (qui se déduit de (7)), on obtient

$$f(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 - 6\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{u}_1 - 5\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3,$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{e}_1 + 11\boldsymbol{e}_2 + 11\boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{u}_1 + 9\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3.$$

D'où, puisque $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{matrix} \end{array}.$$

[5] Ce choix est arbitraire, toute autre base de l'espace $\mathbb{R}^3$ conviendrait.

Copyrighted material

Hidden page

D'où, puisque $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{matrix}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure. Notons-la T. On vérifie la relation

$$\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$$

où P désigne la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ à la base $\mathcal{B}_2 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Elle s'écrit

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 *On considère la matrice* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

1 - Calculer les valeurs propres de A. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
2 - Vérifier que $\boldsymbol{u}_1 = (-4, 1, 2)$ *et* $\boldsymbol{u}_2 = (-2, 1, 1)$ *sont deux vecteurs propres de l'application canoniquement associée à* A.
3 - Soit $\boldsymbol{v} = (-1, 1/2, 1)$. *Montrer que* $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
4 - Vérifier que A *est semblable à la matrice*

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.4.5 Complément : réduction de Jordan

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes deux à deux, de multiplicités respectives $h_1, h_2, \ldots, h_m$. On peut affiner le résultat de la proposition 12.9 et montrer que sous la même condition, à savoir si le polynôme caractéristique de f est scindé, autrement dit si $h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n$, alors il existe une base $\mathcal{C}$ de E relativement à laquelle la matrice de f s'écrit

$$\mathrm{J} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{J}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{J}_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mathrm{J}_m \end{array}\right)$$

Copyrighted material

Hidden page

Exemple Nous reprenons ici l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ (voir p. 540) dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considérons la nouvelle base $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ où $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-1,2,0)$ et $\boldsymbol{u}_3 = (0,1,1)$. On vérifie

$$f(\boldsymbol{u}_1) = 2\boldsymbol{u}_1, \quad f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_2 \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3.$$

La matrice représentative de f relativement à la base $\mathcal{C}$ s'écrit ainsi

$$\mathrm{J} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \operatorname{diag}\left((2), \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

C'est la forme réduite de Jordan associée à f. Elle se décompose comme suit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{J}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{N}}.$$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. On a $\mathrm{J} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, d'où

$$\mathrm{A} = \mathrm{PJP}^{-1} = \mathrm{P}(\mathrm{D}+\mathrm{N})\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PDP}^{-1} + \mathrm{PNP}^{-1}.$$

Posons $\mathrm{G} = \mathrm{PDP}^{-1}$ et $\mathrm{H} = \mathrm{PNP}^{-1}$. On vérifie

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{G}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{H}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{N}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{P}^{-1}}.$$

On retrouve les expressions de G et H données en page 540. La matrice A se décompose de la façon suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{G}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{H}}.$$

La matrice G (respectivement la matrice H) est la représentation matricielle dans $\mathcal{B}$ de la partie diagonalisable g (resp. de la partie nilpotente h) de l'endomorphisme f.

Copyrighted material

12.5 Exercices de synthèse

Exercice 5 *On considère l'application linéaire f qui au vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$\begin{cases} y_1 &= 4x_3 \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_3 &= 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{cases}.$$

1 - On note $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice associée à l'endomorphisme f dans $\mathcal{B}$.

2 - Calculer les valeurs propres de f. Vérifier que f est diagonalisable. f est-il bijectif ?

3 - Calculer les vecteurs propres de f.

4 - Soit $\mathcal{C}$ une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f. Écrire la matrice $\mathrm{D} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

5 - On considère l'endomorphisme g défini par :

$$g = f^3 - 9f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \quad \text{où} \quad f^3 \overset{not.}{=} f \circ f \circ f.$$

Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)$ *et en déduire* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

Exercice 6 *On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant*

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} &= -u_n + w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n \end{cases}.$$

1 - Écrire le système (S) *sous la forme matricielle*

$$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2 - Calculer les valeurs propres de A. *En déduire que la matrice* A *est diagonalisable. Proposer une base de vecteurs propres de* A.

3 - Soit P *la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres de* A. *Calculer* P *et* P^{-1}, *puis expliciter la matrice* $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}.$$

4 - Calculer A^n *pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

5 - En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Copyrighted material

12.6 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

La méthode utilisée consiste à montrer que tout élément $\boldsymbol{x}$ de E peut s'écrire de manière unique sous la forme : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ avec $\boldsymbol{x}_1 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, $\boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{j}\,\mathrm{id}_E)$ et $\boldsymbol{x}_3 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{j}^2\,\mathrm{id}_E)$. Supposons dans un premier temps que ces trois vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ existent. On a alors

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_1, \quad f(\boldsymbol{x}_2) = \mathrm{j}\,\boldsymbol{x}_2 \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{x}_3) = \mathrm{j}^2\,\boldsymbol{x}_3.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ doivent vérifier nécessairement

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_1 + \mathrm{j}\,\boldsymbol{x}_2 + \mathrm{j}^2\,\boldsymbol{x}_3 = f(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}_1 + \mathrm{j}^2\,\boldsymbol{x}_2 + \mathrm{j}\,\boldsymbol{x}_3 = f^2(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

où la deuxième (respectivement la troisième) égalité a été obtenue en composant la première égalité par f (respectivement par f^2). En additionnant les trois égalités on obtient :

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x}) + f^2(\boldsymbol{x})).$$

En multipliant la première égalité par j^2, la deuxième par j, en laissant inchangée la troisième, et en additionnant le tout, on obtient

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{x} + \mathrm{j}^2\,f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{j}\,f^2(\boldsymbol{x})).$$

De même, en multipliant la première égalité par j^2, la troisième par j, en laissant inchangée la deuxième, et en additionnant le tout, on obtient

$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{x} + \mathrm{j}\,f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{j}^2\,f^2(\boldsymbol{x})).$$

Les trois vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ ainsi calculés sont les seules solutions (si elles existent !) possibles (l'unicité de l'écriture implique l'unicité de ces solutions). Pour que notre raisonnement soit complet, il reste à vérifier que $\boldsymbol{x}_1$ appartient à $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, que $\boldsymbol{x}_2$ appartient à $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{j}\,\mathrm{id}_E)$, que $\boldsymbol{x}_3$ appartient à $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{j}^2\,\mathrm{id}_E)$ et que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$. Cette dernière égalité est bien évidemment vérifiée puisque c'est une des trois équations du système. De plus, on vérifie que

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}_1) = \dfrac{1}{3}(f(\boldsymbol{x}) + f^2(\boldsymbol{x}) + f^3(\boldsymbol{x})) = \dfrac{1}{3}(f(\boldsymbol{x}) + f^2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1 \\ f(\boldsymbol{x}_2) = \dfrac{1}{3}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{j}^2\,f^2(\boldsymbol{x}) + \mathrm{j}\,f^3(\boldsymbol{x})) = \dfrac{1}{3}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{j}^2\,f^2(\boldsymbol{x}) + \mathrm{j}\,\boldsymbol{x}) = \mathrm{j}\,\boldsymbol{x}_2 \\ f(\boldsymbol{x}_3) = \dfrac{1}{3}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{j}\,f^2(\boldsymbol{x}) + \mathrm{j}^2\,f^3(\boldsymbol{x})) = \dfrac{1}{3}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{j}\,f^2(\boldsymbol{x}) + \mathrm{j}^2\,\boldsymbol{x}) = \mathrm{j}^2\,\boldsymbol{x}_3 \end{cases}$$

où on a utilisé $f^3(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. On a donc $\boldsymbol{x}_1 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, $\boldsymbol{x}_2 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{j}\,\mathrm{id}_E)$ et $\boldsymbol{x}_3 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{j}^2\,\mathrm{id}_E)$.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 2

Soit (λ, X) un élément propre de A.

1 - En multipliant à gauche l'égalité matricielle $AX = \lambda X$ par A, on obtient

$$A^2X = \lambda^2 X.$$

Plus généralement, en utilisant une récurrence sur l'entier n, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n X = \lambda^n X.$$

2 - D'après ce qui précède, (λ^2, X) est élément propre de A^2. Si $A^2 = A$ alors

$$(\lambda^2 - \lambda)X = 0_{n,1}, \quad \text{d'où} \quad \lambda^2 = \lambda$$

puisque $X \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$. De la même manière, si $A^n = I$ alors

$$(\lambda^n - 1)X = 0_{n,1}, \quad \text{d'où} \quad \lambda^n = 1$$

puisque $X \neq 0$. Ainsi, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

3 - Considérons à présent A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a nécessairement $\lambda \neq 0$ puisque A est inversible. On vérifie les équivalences suivantes :

$$AX = \lambda X \iff X = \lambda^{-1}AX \iff A^{-1}X = \lambda^{-1}X,$$

ce qui montre que (λ^{-1}, X) est un élément propre de A^{-1}.

Solution de l'exercice 3

1 - a) Considérons A dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On a : $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. Ainsi A possède deux valeurs propres sur $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = 1$ (valeur propre double) et $\lambda_2 = -1$ (valeur propre simple). On obtient :

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\big((1,0,1),(0,1,0)\big) \quad \text{et} \quad E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1)\big).$$

La matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable car

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) + \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3).$$

b) Considérons B dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On a : $P_B(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Ainsi B possède une unique valeur propre sur $\mathbb{R}$: $\lambda = 1$. C'est une valeur propre simple. On obtient :

$$E_\lambda = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big).$$

La matrice $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable car $\dim_{\mathbb{R}}(E_\lambda) = 1 \neq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

2 - a) La matrice A considérée comme une matrice complexe est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (puisqu'elle l'est sur $\mathbb{R}$).

Copyrighted material

b) Si $B \in M_3(\mathbb{C})$ alors $P_B(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-j)(\lambda-\bar{j})$. Ainsi, la matrice B considérée maintenant comme une matrice complexe possède trois valeurs propres simples sur $\mathbb{C}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = j$ et $\lambda_3 = \bar{j}$. On obtient :

$$E_{\lambda_1} = \text{Vect}\big((1,1,1)\big), \quad E_{\lambda_2} = \text{Vect}\big((j,\bar{j},1)\big) \text{ et } E_{\lambda_3} = \text{Vect}\big((\bar{j},j,1)\big).$$

Elle est donc diagonalisable (sur $\mathbb{C}$) car $\sum_{i=1}^{3} \dim_{\mathbb{C}}(E_{\lambda_i}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$.

Solution de l'exercice 4

On note $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application canoniquement associée à A.

1 - Le polynôme caractéristique de A s'écrit : $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+3)$. Ainsi, A possède deux valeurs propres distinctes sur $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = 1$ (valeur propre double) et $\lambda_2 = -3$ (valeur propre simple). On vérifie que $\text{rg}(A - \lambda_1 I_3) = 2$ et $\text{rg}(A - \lambda_2 I_3) = 2$. On en déduit les dimensions des sous-espaces propres associés

$$\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_1}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_2}) = 1.$$

La matrice A n'est pas diagonalisable puisque la dimension du sous-espace propre E_{λ_1} associé à la valeur propre λ_1 est différente de l'ordre de multiplicité de λ_1 (en tant que racine du polynôme caractéristique $P_A \in \mathbb{R}_2[X]$).

2 - Les vecteurs $\boldsymbol{u}_1 = (-4,1,2)$ et $\boldsymbol{u}_2 = (-2,1,1)$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement à $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -3$. Pour vérifier que $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1$ et $f(\boldsymbol{u}_2) = -3\boldsymbol{u}_2$, il suffit d'effectuer les calculs en se plaçant dans la base canonique $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3 - La famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car son rang est égal à 3.

4 - A est semblable à T signifie que A et T représentent la même application linéaire dans des bases différentes. On rappelle que l'on a déjà supposé que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Suivant l'expression de T, écrire que $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ signifie que :

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1, \quad f(\boldsymbol{u}_2) = -3\boldsymbol{u}_2 \text{ et } f(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}_1 - 4\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}.$$

Les deux premières relations sont vérifiées car $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont deux vecteurs propres de f. Il reste alors à vérifier la troisième. Plaçons-nous pour cela encore dans la base canonique $\mathcal{B}$. On vérifie

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9/2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

Copyrighted material

$$-\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9/2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

En notant U_1, U_2 et V les matrices-colonnes constituées des coordonnées, dans la base canonique $\mathcal{B}$, des vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{v}$, on a ainsi vérifié l'égalité matricielle

$$\mathrm{AV} = -\mathrm{U}_1 - 4\mathrm{U}_2 + \mathrm{V},$$

et, par conséquent, l'égalité vectorielle $f(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}_1 - 4\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}$.

Solution de l'exercice 5

1 - Relativement à la base canonique $\mathcal{B}$, l'équation vectorielle $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ s'écrit sous la forme matricielle $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2 - Le polynôme caractéristique de f s'obtient en calculant celui de la matrice A. On a :

$$P_f(\lambda) = \det\big(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3\big) = -\lambda(\lambda+4)(\lambda-4).$$

Ainsi, l'endomorphisme f possède trois valeurs propres simples sur $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 4$. Il est diagonalisable car $\sum_{k=1}^{3} \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda_k}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$. Il n'est pas bijectif car 0 est valeur propre.

3 - On obtient : $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\big((-x_3, 0, x_3)\big)$ avec $x_3 \in \mathbb{R}^*$. On choisit $x_3 = -1$. Ainsi $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1)$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = -4$. De même, $E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\big((-2x_2, x_2, 0)\big)$ avec $x_2 \in \mathbb{R}^*$. On choisit $x_2 = -1$. Ainsi $\boldsymbol{u}_2 = (2, -1, 0)$ est un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 0$. Enfin, $E_{\lambda_3} = \mathrm{Vect}\big((x_3, x_3, x_3)\big)$ avec $x_3 \in \mathbb{R}^*$. On choisit $x_3 = 1$. Ainsi, $\boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à $\lambda_3 = 4$.

4 - Soit $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. On obtient : $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5 - Relativement à $\mathcal{C}$, $f^3 - 9f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ s'écrit $\mathrm{D}^3 - 9\mathrm{D} + \mathrm{I}_3$. On obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 29 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Copyrighted material

On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)\mathrm{P}$. On en déduit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{P}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g)\,\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 28 \\ 7 & 15 & 7 \\ 14 & 28 & -13 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 6

1 - Le système (S) s'écrit $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2 - $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{-1, 1, 2\}$. Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à 1. La matrice A est ainsi diagonalisable. Une base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres de A est

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3 - $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 2)$.

4 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{P} \times \mathrm{diag}\,((-1)^n, 1, 2^n) \times \mathrm{P}^{-1}$. D'où

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + (-1)^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & (-1)^{n+1} - 2^n + 2 & (-1)^n + 2^n - 1 \end{pmatrix}.$$

5 - De $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient finalement

$$\begin{cases} u_n &= (-1)^{n+1} \times 2 + 3 \times 2^n \\ v_n &= 4 - 3 \times 2^n \\ w_n &= 4 - 3 \times 2^n + (-1)^{n+1} \times 2 \end{cases}.$$

Copyrighted material

Copyrighted material

Hidden page

Copyrighted material

CHAPITRE 13

Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle

13.1 L'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$

13.1.1 Propriétés algébriques

Soit D un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de D dans $\mathbb{R}$. On désigne par $\times_{\mathbb{R}}$ et $+_{\mathbb{R}}$ le produit et la somme dans le corps $\mathbb{R}$.

On munit $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ de 2 lois de composition interne $+$ et $\times$ définies par

$$(\forall (f,g)\in\mathcal{A}(D,\mathbb{R})^2)\quad(\forall x\in D)\quad \begin{aligned}(f+g)(x)&=f(x)+_{\mathbb{R}}g(x),\\ (f\times g)(x)&=f(x)\times_{\mathbb{R}}g(x).\end{aligned}$$

La loi $+$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :

1. elle est associative : $\forall (f,g,h)\in\mathcal{A}(D,\mathbb{R})^3\quad (f+g)+h=f+(g+h)$;
2. elle est commutative : $\forall (f,g)\in\mathcal{A}(D,\mathbb{R})^2\quad f+g=g+f$;
3. elle possède pour élément neutre l'application nulle :
$$0_{\mathcal{A}(D,\mathbb{R})}:x\in D\longmapsto 0\in\mathbb{R}\,;$$
4. tout élément f de $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ possède un symétrique dans $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ qui est l'application notée $-f$ définie par : $x\in D\longmapsto -f(x)\in\mathbb{R}$.

La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :

5. elle est associative : $\forall (f,g,h)\in\mathcal{A}(D,\mathbb{R})^3\quad (f\times g)\times h=f\times(g\times h)$;
6. elle est distributive par rapport à la loi $+$:
$$\forall (f,g,h)\in\mathcal{A}(D,\mathbb{R})^3\quad f\times(g+h)=(f\times g)+(f\times h)\,;$$
7. elle est commutative : $\forall (f,g)\in\mathcal{A}(D,\mathbb{R})^2\quad f\times g=g\times f$;
8. elle possède pour élément neutre l'application : $1_{\mathcal{A}(D,\mathbb{R})}:x\in D\longmapsto 1\in\mathbb{R}$.

Copyrighted material

On résume les propriétés qui viennent d'être énoncées pour les lois de composition interne + et × par la proposition suivante.

Proposition 13.1 *L'ensemble $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ muni des lois + et × est un* ***anneau commutatif***[1].

Remarque $(\mathcal{A}(D,\mathbb{R}),+,\times)$ n'est pas un corps car une fonction réelle n'a pas nécessairement de symétrique pour la loi × (voir la proposition 13.3).

On munit également $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ d'une loi de composition externe · définie par

$$(\forall f \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})\ \forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in D) \qquad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times_{\mathbb{R}} f(x).$$

Cette loi possède les propriétés suivantes :

9. $\forall (f,g) \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$;
10. $\forall f \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R}) \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda +_{\mathbb{R}} \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$;
11. $\forall f \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R}) \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda \times_{\mathbb{R}} \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$;
12. $1 \cdot f = f$.

On peut donc énoncer la proposition suivante.

Proposition 13.2 *L'ensemble $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ muni de la loi de composition interne + et de la loi de composition externe · est un* **espace vectoriel**[2] *sur le corps des réels.*

Si on se restreint aux applications ne s'annulant en aucun point de l'ensemble D, alors on peut définir un symétrique pour la loi ×.

Proposition 13.3 *Si $g \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ vérifie $(\forall x \in D\ g(x) \neq 0)$ alors g admet un symétrique pour la loi produit × qui est l'application notée $1/g$ définie par*

$$x \in D \longmapsto \frac{1}{g(x)} \in \mathbb{R}.$$

Remarques

1. Il ne faut pas utiliser la notation g^{-1} pour désigner le symétrique de g pour la loi ×. Cette notation est réservée pour désigner la bijection réciproque de g (lorsque celle-ci existe).

2. On note $\dfrac{f}{g}$ l'application $f \times 1/g$ et $f - g$ l'application $f + (-g)$.

[1] La définition d'un anneau est donnée en page 64.

[2] La définition d'un espace vectoriel est donnée en page 297.

Copyrighted material

Définition 13.1 [3] *Soient f une application de D dans $\mathbb{R}$, J un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ telle que $f(D) \subset J$ et g une application de J dans $\mathbb{R}$. On appelle* **composée** *des applications f et g, et on note $g \circ f$, l'application définie par*

$$x \in D \longmapsto g(f(x)).$$

Remarque Il ne faut pas confondre l'application $g \circ f$ qui est la composée des applications f et g et l'application $f \circ g$ qui est la composée des applications g et f. La composition d'applications n'est pas commutative. Ainsi, si l'on considère

$$f : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sqrt{t} \qquad \text{et} \qquad g : t \in \mathbb{R} \longmapsto \cos t$$

alors $g \circ f : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \cos(\sqrt{t})$ et

$$f \circ g : t \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(4n-1)\pi/2, (4n+1)\pi/2] \longmapsto \sqrt{\cos t}.$$

On remarquera également que le domaine de définition de $g \circ f$ n'est pas obligatoirement identique à celui de f. On peut schématiser la composition des applications $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : J \longmapsto \mathbb{R}$ de la manière suivante

$$\begin{array}{ccccc} D & \longrightarrow & f(D) \subset J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) & \longmapsto & z = g(y) = g(f(x)) \end{array}$$

Relation d'ordre sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$

On définit[4] sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ la relation $\leqslant$ par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})^2 \quad \Big(f \leqslant g \Longleftrightarrow (\forall x \in D \quad f(x) \leqslant_{\mathbb{R}} g(x)) \Big)$$

où $\leqslant_{\mathbb{R}}$ désigne la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$:

- elle est réflexive : $\forall f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R}) \quad f \leqslant f$;
- elle est anti-symétrique : $\forall (f, g) \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})^2 \quad (f \leqslant g \text{ et } g \leqslant f) \Longrightarrow f = g$;
- elle est transitive : $\forall (f, g, h) \in (\mathcal{A}(D, \mathbb{R}))^3 \quad (f \leqslant g \text{ et } g \leqslant h) \Longrightarrow f \leqslant h$.

La relation $\leqslant$ est une relation compatible avec les lois $+$ et $\times$:

- $\forall (f, g, h) \in (\mathcal{A}(D, \mathbb{R}))^3 \quad (f \leqslant g \implies f + h \leqslant g + h)$;
- $\forall (f, g, h) \in (\mathcal{A}(D, \mathbb{R}))^3 \quad ((f \leqslant g) \text{ et } (0 \leqslant h) \implies f \times h \leqslant g \times h)$.

[3] On pourra se reporter à la définition 2.18, page 40, et aux remarques qui lui font suite.

[4] On a introduit les notations $+_{\mathbb{R}}$, $\times_{\mathbb{R}}$ et $\leqslant_{\mathbb{R}}$ pour les lois et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ afin de bien mettre en évidence la manière dont étaient définies les lois de composition internes et la relation d'ordre sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ à partir des lois de composition internes et de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Dans la suite nous noterons $+$, $\times$ et $\leqslant$ les lois et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, le contexte permettant de décider s'il s'agit des lois sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$.

Copyrighted material

Ces propriétés découlent de manière directe des propriétés de la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$.

La relation n'est pas une relation d'ordre total[5]. En effet, considérons les applications $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x$ et $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$. On a

$$f(x) \geqslant_{\mathbb{R}} g(x) \quad \forall x \in [0,1] \qquad \text{et} \qquad f(x) \leqslant_{\mathbb{R}} g(x) \quad \forall x \notin [0,1].$$

Par conséquent on n'a ni $f \leqslant g$, ni $g \leqslant f$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque On écrit aussi $g \geqslant f$ au lieu de $f \leqslant g$. On définit également la relation $<$ sur $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ par

$$\forall (f,g) \in \mathcal{A}(D,\mathbb{R})^2 \quad \Big(f < g \Longleftrightarrow \big(\forall x \in D \quad f(x) <_{\mathbb{R}} g(x)\big)\Big)$$

et on écrit aussi $g > f$ au lieu de $f < g$.

13.1.2 Monotonicité, parité et périodicité

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est ***paire*** si[6] : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$.
La représentation graphique d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

On dit que f est ***impaire*** si[6] : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$.
La représentation graphique d'une fonction impaire admet l'origine du repère comme axe de symétrie.

On dit que f est ***périodique*** s'il existe un réel T strictement positif tel que[7]

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x).$$

On appelle ***période*** (fondamentale) de f le plus petit réel T strictement positif, s'il existe[8], satisfaisant la relation précédente.

---

[5] La définition d'une relation d'ordre total est donnée en page 89.

[6] Ces définitions se généralisent à une application définie sur un intervalle de centre 0 de la forme $]-b,b[, b \in \mathbb{R}_+^*$ et à une application définie sur un ensemble de la forme $\mathbb{R}\backslash]-b,b[, b \in \mathbb{R}_+^*$.

[7] Cette définition s'étend à une application définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in D \Longrightarrow x+T \in D)$.

[8] Une fonction périodique n'admet pas nécessairement de période fondamentale. Considérons l'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Elle est périodique puisque si r est un rationnel alors d'une part pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $x+r \in \mathbb{Q}$ et $f(x+r) = 1 = f(x)$ et d'autre part pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $x+r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x+r) = 0 = f(x)$. Par contre elle n'admet pas de période (fondamentale) puisque la borne inférieure de l'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$ est 0.

Copyrighted material

Exemples

1. La fonction sinus est impaire et périodique de période 2π.
2. La fonction cosinus est paire et périodique de période 2π.

Exercice 1 *Montrer que l'application* $x \in \mathbb{R} \longmapsto x - E(x)$ *est périodique de période* 1.

Soient D un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est ***croissante*** sur D si

$$\forall\ (x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\big).$$

On dit que f est ***strictement croissante*** sur D si

$$\forall\ (x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\big).$$

On dit que f est ***décroissante*** sur D si

$$\forall\ (x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)\big).$$

On dit que f est ***strictement décroissante*** sur D si

$$\forall\ (x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\big).$$

On dit que f est ***monotone*** sur D si f est croissante sur D ou si f est décroissante sur D, autrement dit si

$$\Big(\forall\ (x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\big)\Big)$$
$$\text{ou} \qquad \Big(\forall\ (x_1, x_2) \in D^2 \quad \big(x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)\big)\Big).$$

ATTENTION La place des quantificateurs est extrêmement importante. Ainsi l'assertion

$$\forall\ (x_1, x_2) \in D^2 \quad \Big(\begin{array}{ll} \big(x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\big) & \text{ou} \\ \big(x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)\big) & \Big) \end{array}$$

est vraie pour toute application définie sur D et ne traduit pas le fait que f est monotone sur D.

On dit que f est ***strictement monotone*** sur D si f est strictement croissante sur D ou si f est strictement décroissante sur D.

Copyrighted material

Remarque La négation de l'assertion f n'est pas monotone sur D est : « f n'est pas croissante sur D et f n'est pas décroissante sur D ». En termes de quantificateurs cette négation s'écrit :

$$\big(\exists (x_1, x_2) \in D^2 \quad (x_1 \leqslant x_2 \text{ et } f(x_1) > f(x_2))\big)$$

et

$$\big(\exists (x_1', x_2') \in D^2 \quad (x_1' \leqslant x_2' \text{ et } f(x_1') < f(x_2'))\big)\,.$$

Ainsi l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x\,(x-2)$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\big(-1 \leqslant 0 \text{ et } f(-1) > f(0)\big) \quad \text{et} \quad \big(1 \leqslant 3 \text{ et } f(1) < f(3)\big).$$

Exemple La fonction sinus est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. En effet, quels que soient $x_1, x_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ avec $x_1 < x_2$, on a (voir la section 4.5.1 en page 154)

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)$$

avec $(x_2 - x_1)/2 \in]0, \pi/2]$ et $(x_2 + x_1)/2 \in]-\pi/2, \pi/2[$. La fonction cosinus est strictement positive sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et la fonction sinus est strictement positive sur $]0, \pi/2]$. On en déduit que

$$\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) > 0$$

puis que $\sin x_2 > \sin x_1$. D'après la définition, cela permet de conclure que la fonction sinus est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Exercice 2 *En s'inspirant de l'exemple précédent, montrer que la fonction cosinus est strictement décroissante sur* $[0, \pi]$.

Proposition 13.4

✗ *La somme de 2 applications paires (resp. impaires) est une application paire (resp. impaire). Le produit de 2 applications paires ou de 2 applications impaires est une application paire. Le produit d'une application paire et d'une application impaire est une application impaire.*

✗ *La somme et le produit de 2 applications périodiques de période T est une une application périodique de période T.*

✗ *La somme de 2 applications croissantes (resp. décroissantes) est une application croissante (resp. décroissante).*

Démonstration Ces propriétés se démontrent sans difficulté en revenant aux définitions. La rédaction de la démonstration est laissée en exercice. □

Copyrighted material

ATTENTION Le produit de 2 applications monotones n'est pas nécessairement une application monotone. Par exemple, l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x(x-2)$ est le produit des deux applications croissantes suivantes : $g_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto x$ et $g_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto x-2$ mais n'est pas monotone, comme cela a été indiqué à la remarque précédente.

Proposition 13.5 *Soient f et g deux applications définies sur $\mathbb{R}$.*

✗ *Si f est périodique de période T alors $g \circ f$ est une application périodique de période T.*

✗ *Si f est croissante (resp. décroissante) et g est croissante (resp. décroissante) alors $g \circ f$ est une application croissante.*

✗ *Si f est croissante (resp. décroissante) et g est décroissante (resp. croissante) alors $g \circ f$ est une application décroissante.*

✗ *Si f est paire alors $g \circ f$ est une application paire (sans hypothèse sur la parité g). Si f est impaire et g est paire (resp. impaire) alors $g \circ f$ est paire (resp. impaire).*

Démonstration Ces propriétés se démontrent en revenant aux définitions. Ainsi, si f est périodique de période T, alors pour toute application g définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(g \circ f)(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Donc $g \circ f$ est une application périodique de période T. Les autres propriétés sont à vérifier en exercice. □

13.1.3 Applications bornées

On dit que $f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ est ***majorée*** sur D si : $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in D \quad f(x) \leqslant M$. On appelle alors ***borne supérieure de*** f sur D et on note[9] $\sup_{x \in D} f(x)$ la borne supérieure de l'image de D par f. On a donc

$$\sup_{x \in D} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in D\} = \sup f(D).$$

Rappelons les propriétés de la borne supérieure (voir la proposition 3.2 p. 95) :

1. $\forall x \in D \quad f(x) \leqslant \sup_{t \in D} f(t)$,
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in D \quad f(x) > \sup_{t \in D} f(t) - \varepsilon$.

On dit que $f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ est ***minorée*** sur D si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geqslant m$. On appelle alors ***borne inférieure de*** f sur D et on note $\inf_{x \in D} f(x)$ la borne inférieure de l'image de D par f. On a donc

$$\inf_{x \in D} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in D\} = \inf f(D).$$

[9] La variable x est une variable muette et on peut tout aussi bien écrire $\sup_{t \in D} f(t)$.

Copyrighted material

Rappelons les propriétés de la borne inférieure (voir la proposition 3.2 p. 95) :

1. $\forall x \in D \quad f(x) \geqslant \inf_{t\in D} f(t)$,
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in D \quad f(x) > \inf_{t\in D} f(t) + \varepsilon$.

On dit que $f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ est ***bornée*** sur D si elle est à la fois majorée sur D et minorée sur D. Autrement dit, f est bornée sur D si

$$\exists K \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leqslant K.$$

On dit que $f \in \mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ est bornée en $x_0 \in D$ si f est bornée sur un voisinage de x_0.

Exemple L'application $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 1/x$ n'est pas bornée en 0. Pour le prouver, raisonnons par l'absurde. Considérons un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et supposons que f soit bornée sur $\mathcal{V}$. Dans ce cas,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad |f(x)| = |1/x| \leqslant M.$$

On déduit de l'inégalité $|1/x| \leqslant M$ que $|x| \geqslant 1/M$, ce qui implique que

$$x \in E =]-\infty, 1/M] \cup [1/M, +\infty[.$$

Cela contredit le fait que $x \in \mathcal{V}$ car E n'est pas un voisinage de 0.

Proposition 13.6 *Soient f et g deux applications définies sur D.*

✗ *Si f et g sont majorées sur D et si $f \leqslant g$ sur D alors,*

$$\sup_{x\in D} f(x) \leqslant \sup_{x\in D} g(x).$$

✗ *Si f et g sont minorées sur D et si $f \leqslant g$ sur D alors,*

$$\inf_{x\in D} f(x) \leqslant \inf_{x\in D} g(x).$$

✗ *f est minorée si et seulement si $(-f)$ est majorée et on a alors,*

$$\inf_{x\in D} f(x) = -\sup_{x\in D}(-f(x)).$$

Démonstration Ces propriétés se démontrent en revenant à la définition de la borne supérieure d'une fonction et en utilisant les propriétés de la borne supérieure d'un ensemble. Démontrons la première de ces relations ; les deux autres sont à vérifier en exercice.

Pour tout $x \in D$ on a d'après les hypothèses : $f(x) \leqslant g(x)$ et par définition de la borne supérieure : $g(x) \leqslant \sup_{t\in D} g(t)$. On en déduit que $\sup_{t\in D} g(t)$ est un majorant de $f(D)$. Comme $\sup_{t\in D} f(t)$ est le plus petit des majorants de $f(D)$ on a nécessairement : $\sup_{t\in D} f(t) \leqslant \sup_{t\in D} g(t)$. □

Copyrighted material

Hidden page

On désigne par $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ qui sont bornées sur D. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$. Pour $f \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)|$.

Proposition 13.8 *Pour $f, g \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :*

1. $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$;
2. $\|\lambda \cdot f\|_\infty = |\lambda|\ \|f\|_\infty$;
3. $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$;
4. $\|f \times g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \times \|g\|_\infty$.

Démonstration ces propriétés se démontrent en revenant à la définition de $\|f\|_\infty$ et en utilisant les propriétés de la valeur absolue. Montrons la quatrième de ces relations. On a

$$\|f \times g\|_\infty = \sup_{x\in D}\big(|f \times g|(x)\big) = \sup\{|f(x) \times g(x)| \ \mid x \in D\}.$$

Or pour tout $x \in D$, $|f(x) \times g(x)| = |f(x)| \times |g(x)|$ et

$$0 \leqslant |f(x)| \leqslant \sup_{t\in D} |f(t)|, \qquad 0 \leqslant |g(x)| \leqslant \sup_{t\in D} |g(t)|.$$

On en déduit que $|f(x)\times g(x)| \leqslant \left(\sup_{t\in D} |f(t)|\right) \times \left((\sup_{t\in D} |g(t)|\right)$ et par conséquent $\sup_{t\in D} |f(t)| \times \sup_{t\in D} |g(t)|$ est un majorant de l'ensemble $\{|f \times g|(x) \mid x \in D\}$. Comme la borne supérieure de cet ensemble est, par définition, le plus petit des majorants, on a nécessairement

$$\sup_{x\in D} (|f \times g|(x)) \leqslant \left(\sup_{x\in D} |f(x)|\right) \times \left((\sup_{x\in D} |g(x)|\right)$$

autrement dit $\|f \times g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \times \|g\|_\infty$. □

Remarque Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur le corps des réels. Toute application $N : e \in \mathcal{E} \longmapsto N(e) \in \mathbb{R}^+$ vérifiant les 3 premières conditions de la proposition 13.8, à savoir : pour tout $(e,e') \in \mathcal{E}^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $N(e) = 0 \iff e = 0$,
2. $N(\lambda\,.\,e) = |\lambda|\ N(e)$,
3. $N(e+e') \leqslant N(e) + N(e')$,

est appelée une ***norme*** sur $\mathcal{E}$. Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un ***espace vectoriel normé***. À toute norme sur un espace vectoriel $\mathcal{E}$, on peut

Copyrighted material

associer une distance[10] d de la manière suivante :

$$d : (e, e') \in \mathcal{E}^2 \longmapsto N(e - e') \in \mathbb{R}^+.$$

À l'instar de la distance euclidienne dans le plan ou dans l'espace, cette distance sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ permet de mesurer l'écart entre deux éléments e et e' de $\mathcal{E}$. Nous verrons par la suite que l'on peut munir certains sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ de différentes normes.

13.2 Limites

13.2.1 Définitions

Définition 13.2 *Soient D un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point adhérent*[11] *à D. On dit que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour limite le réel ℓ en x_0 si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(\big(x \in D \ \text{ et } \ |x - x_0| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \Big).$$

Exemples

1. Considérons l'application $f : x \in]-1, 1[\longmapsto 2x/(x+2)$ et montrons qu'elle a pour limite 0 en 0. Pour $x \in]-1, 1[$ on a $1 \leqslant 2 + x \leqslant 3$ et par conséquent la majoration

$$|f(x)| \leqslant 2|x| \qquad \forall x \in]-1, 1[.$$

Pour tout réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la quantité $|f(x) - 0|$ peut être rendue plus petite que ε en prenant x tel que $2|x| \leqslant \varepsilon$. On a ainsi établi que pour tout réel strictement positif ε, on peut trouver un réel strictement positif η (par exemple $\eta = \varepsilon/2$) tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Big(\big(x \in]-1, 1[\ \text{ et } \ |x| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow |f(x) - 0| \leqslant \varepsilon \Big).$$

Cela permet de conclure que f admet 0 pour limite en 0.

2. L'application $S : x \in]0, +\infty[\longmapsto 1$ admet pour limite 1 en 0 puisque pour tout réel strictement positif ε, on peut trouver un réel strictement positif η (par exemple $\eta = \varepsilon$) tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Big(\big(x \in]0, +\infty[\ \text{ et } \ |x| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow |S(x) - 1| = 0 \leqslant \varepsilon \Big).$$

---

[10] La définition d'une distance est donnée en page 104.

[11] Pour la définition d'un point adhérent à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, voir la définition 3.13 en page 112. On rappelle que l'on note $\overline{D}$ l'adhérence de l'ensemble D, c'est-à-dire l'ensemble des points adhérents à D.

Copyrighted material

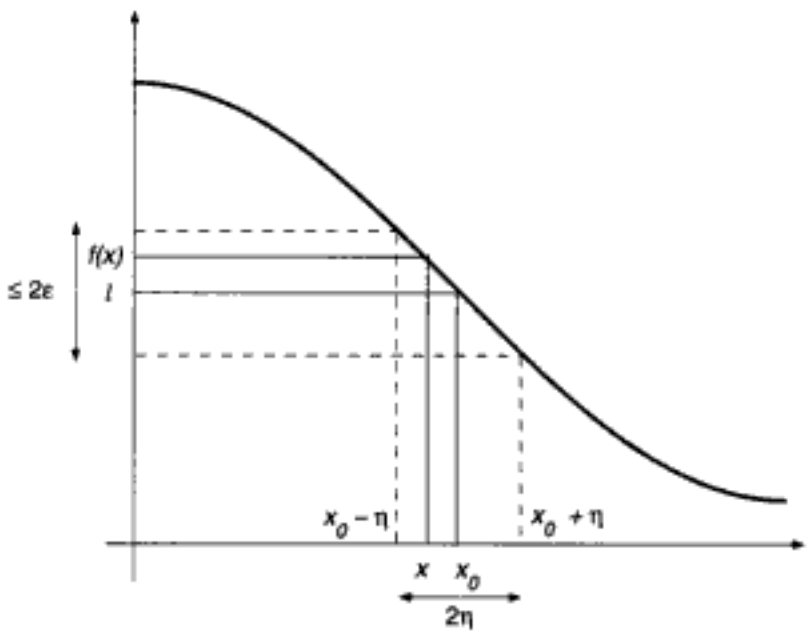


Fig. 1 Illustration de l'assertion « l'application f admet pour limite ℓ en x_0 » : pour tout réel strictement positif ε, on peut trouver un réel strictement positif η tel que $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$.

Remarque Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. D'après la définition 13.2, l'application f de D dans $\mathbb{R}$ n'admet pas le réel ℓ pour limite en x_0 si

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |f(x) - \ell| > \varepsilon\big).$$

L'application f de D dans $\mathbb{R}$ n'admet pas de limite réelle en x_0 si

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in D \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |f(x) - \ell| > \varepsilon\big).$$

Exemple L'application

$$S : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

n'admet pas de limite en 0 (fig. 2). En effet, d'une part pour tout réel ℓ non nul, il existe un réel strictement positif ε (par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell|$) tel que

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in \mathbb{R} \qquad \big(|x - 0| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |S(x) - \ell| = |\ell| > \varepsilon\big)$$

(par exemple $x = 0$ convient). Ainsi, S n'admet pour limite en 0 aucun réel non nul. Et d'autre part $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$) tel que

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in \mathbb{R} \qquad \big(|x - 0| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |S(x)| = 1 > \varepsilon\big)$$

Copyrighted material

(par exemple $x = \eta$ convient) donc S n'admet pas non plus 0 pour limite en 0.

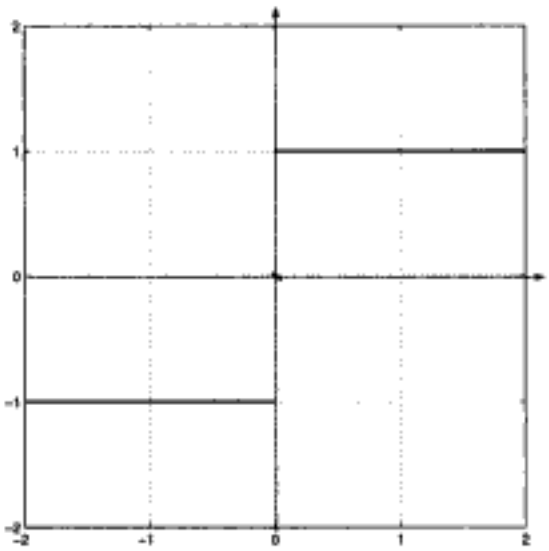


Fig. 2 Représentation graphique de la fonction signe S.

ATTENTION La notion de limite pour une application donnée est étroitement liée à l'ensemble de départ de l'application considérée. Ainsi dans l'exemple précédent l'application S de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'a pas de limite en 0. Par contre l'application S_+ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie comme la restriction de S à $]0, +\infty[$ admet 1 pour limite en 0 et l'application S_- de $]-\infty, 0]$ dans $\mathbb{R}$ définie comme la restriction de S à $]-\infty, 0[$ admet -1 pour limite en 0 (voir la fig. 2).

Proposition 13.9 *Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. Si l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet une limite ℓ en x_0 alors cette limite est unique.*

Démonstration Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'application f admette 2 limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| > 0$. D'après la définition de la limite, on a d'une part,

$$\exists \eta_1 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(\big(x \in D \ \text{ et } \ |x - x_0| \leqslant \eta_1\big) \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon \Big)$$

et d'autre part,

$$\exists \eta_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(\big(x \in D \ \text{ et } \ |x - x_0| \leqslant \eta_2\big) \Longrightarrow |f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon \Big).$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Pour $n \geqslant N$ on a $|u_n - x_0| \leqslant \eta$ donc $|f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

autrement dit la suite de terme général $f(u_n)$ tend vers ℓ.

$\trianglerighteq$ Pour montrer la réciproque, raisonnons par l'absurde. Supposons que pour toute suite réelle $(u_n)_n$ convergeant vers x_0 la suite de terme général $f(u_n)$ tend vers ℓ et que f n'admet pas pour limite ℓ en x_0. Montrons que l'on aboutit alors à une contradiction. La négation de l'assertion « f admet pour limite ℓ en x_0 » s'écrit :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \exists x_\eta \in \mathbb{R} \ \big(x_\eta \in D \ \text{ et } \ |x_\eta - x_0| \leqslant \eta \ \text{ et } \ |f(x_\eta) - \ell| > \varepsilon\big).$$

Pour cet ε, en prenant pour η des valeurs de la forme $1/n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in D \ \big(|x_n - x_0| \leqslant 1/n \ \text{ et } \ |f(x_n) - \ell| > \varepsilon\big).$$

On dispose donc d'une suite $(x_n)_n$ qui converge[15] vers x_0 mais pour laquelle la suite de terme général $f(x_n)$ ne converge[16] pas vers ℓ. C'est en contradiction avec nos hypothèses. □

Remarques

1. La proposition 13.11 se généralise au cas des limites en $\pm\infty$: une condition nécessaire et suffisante pour que l'application f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) admette pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) est que pour toute suite réelle $(u_n)_n$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) la suite de terme général $f(u_n)$ tend vers ℓ.

2. De la proposition 13.11, on déduit que si l'on trouve une suite $(u_n)_n$ qui tend vers x_0 et pour laquelle la suite de terme général $f(u_n)$ diverge alors la fonction f n'a pas de limite (finie) en x_0.

3. On peut également prouver que la fonction f n'a pas de limite en x_0 en exhibant deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergeant toutes les deux vers x_0 mais pour lesquelles les suites de terme général $f(u_n)$ et $f(v_n)$ tendent vers deux réels distincts.

Exemple L'application $f : x \in]-1,0[\cup]0,1[\longmapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0. En effet, la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 1/(n\pi)$ converge vers 0 mais la suite de terme général $f(u_n)$ diverge puisque $f(u_n) = (-1)^n$.

Exercice 6 *Montrer que l'application* $f : x \in]-1,0[\cup]0,1[\longmapsto \sin(1/x)$ *n'a pas de limite en* 0.

---

[15] Cela résulte du théorème 5.1, page 179, puisque l'on a $x_0 - 1/n \leqslant x_n \leqslant x_0 + 1/n$.

[16] Voir la définition 5.1, page 168, de la divergence d'une suite.

Copyrighted material

Théorème 13.1 (d'encadrement) *Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. Soient f, g_1, g_2, trois applications de D dans $\mathbb{R}$. On suppose que g_1 et g_2 admettent pour limite en x_0 les réels ℓ_1 et ℓ_2.*

✗ *Si pour tout $x \in D$ on a $\big(g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)\big)$ et si f admet une limite en x_0 alors,*

$$\ell_1 \leqslant \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) \leqslant \ell_2.$$

✗ *Si pour tout $x \in D$ on a $\big(g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)\big)$ et si $\ell_1 = \ell_2$ alors, f admet une limite en x_0 et*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = \ell_1.$$

Démonstration ⊵ Soit $(u_n)_n$ une suite de D convergeant vers $x_0 \in \overline{D}$. D'après les hypothèses on a pour tout entier n,

$$g_1(u_n) \leqslant f(u_n) \leqslant g_2(u_n).$$

D'après la proposition 13.11, puisque f admet une limite ℓ en x_0, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers ℓ. De même, puisque g_1 et g_2 admettent pour limite en x_0 les réels ℓ_1 et ℓ_2, on a

$$\lim_{n \to +\infty} g_1(u_n) = \ell_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} g_2(u_n) = \ell_2.$$

D'après le théorème 5.1, page 179, on en déduit que

$$\ell_1 \leqslant \ell \leqslant \ell_2.$$

⊵ Supposons que $\ell_1 = \ell_2$. D'après ce qui précède, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers ℓ_1. Ce résultat est acquis pour toute suite $(u_n)_n$ convergeant vers x_0. D'après la proposition 13.11 on en déduit d'une part que f admet une limite en x_0 et d'autre part que cette limite est ℓ_1. □

Remarques

1. On peut énoncer un résultat analogue au théorème d'encadrement dans le cas des limites en $+\infty$ et $-\infty$.

2. On se convaincra que l'hypothèse « f admet une limite en x_0 » est indispensable dans le premier énoncé, mais ne l'est plus dans le second en lisant attentivement la démonstration de la proposition.

Exemple Soit $x \in]0, \pi/2[$ la mesure en radian[17] d'un angle de sommet O (voir la figure ci-contre) et $\mathcal{C}$ le cercle centré en O de rayon $R = OA = 1$.

[17] On appelle radian l'unité d'angle telle que la mesure de l'angle plat soit π. Dans ce cours, tout les angles sont mesurés en radians.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

On a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = 1.$$

D'après la proposition 13.12 on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \text{autrement dit que} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Exercice 7 *Soient f et g deux applications définies sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. On suppose que f admet pour limite ℓ en x_0 et g admet pour limite ℓ' en x_0 avec ℓ et ℓ'.*
1 - Montrer, en utilisant la définition 13.2, que pour tout $x \in D$ on a

$$|f(x)g(x) - \ell\ell'| \leqslant |f(x) - \ell|\,|g(x) - \ell'| + |\ell'|\,|f(x) - \ell| + |\ell|\,|g(x) - \ell'|.$$

2 - En déduire que l'application $f \times g$ admet pour limite $\ell\ell'$ en x_0 (on s'inspirera de la démonstration qui précède).

Proposition 13.13 (Cas des limites infinies) *Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D. Soient f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$.*

1. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *alors*

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = +\infty.$$

2. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ *alors*

$$\lim_{x\to x_0} (f\times g)(x) = +\infty.$$

3. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$ *alors*

$$\lim_{x\to x_0} (f\times g)(x) = -\infty.$$

4. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *avec* $\ell \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0.$$

Démonstration Ce résultat est admis. Il se démontre d'une manière semblable à la proposition 13.12. □

Le résultat de la proposition 13.13 reste exact si $x_0 = +\infty$ ou si $x_0 = -\infty$.

Copyrighted material

ATTENTION On ne peut absolument rien conclure de manière générale en ce qui concerne les fonctions qui n'ont pas de limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$). Par exemple les fonctions

$$f : x \longmapsto \sin x \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto 1 + \sin x$$

n'ont pas de limite en $+\infty$. La fonction $f+g$ n'a pas non plus de limite en $+\infty$ mais la fonction $f-g$ admet pour limite 1 en $+\infty$. Par ailleurs, si f admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en x_0 et g n'admet pas de limite en x_0, alors les fonctions $f+g$ et $f \times g$ n'ont pas de limite en x_0.

On peut résumer les propriétés qui ont été énoncées sous forme de tableaux. Le tableau suivant indique la limite éventuelle de la fonction $f+g$ en fonction de la limite des fonctions f et g. On écrit IND pour *forme indéterminée* lorsque les hypothèses ne permettent pas de conclure.

$f + g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Le tableau suivant indique la limite éventuelle de la fonction $f \times g$ en fonction de la limite des fonctions f et g.

$f \times g$	$\ell' > 0$	$\ell' = 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$	0	0	0	IND	IND
$\ell < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	IND	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	IND	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Le tableau suivant indique la limite éventuelle de la fonction f/g en fonction de la limite des fonctions f et g.

Copyrighted material

f / g	$\ell' > 0$	$\ell' = 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	ℓ/ℓ'	IND $(\pm\infty)$	ℓ/ℓ'	0	0
$\ell = 0$	0	IND	0	0	0
$\ell < 0$	ℓ/ℓ'	IND $(\pm\infty)$	ℓ/ℓ'	0	0
$+\infty$	$+\infty$	IND $(\pm\infty)$	$-\infty$	IND	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND $(\pm\infty)$	$+\infty$	IND	IND

ATTENTION Les seules méthodes valables pour le calcul de limites sont celles qui découlent de manière directe de l'utilisation de l'une des règles énoncées dans cette section. Tout calcul utilisant un résultat autre que ceux énoncés dans le cours doit faire l'objet d'une justification. Il existe de nombreuses méthodes de raisonnement incorrectes qui permettent d'obtenir la bonne valeur de la limite. Bien entendu le calcul est alors sans valeur.

Proposition 13.14 (limite de la composée de 2 applications)
Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, x_0 un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f une application de D dans $\mathbb{R}$, D' un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que $f(D) \subset D'$ et g une application de D' dans $\mathbb{R}$. Si f admet pour limite y_0 en x_0 et si g admet pour limite ℓ en y_0 alors $g \circ f$ admet pour limite ℓ en x_0.

Démonstration Ce résultat est admis. □

Le résultat de la proposition 13.14 reste exact si $x_0 = +\infty$ ou si $x_0 = -\infty$.

Un cas particulier important de la proposition 13.14 est celui où $D \subset D'$ et où f est l'injection canonique de D dans D'. Dans ce cas $g \circ f$ est la restriction de g à l'ensemble D. D'après la proposition 13.14 si g admet pour limite ℓ en $x_0 \in \overline{D}$ alors l'application $g|_D$ admet également pour limite ℓ en x_0. La réciproque est bien entendu fausse.

Exemple Soient $D =]0, +\infty[$, $D' = \mathbb{R}$ et $g : x \in D' \longmapsto x^2$. On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in D'}} g(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g|_D(x) = 0$.

Sous ces mêmes hypothèses, supposons maintenant que x_0 soit un point d'accumulation de D' et que $D = D' \setminus \{x_0\}$. Si l'application $g|_D$ admet pour limite ℓ en x_0 sans que g ait une limite en x_0 on note

$$\ell = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x).$$

Copyrighted material

Exemple L'application $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ n'a pas de limite en 0 mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 0$.

On remarquera que si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = \ell$ et si $g(x_0) = \ell$ alors g a pour limite ℓ en x_0.

Supposons à présent que x_0 est un point d'accumulation de $D = D' \cap]x_0, +\infty[$. Si l'application $g|_D$ admet pour limite ℓ en x_0 on note

$$\ell = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} g(x) \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_{x \to x_0^+} g(x)$$

et on dit que $g|_D$ admet ℓ pour limite à droite en x_0. De la même manière si x_0 est un point d'accumulation de $D = D' \cap]-\infty, x_0[$ et si l'application $g|_D$ admet pour limite ℓ en x_0 on note

$$\ell = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} g(x) \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_{x \to x_0^-} g(x)$$

et on dit que $g|_D$ admet ℓ pour limite à gauche en x_0.

Exemple L'application $g : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto x/|x|$ admet -1 pour limite à gauche en 0 et 1 pour limite à droite en 0.

On remarquera que si g admet le réel ℓ pour limite à gauche et à droite en x_0 et si $g(x_0) = \ell$ alors g admet pour limite ℓ en x_0. On peut définir à l'aide d'une assertion quantifiée les notions de limite à gauche et de limite à droite.

Définition 13.3 *Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à D.*

✗ *On dit que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour* ***limite à droite*** *le réel ℓ en x_0 si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Big((x \in D \ \text{ et } \ 0 < x - x_0 \leqslant \eta) \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \Big).$$

✗ *On dit que l'application f de D dans $\mathbb{R}$ admet pour* ***limite à gauche*** *le réel ℓ' en x_0 si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Big((x \in D \ \text{ et } \ 0 < x_0 - x \leqslant \eta) \Longrightarrow |f(x) - \ell'| \leqslant \varepsilon \Big).$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0;\qquad \lim_{x\to0^+}x\ln x=0;\qquad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty;\qquad \lim_{x\to-\infty}x\,e^x=0;\qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Exercice 9 *Étudier la limite éventuelle des fonctions suivantes :*

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$ *en* $+\infty$
2. $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}$ *en* $+\infty$
3. $f(x)=\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin 2x}$ *en* 0
4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$ *en* 5
5. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-x}$ *en* 0
6. $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$ *en* $+\infty$
7. $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ *en* $+\infty$
8. $f(x)=\sin x\ \ln x$ *en* 0

13.3 Continuité

13.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 13.4 *Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0\in I$.*

✗ *On dit que f est continue en x_0 si f admet pour limite*[19] *$f(x_0)$ en x_0, autrement dit si*

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*\ \exists\eta_\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*\ \forall x\in I\quad\big(|x-x_0|\leqslant\eta_\varepsilon\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon\big).$$

✗ *On dit que x_0 est un* **point de discontinuité** *pour f si f n'est pas continue en x_0, c'est-à-dire si*[20]

$$\exists\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*\ \forall\eta\in\mathbb{R}_+^*\ \exists x\in I\quad\big(|x-x_0|\leqslant\eta\quad\text{et}\quad|f(x)-f(x_0)|>\varepsilon\big).$$

✗ *On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en x_0 pour tout $x_0\in I$. On note $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ continues sur I.*

[19] Ou encore : « si f admet une limite en x_0 », cette limite étant nécessairement $f(x_0)$.
[20] On notera que cette assertion quantifiée est la négation de la précédente.

Copyrighted material

Exemples

1. Montrons que l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soient x_0 un réel, η un réel strictement positif et $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. On a

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| \leqslant \eta|x + x_0| \leqslant \eta(2|x_0| + \eta).$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Pour que l'assertion

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon),$$

soit vraie, il suffit de prendre η tel que $\eta(2|x_0| + \eta) \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire $\eta \leqslant \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$.

2. L'application Signe définie par $S(x) = -1$ si $x < 0$, $S(0) = 0$ et $S(x) = 1$ si $x > 0$ (voir la fig. 2 en page 571) n'est pas continue en $x_0 = 0$. En effet $|f(x) - f(0)| = 1$ pour tout réel x non nul. Ainsi en prenant $\varepsilon = 1/2$; pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $x \in \mathbb{R}$ (par exemple $x = \eta/2$) tel que

$$|x| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(0)| = 1 > \varepsilon.$$

Par contre, cette application est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

3. La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$. En effet si x_0 et x sont deux réels, on a

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}$$

donc[21] : $|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2 \left|\sin \dfrac{x - x_0}{2}\right| \leqslant |x - x_0|$.

Par conséquent, pour tout réel strictement positif ε, il existe un réel strictement positif η (il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$) tel que pour tout réel x,

$$|x - x_0| \leqslant \eta \implies |\sin x - \sin x_0| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques

1. Un réel x_0 est qualifié de point de discontinuité de première espèce de f, s'il est point de discontinuité de f et si f admet une limite (finie) à gauche en x_0 et une limite (finie) à droite en x_0. Les autres points de discontinuité sont qualifiés de points de discontinuité de seconde espèce.

2. Graphiquement le fait que f soit une application continue sur l'intervalle I d'extrémités a et b se traduit par le fait que la représentation graphique de f joint les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ sans interruption dans le tracé.

Exercice 10 *Montrer que la fonction cosinus est continue sur* $\mathbb{R}$.

---

[21] On rappelle que pour tout réel t on a $|\sin t| \leqslant |t|$.

Copyrighted material

Définition 13.5 *Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

✗ *On dit que f est* **continue à gauche** *en $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*

autrement dit si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in I \quad (0 < x_0 - x \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

✗ *On dit que f est* **continue à droite** *en $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$*

autrement dit si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in I \quad (0 < x - x_0 \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

Remarque Il résulte des propriétés des limites que l'application f est continue à droite en x_0 et continue à gauche en x_0 si et seulement si f est continue en x_0.

Exemples

1. L'application $f : x \in [-\pi, \pi] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue à droite en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|\sin x|}{x} = 1$. Elle n'est pas continue à gauche puisque $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|\sin x|}{x} = -1$. Par ailleurs, elle est continue à droite en $-\pi$ puisque

$$\lim_{x \to -\pi^+} \frac{|\sin x|}{x} = 0 = f(-\pi)$$

et continue à gauche en π puisque

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{|\sin x|}{x} = 0 = f(\pi).$$

L'application f est continue sur $[-\pi, 0[$ et sur $[0, \pi]$.

2. L'application $x \in]-\pi/2, \pi/2[\longmapsto \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue à droite en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tan x}{x} = 1$. Elle est également continue à gauche puisque $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\tan x}{x} = 1$. On en déduit que cette application est continue en 0.

Proposition 13.15 *Soient f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 alors f est bornée sur (l'intersection de I avec) un voisinage de x_0 .*

Démonstration Ce résultat découle de la proposition 13.10. □

Copyrighted material

Exemple L'application $x \in]0,+\infty[\longmapsto 1/x \in \mathbb{R}$ n'est pas continue en 0 car elle n'est pas bornée en 0 (voir exemple p. 566).

Proposition 13.16 *Soient f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors f ne s'annule pas dans un voisinage de x_0.*

Démonstration L'application f est continue en x_0 donc d'après la définition,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in I \quad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Prenons $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$. Il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in I \quad \left(|x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{|f(x_0)|}{2}\right).$$

Soit $\mathcal{V} = I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$; il s'agit d'un voisinage de x_0. Pour $x \in \mathcal{V}$, en utilisant la seconde inégalité triangulaire, on obtient

$$|f(x_0)| - |f(x)| \ \leqslant \ \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \ \leqslant \ |f(x) - f(x_0)| \ \leqslant \ \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

On en déduit que pour $x \in \mathcal{V}$ on a $|f(x)| \geqslant \dfrac{|f(x_0)|}{2} > 0$, autrement dit que f ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$, voisinage de x_0. □

Proposition 13.17 *Soient f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. L'application f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite réelle $(u_n)_n$ d'éléments de I convergeant vers x_0, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$.*

Démonstration Ce résultat découle de la proposition 13.11. □

Exemple Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

L'application f n'est continue en aucun point. Pour le vérifier, raisonnons par l'absurde.

⊵ Supposons que f est continue en $x_0 \in \mathbb{Q}$ et considérons une suite[(22)] $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui converge vers x_0. La suite de terme général $f(u_n)$

[(22)] Une telle suite existe car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, voir la proposition 3.15, page 109.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Corollaire 13.1 *Soient f une application définie au voisinage de x_0 et g une application définie au voisinage de $y_0 = f(x_0)$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et si g est continue en y_0 alors $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$.*

Exemple Puisque $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et que la fonction exponentielle est continue en 1 on en déduit que $\lim_{x \to 0} \exp\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = e$.

13.3.3 Continuité sur un intervalle

BOLZANO, Bernhard (1781, Prague - 1848, Prague).

Après des études de théologie et de mathématiques, Bolzano est ordonné prêtre en 1805. Professeur de sciences de la religion, il consacre son temps libre à l'étude des mathématiques. Bolzano s'est intéressé à la logique mathématique et à une refonte rigoureuse de la théorie des fonctions d'une variable réelle où il définit et distingue clairement les concepts de continuité et de dérivabilité. Bolzano donna avant Weierstrass, par une construction géométrique, un exemple de fonction continue en tout point, dérivable en aucun point. Il s'intéressa également, avant Cantor, aux propriétés des ensembles infinis. En 1817, il publia dans son premier ouvrage une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires sans avoir recours aux « évidences géométriques » comme c'était le cas auparavant.

Dans cette section a et b désignent deux réels tels que $a < b$. On rappelle qu'une application est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, si elle est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et qu'elle est continue à droite en a et à gauche en b.

Théorème 13.3 (théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration ⊵ Supposons que $f(a) < 0$ et que $f(b) > 0$. L'ensemble

$$F = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant 0\}$$

est une partie non vide ($a \in F$) et majorée (par b) de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure c telle que $c < b$. Nous allons montrer que $f(c) = 0$.

⊵ Puisque c est borne supérieure de F, d'après la proposition 3.2 page 95,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x_\varepsilon \in F \quad c - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant c.$$

Copyrighted material

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient d'après l'assertion précédente en prenant $\varepsilon = 1/n$,

$$\exists x_n \in F \quad c - 1/n < x_n \leqslant c.$$

On en déduit par le théorème d'encadrement (théorème 5.1 p. 179) que la suite $(x_n)_n$ converge vers c. Comme f est continue en c, d'après la proposition 13.17 la suite de terme général $f(x_n)$ converge vers $f(c)$. Or pour tout entier n non nul on a $f(x_n) \leqslant 0$ puisque $x_n \in F$. On en déduit d'après le théorème 13.1 que $f(c) \leqslant 0$. Cela implique en particulier que $c < b$.

$\trianglerighteq$ Considérons la suite $(y_n)_n$ définie par $y_n = c+(b-c)/n$. Puisque $c < b$ la suite $(y_n)_n$ est strictement décroissante et converge vers c. Comme f est continue en c, d'après la proposition 13.17 la suite de terme général $f(y_n)$ converge vers $f(c)$. Puisque pour tout entier n non nul, $y_n \notin F$ on a $f(x_n) > 0$. D'après le théorème 13.1 on en déduit que $f(c) \geqslant 0$.

Finalement pour le réel c on a $f(c) \geqslant 0$ et $f(c) \leqslant 0$. Cela implique que $f(c) = 0$. Le théorème est démontré dans le cas où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

$\trianglerighteq$ Dans le cas où $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ le théorème se démontre en appliquant ce qui précède à l'application $-f$. □

Remarques

1. Le réel $c \in]a, b[$ pour lequel $f(c) = 0$ n'est pas nécessairement unique (fig. 6).

2. On peut démontrer, en utilisant une disjonction de cas, que si f est une application continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)\, f(b) \leqslant 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple Le théorème des valeurs intermédiaires est très utile pour séparer les zéros d'une fonction, étape préalable à leur calcul par une méthode d'approximation. Par exemple la fonction $f : x \longmapsto \cos x - x$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f(0) = 1$ et $f(\pi/2) = -\pi/2$, donc f admet au moins un zéro dans l'intervalle $]0, \pi/2[$.

Le théorème des valeurs intermédiaires admet la généralisation suivante (appelée théorème des valeurs intermédiaires généralisé) qui se démontre en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \gamma$.

Proposition 13.20 *Soit f une application continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) < f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$). Pour tout réel $\gamma \in [f(a), f(b)]$ (resp. $\gamma \in [f(b), f(a)]$) il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

Nous admettons le théorème suivant qui indique qu'une application continue sur un intervalle fermé et borné est bornée et atteint ses bornes.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour vérifier que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrons que

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big(|x-y| \leqslant \eta \text{ et } |x^2-y^2| > \varepsilon\big).$$

Prenons $\varepsilon = 1$, $x > 0$ et $y > x$; le couple (x,y) recherché doit alors vérifier $y - x \leqslant \eta$ et $y^2 - x^2 > 1$. Pour $y = x + \eta$ on a

$$y^2 - x^2 = 2\eta x + \eta^2 > 2\eta x$$

donc $y^2 - x^2 > 1$ si $x \geqslant \frac{1}{2\eta}$. Finalement, $\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*$ le couple $(x,y) = (\frac{1}{2\eta}, \eta + \frac{1}{2\eta})$ vérifie $|x-y| \leqslant \eta$ et $|x^2 - y^2| > 1$.

De même, on peut vérifier que l'application $x \in]0,1[\longmapsto 1/x$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

On a toutefois le résultat suivant qui indique qu'une application continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle.

Théorème 13.5 (de Heine[24]) *Une application continue sur un intervalle fermé et borné est uniformément continue sur cet intervalle.*

Démonstration Ce résultat est admis. □

Définition 13.8 *Soit f une application définie sur un intervalle I. On dit que f est* **lipschitzienne** *de rapport K sur I si*

$$\exists K \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (x,y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

On dit que f est **contractante** *sur I si f est lipschitzienne de rapport K sur I avec $K \in]0,1[$.*

Proposition 13.22 *Si f est une application lipschitzienne sur un intervalle I donné alors elle est uniformément continue sur I (et en particulier, elle est continue sur I).*

Démonstration Ce résultat est admis. On pourra consulter l'exercice 15 pour la preuve que toute application lipschitzienne sur un intervalle I est continue sur I. □

[24] HEINE, Heinrich Eduard (1821, Berlin - 1881, Paris).

Copyrighted material

Hidden page

Démonstration Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers le réel ℓ alors la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = u_{n+1}$ converge elle aussi vers ℓ. D'après la proposition 13.17, puisque la fonction f est continue en ℓ, la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$. Or les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont égales puisque pour tout entier n on a $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme il y a unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $f(\ell) = \ell$, autrement dit que ℓ est un point fixe de f. □

Proposition 13.24 *Soit f une application définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = \alpha & (\alpha \in I) \\ u_{n+1} = f(u_n) & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

✗ *Si l'application f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_n$ est monotone. Plus précisément, elle est croissante si $f(\alpha) \geqslant \alpha$ et décroissante si $f(\alpha) \leqslant \alpha$.*

✗ *Si l'application f est décroissante sur I alors la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes pairs et la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes impairs extraites de $(u_n)_n$ sont monotones de sens de variations opposés.*

Démonstration ⊵ Supposons que f est croissante sur I et vérifie $f(\alpha) \geqslant \alpha$. Montrons que la suite $(u_n)_n$ est alors croissante, c'est-à-dire montrons que pour tout entier n la quantité

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

est positive. Pour $n = 0$ c'est vrai puisque $f(\alpha) \geqslant \alpha$. Supposons que pour un entier k donné on ait $f(u_k) \geqslant u_k$ et montrons que dans ce cas aussi $f(u_{k+1}) \geqslant u_{k+1}$. On a

$$f(u_{k+1}) - u_{k+1} = f(f(u_k)) - f(u_k).$$

Par hypothèse f est croissante et $f(u_k) \geqslant u_k$; on en déduit donc que $f(f(u_k)) \geqslant f(u_k)$, c'est-à-dire que $f(u_{k+1}) \geqslant u_{k+1}$. L'assertion est donc démontrée par ce raisonnement par récurrence. Sur le même principe, on montre que si $f(\alpha) \leqslant \alpha$ alors la suite $(u_n)_n$ est décroissante (en exercice).

⊵ Désignons par $(v_n)_n$ la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes pairs extraite de la suite $(u_n)_n$. On a $v_0 = \alpha$ et pour tout entier n,

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(v_n)).$$

Notons g la fonction $f \circ f$. Puisque f est décroissante, g est croissante. En utilisant la première assertion de la proposition, on en déduit que la suite $(v_n)_n$ est monotone et que son sens de monotonie dépend du signe de $g(v_0) - v_0$.
Désignons par $(w_n)_n$ la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes pairs extraite de la suite $(u_n)_n$. On a $w_0 = f(\alpha)$ et pour tout entier n,

$$w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(w_n)) = g(w_n).$$

Copyrighted material

Hidden page

est une suite de Cauchy. Puisque $u_0 \in I$ et que $f(I) \subset I$, on vérifie aisément que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par un raisonnement par récurrence commençons par établir que pour tout entier i,

$$|u_{i+1} - u_i| \leqslant k^i |u_1 - u_0|.$$

On a $|u_1 - u_0| \leqslant k^0 |u_1 - u_0|$ et si l'on suppose la relation vraie pour un entier i donné, alors en utilisant le fait que f est contractante de rapport k on obtient,

$$|u_{i+2} - u_{i+1}| = |f(u_{i+1}) - f(u_i)| \leqslant k|u_{i+1} - u_i| \leqslant k^{i+1}|u_1 - u_0|.$$

Soient m et n deux entiers tels que $m \geqslant n$. En utilisant la première inégalité triangulaire et les propriétés des progressions géométriques, on obtient

$$\begin{aligned} |u_m - u_n| &= \left| \sum_{i=n}^{m-1} u_{i+1} - u_i \right| \leqslant \sum_{i=n}^{m-1} |u_{i+1} - u_i| \\ &\leqslant \sum_{i=n}^{m-1} k^i |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| k^n \sum_{j=0}^{m-n-1} k^j \\ &= |u_1 - u_0| k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1-k} \leqslant \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

Puisque $k \in [0, 1[$, la suite de terme général $v_n = \dfrac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$ converge vers 0. On a donc

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geqslant N \Longrightarrow |v_n| \leqslant \varepsilon\big).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \\ &\qquad \big((n \geqslant N \ \text{ et } \ m \geqslant N) \Longrightarrow |u_m - u_n| \leqslant \varepsilon\big), \end{aligned}$$

autrement dit que la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ converge vers un réel ζ qui appartient à I car I est fermé. Puisque f est une application contractante sur I, elle est continue sur I. D'après la proposition 13.23 on en conclut que ζ est un point fixe de f. □

Exemple Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8)$ où u_0 est un réel positif donné.

Il est aisé de vérifier (en utilisant par exemple un raisonnement par récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Introduisons l'application $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{1}{6}(x^2 + 8)$. On vérifie facilement que l'application f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle admet pour tableau de variation :

x	0		2		4		$+\infty$
f	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

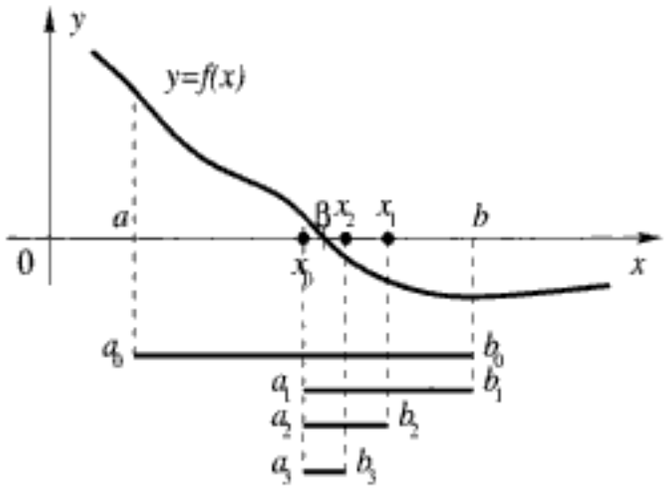


Fig. 10 Interprétation graphique de l'algorithme de dichotomie

13.5.2 Étude de la convergence

À chaque étape $n \in \mathbb{N}$, la longueur ℓ_n de l'intervalle I_n est divisée par 2. On a donc $\ell_n = \ell_{n-1}/2$ et on en déduit par récurrence que

$$\ell_n = \frac{\ell_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}.$$

Cela montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de dichotomie, converge vers β puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\beta \in I_n$, $x_n \in I_n$ et par conséquent

$$0 \leqslant |x_n - \beta| \leqslant \ell_n.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$ par le théorème d'encadrement.

En pratique, il est rarement possible d'atteindre la limite. On se fixe donc la précision ε souhaitée pour l'approximation de β (par exemple 10^{-3}) et on décide d'arrêter les itérations à l'étape n_ε si la longueur ℓ_{n_ε} de l'intervalle I_{n_ε} est inférieure à ε. Ce critère d'arrêt[26] est justifié par le fait que

$$|x_{n_\varepsilon} - \beta| \leqslant \ell_{n_\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$

Cela nous donne d'ailleurs une information *a priori* sur le nombre d'itérations n_ε à effectuer pour atteindre la précision ε. En effet, pour obtenir $|x_{n_\varepsilon} - \beta| \leqslant \varepsilon$, il faut

$$\frac{b-a}{2^{n_\varepsilon}} \leqslant \varepsilon \quad \text{autrement dit} \quad n_\varepsilon \geqslant \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right).$$

[26] Bien évidemment, il existe d'autres tests d'arrêts. Par exemple, nous pourrions décider d'interrompre les itérations dès que $f(x_{n_\varepsilon}) \leqslant \varepsilon$, ou dès que $|x_{n_\varepsilon+1} - x_{n_\varepsilon}| \leqslant \varepsilon$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

On a donc en particulier $f(\eta_1) \leqslant -1$ et $f(\eta_2) \geqslant 1$ donc $f(\eta_1)f(\eta_2) < 0$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur l'intervalle $[\eta_1, \eta_2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe un réel $c \in [\eta_1, \eta_2]$ tel que $f(c) = 0$. Le résultat est démontré.

Sur le même principe, on montre que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_2$$

avec $\ell_1 \ell_2 < 0$ alors il existe un réel c tel que $f(c) = 0$.

Solution de l'exercice 13

1 - Remarquons que puisque f est à valeurs dans $[a, b]$ on a $a \leqslant f(x) \leqslant b$ pour tout $x \in [a, b]$. On en déduit que $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et que $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. On a donc $g(a)g(b) \leqslant 0$. Procédons par disjonction de cas. Ou bien $g(a)g(b) = 0$, ou bien $g(a)g(b) < 0$. Dans le premier cas cela implique que $g(a) = 0$ ou que $g(b) = 0$, autrement dit que $f(a) = a$ ou que $f(b) = b$. Il y a existence d'un point fixe dans ce cas. Dans le second cas, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. L'application g est continue sur $[a, b]$ car f est continue sur $[a, b]$. Il existe par conséquent un réel $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$ autrement dit tel que $f(c) = c$. Dans ce cas là aussi, on a un point fixe.

2 - a) Puisque ψ est à valeurs dans $[a, b]$ on a $a \leqslant \psi(x) \leqslant b$ pour tout $x \in [a, b]$. En particulier $\psi(a) \geqslant a$, donc Ω est non vide. De plus, Ω est majoré par b. Il admet par conséquent une borne supérieure M (voir la proposition 3.2 p. 95). On a $M \geqslant a$ car $a \in \Omega$. Ou bien $\psi(b) = b$ et alors $M = b$, ou bien $\psi(b) < b$ et $M \leqslant b$ car $b \notin \Omega$. On a donc $M \in [a, b]$.

Puisque réel M est borne supérieure de Ω, on a (voir la proposition 3.2)

$$(\forall x \in \Omega \quad x \leqslant M) \quad \text{et} \quad (\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists x_\epsilon \in \Omega \quad M - \epsilon < x_\epsilon).$$

b) Pour montrer que $M \in \Omega$, raisonnons par l'absurde et supposons que $M \notin \Omega$. On a alors $\psi(M) < M$ et comme M est la borne supérieure de Ω

$$\forall x \in \Omega \quad x \leqslant M.$$

Cela implique, puisque f est croissante que

$$\forall x \in \Omega \quad x \leqslant \psi(x) \leqslant \psi(M),$$

autrement dit que $\psi(M)$ est un majorant de Ω. On a alors $\psi(M) \geqslant M$ car M est le plus petit des majorants de Ω. Ce résultat contredit l'hypothèse $\psi(M) < M$. Finalement on peut conclure que $M \in \Omega$, autrement dit que M est l'élément maximum de Ω.

c) Remarquons que puisque $M \in \Omega$ on a $\psi(M) \geqslant M$. L'application ψ étant croissante, cela implique que $\psi(\psi(M)) \geqslant \psi(M)$, autrement dit que $\psi(M) \in \Omega$. Comme M est la borne supérieure de Ω on a forcément $\psi(M) \leqslant M$. Les relations $\psi(M) \geqslant M$ et $\psi(M) \leqslant M$ permettent de conclure que $\psi(M) = M$, autrement dit que M est un point fixe de ψ.

Copyrighted material

3 - Une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$ décroissante n'admet pas nécessairement de point fixe comme le prouve le contre-exemple suivant :

$$\psi : x \in [0,1] \longmapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + 1 & \text{si } x \in [0,1/2] \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in]1/2,1] \end{cases}$$

Solution de l'exercice 14

1 - f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante sur I ou si elle est strictement décroissante sur I, autrement dit si

$$\begin{array}{cc} & \Big(\forall (x,y) \in I^2 \quad \big(x < y \implies f(x) < f(y)\big)\Big) \\ \text{ou} & \Big(\forall (x,y) \in I^2 \quad \big(x < y \implies f(x) > f(y)\big)\Big). \end{array}$$

On en déduit, en prenant la négation de cette assertion composée, que f n'est pas strictement monotone sur I si

$$\begin{array}{cc} & \Big(\exists (x,y) \in I^2 \quad \big(x < y \ \text{ et } \ f(x) \geqslant f(y)\big)\Big) \\ \text{et} & \Big(\exists (a,b) \in I^2 \quad \big(a < b \ \text{ et } \ f(a) \leqslant f(b)\big)\Big). \end{array}$$

On prend soin de distinguer les variables par des lettres distinctes car le couple (x,y) satisfaisant la première condition n'est pas nécessairement le même que celui satisfaisant la deuxième condition.

Comme f est injective, si $x \neq y$ (resp. $a \neq b$) alors $f(x) \neq f(y)$ (resp. $f(a) \neq f(b)$). Ainsi on peut affirmer que

$$\begin{array}{cc} & \Big(\exists (x,y) \in I^2 \quad \big(x < y \ \text{ et } \ f(x) > f(y)\big)\Big) \\ \text{et} & \Big(\exists (a,b) \in I^2 \quad \big(a < b \ \text{ et } \ f(a) < f(b)\big)\Big), \end{array}$$

autrement dit qu'il existe 4 réels a, b, x, y dans I avec $x < y$ et $a < b$ tels que $\big(f(x) > f(y) \ \text{ et } \ f(a) < f(b)\big)$.

2 - L'application $\Phi : \lambda \in [0,1] \longmapsto f((1-\lambda)b + \lambda y) - f((1-\lambda)a + \lambda x)$ est continue sur $[0,1]$ car f est continue sur I et pour tout $\lambda \in [0,1]$

1. le réel $(1-\lambda)b + \lambda y$ est compris entre b et y donc appartient à I ;
2. le réel $(1-\lambda)a + \lambda x$ est compris entre a et x donc appartient à I.

On a $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ et puisque Φ est continue sur $[0,1]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe un réel $\lambda_0 \in]0,1[$ tel que $\Phi(\lambda_0) = 0$.

3 - On a

$$\Phi(\lambda_0) = 0 \iff f((1-\lambda_0)b + \lambda_0 y) = f((1-\lambda_0)a + \lambda_0 x).$$

Copyrighted material

Hidden page

autrement dit

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \quad \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqslant M.$$

Soient x_1 et x_2 deux réels. Ou bien $x_1 \neq x_2$ et alors

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqslant M;$$

ou bien $x_1 = x_2$ et alors

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 0 = M|x_1 - x_2|.$$

Dans les deux cas, on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|$. L'application f est donc lipschitzienne de rapport M sur $\mathbb{R}$.

- Considérons l'application $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$. On a

$$\begin{aligned} E_g &= \left\{ \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} \Big/ \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2 \right\} \\ &= \left\{ x_1 + x_2 \ / \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2 \right\}. \end{aligned}$$

L'ensemble E_g n'est pas borné :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+ \quad \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \quad |x_1 + x_2| > M.$$

Il suffit en effet de prendre $x_1 = 1 + M/2$ et $x_2 = M/2$. On en déduit que l'application g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

3 - Soit f application lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport k.

- Si $k = 0$ l'application f est constante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent est continue sur $\mathbb{R}$.

- Supposons $k \neq 0$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Si l'on considère $\eta = \varepsilon/k$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x - x_0| \leqslant \eta$, puisque f est lipschitzienne de rapport k,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0| \leqslant k\ \eta = k\ \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \big(|x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\big),$$

autrement dit l'application f est continue sur $\mathbb{R}$.

- On peut également démontrer que l'application f est continue sur $\mathbb{R}$ en remarquant que puisque f est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \leqslant |f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

CHAPITRE 14

Fonctions usuelles

14.1 Application réciproque

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application définie sur I et $J = f(I)$. On s'intéresse aux conditions d'existence d'une bijection réciproque pour f, c'est-à-dire à l'existence d'une application f^{-1} de J dans I telle que

$$\big(\forall x \in I \quad f^{-1}(f(x)) = x\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall y \in J \quad f(f^{-1}(y)) = y\big).$$

L'application f est une surjection de I dans $J = f(I)$. On cherche donc à établir des critères, simples à utiliser, permettant de s'assurer qu'une application définie sur un intervalle I est injective.

Proposition 14.1 *Soit I un intervalle et f une application définie sur I. Si f est continue et strictement monotone sur I alors f est une bijection de I dans $J = f(I)$ et admet une bijection réciproque f^{-1} de J dans I qui possède les propriétés suivantes :*

1. *f^{-1} est strictement monotone sur J et de même sens de monotonie que f ;*
2. *f^{-1} est continue sur J.*

Démonstration Rappelons que l'image J de l'intervalle I par l'application continue f est un intervalle. Supposons que f est strictement croissante sur I, le cas où f est strictement décroissante se traite d'une manière analogue.

$\trianglerighteq$ Pour montrer que f est injective, considérons $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \neq x_2$ et montrons que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si x_1 est différent de x_2 alors on a $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$. Dans le premier cas, puisque f est strictement croissante, cela implique (voir la définition p. 563) que $f(x_1) < f(x_2)$ et dans le deuxième cas que $f(x_1) > f(x_2)$. Dans tous les cas on a $f(x_1) \neq f(x_2)$ et par conséquent f est injective. L'application f réalise donc bijection de I dans $J = f(I)$.

$\trianglerighteq$ Montrons que si f est strictement croissante sur I alors f^{-1} est strictement croissante sur J. Soient $y_1, y_2 \in J$ avec $y_1 < y_2$ et soient $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. On a $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Si $y_1 < y_2$, comme f est strictement croissante, on a nécessairement $x_1 < x_2$, c'est-à-dire $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Cela montre que f^{-1} est strictement croissante sur J.

Copyrighted material

$\trianglerighteq$ Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. On suppose que y_0 appartient à l'intérieur de l'intervalle J, la démonstration s'adapte aisément en prenant les définitions de la continuité à gauche ou à droite dans le cas où y_0 est l'une des extrémités de l'intervalle J. Pour montrer que f^{-1} est continue en y_0, il faut montrer que pour tout réel ε strictement positif on peut trouver un réel η strictement positif tel que pour tout $y \in [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ on a

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$; comme f est continue et strictement croissante on a $f(x) \in [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$ (en supposant ε assez petit pour que l'on ait $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$). Considérons les réels strictement positifs $\alpha_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$ et $\alpha_2 = f(x_0 + \varepsilon) - y_0$. On a

- d'une part $y_0 - \alpha_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ d'où $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0 - \alpha_1)$;
- et d'autre part $y_0 + \alpha_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ d'où $x_0 + \varepsilon = f^{-1}(y_0 + \alpha_2)$.

Pour $y \in [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$ où $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a $y_0 - \alpha_1 \leqslant y \leqslant y_0 + \alpha_2$. Puisque f^{-1} est strictement croissante,

$$f^{-1}(y_0 - \alpha_1) \leqslant f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y_0 + \alpha_2),$$

ce qui s'écrit encore

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$$

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* (\eta = \min(\alpha_1, \alpha_2))$ tel que

$$\forall y \in [y_0 - \eta, y_0 + \eta] \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon.$$

□

Dans un repère orthonormé les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$) (fig. 2). En effet si (x, y) est un point de la représentation graphique de f alors $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$, ce qui montre que (y, x) appartient au graphe de f^{-1}.

Proposition 14.2 *Soient I et J deux intervalles ouverts et f une bijection de I dans J. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et* **de dérivée non nulle**, *alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Démonstration Rappelons[1] que l'application f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si la quantité

$$\Delta(y) = \frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y}$$

[1] On pourra consulter la définition 16.1, page 713.

Copyrighted material

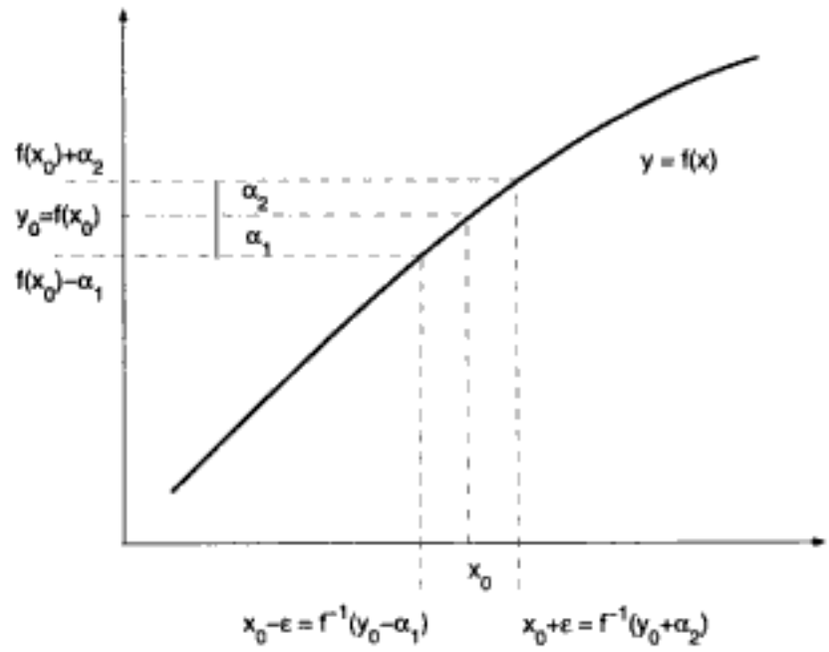


Fig. 1 Situation considérée dans la démonstration.

admet une limite lorsque y tend vers y_0. Cette limite est alors la dérivée de f^{-1} en y_0. On a

$$\Delta(y) = \frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y} = \frac{x_0 - f^{-1}(y)}{y_0 - y} = \frac{x_0 - f^{-1}(y)}{f(x_0) - f(f^{-1}(y))}.$$

L'application f^{-1} est continue en y_0 puisque f est continue en x_0 (voir la proposition 14.1) donc

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Par hypothèse l'application f est dérivable en x_0, donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(x_0).$$

On obtient finalement que

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \Delta(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{x_0 - f^{-1}(y)}{f(x_0) - f(f^{-1}(y))} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.\end{aligned}$$

□

Copyrighted material

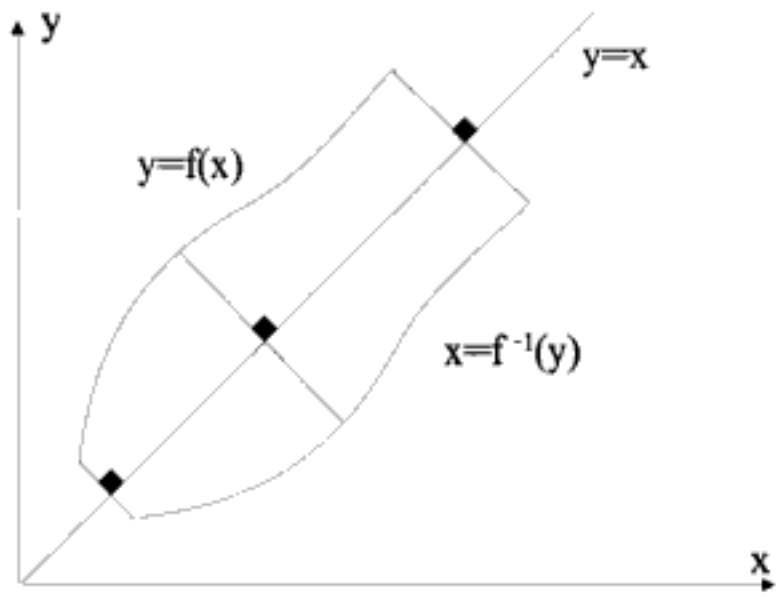


Fig. 2 Allure de la représentation graphique d'une application bijective et de sa bijection réciproque.

Exercice 1 *Soit f une bijection de I dans J. Montrer que si f est impaire, alors la bijection réciproque f^{-1} est elle aussi une application impaire. Que dire si f est paire ?*

Exemple Considérons les fonctions puissances entières $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n$ où n est un entier naturel non nul.

- Si n est un entier impair l'application f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et a pour image $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. D'après la proposition 14.1, elle admet une bijection réciproque f_n^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (fig. 3). Par ailleurs, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f_n' : x \in \mathbb{R} \longmapsto nx^{n-1}$. Puisque $f_n'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et que $f_n(0) = 0$, on en déduit par la proposition 14.2 que f_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- Si n est un entier pair l'application f_n est continue mais n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Toutefois l'application f_n restreinte à $\mathbb{R}_+$ est strictement croissante. D'après la proposition 14.1, elle admet donc une bijection réciproque f_n^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (fig. 3). Par ailleurs, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $f_n' : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto nx^{n-1}$. Puisque $f_n'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et que $f_n(0) = 0$, on en déduit par la proposition 14.2 que f_n^{-1} est dérivable

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Cela implique que

$$\ln(y) = \ln\left(x^{1/n}\right) = \frac{1}{n}\ln(x).$$

On obtient la relation dans le cas général d'un rationnel α en posant $\alpha = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. On a alors d'après ce qui précède,

$$\ln(x^\alpha) = \ln\left((x^p)^{1/q}\right) = \frac{1}{q}\ln(x^p) = \frac{1}{q}\, p\, \ln(x) = \alpha \ln(x).$$

□

Remarques

1. Si $x, y \in]-\infty, 0[$ alors $x \times y \in]0, +\infty[$. Le terme $\ln(x \times y)$ est donc bien défini et on a $\ln(x \times y) = \ln|x| + \ln|y|$.

2. On a la majoration suivante (qui se vérifie aisément en étudiant la fonction $x \longmapsto \ln(x) - x$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x) < x.$$

Exercice 3 *Résoudre les équations suivantes :*

1. $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$;
2. $\ln(x + 2) + \ln(x - 4) - 2\ln(x + 1) = 0$.

Proposition 14.4

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0;$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Démonstration ⊵ Pour montrer que la fonction logarithme admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, montrons (voir la définition p. 569) que pour tout réel $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ il existe un réel $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si x est un réel supérieur à η alors $\ln(x) \geqslant \kappa$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \kappa/\ln(2)$ et $\eta = 2^n$. Puisque la fonction logarithme est croissante, on a alors pour tout $x \geqslant \eta$,

$$\ln(x) \geqslant \ln(\eta) = n\ln(2) > \kappa.$$

⊵ En utilisant les propriétés du logarithme on obtient

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\lim_{t \to +\infty} \ln(t) = -\infty.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Proposition 14.6 *Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a les relations suivantes :*

1. $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$;
2. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;
3. $\exp(y-x) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(x)}$;
4. $\exp(\alpha x) = \Big(\exp(x)\Big)^{\alpha}$.

Démonstration Ces relations découlent des propriétés du logarithme néperien. Démontrons la première relation ; les autres relations se démontrent sur le même principe et sont laissées en exercice. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\ln\big(\exp(x) \times \exp(y)\big) \;=\; \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) \;=\; x + y.$$

On en déduit, puisque la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme, que $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$. □

Exercice 5 *Résoudre l'équation* $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 6 = 0$.

Proposition 14.7 *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\ \exp(x) = 0; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1.$$

Démonstration ⊵ Pour montrer que la fonction exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, utilisons la définition de la limite (voir p. 569) et montrons que pour tout réel κ, il existe un réel η tel que $\exp(x) \geqslant \kappa$ si $x \geqslant \eta$. Seul le cas où κ est positif est à considérer puisque la fonction exponentielle est à valeurs positives. On a $\kappa = \exp(\ln(\kappa))$ donc, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante,

$$\exp(x) \geqslant \kappa \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \geqslant \ln(\kappa).$$

Ainsi pour tout $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$, on trouve un réel η (il suffit de prendre η plus grand que $\ln(\kappa)$) tel que $\exp(x) \geqslant \kappa$ si $x \geqslant \eta$.

⊵ En utilisant le changement de variable $t = -x$ et les propriétés de la fonction exponentielle précédemment démontrées on obtient,

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{t\to+\infty} \exp(-t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\exp(t)} = 0.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Remarque Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la définition 14.3,

$$\exp(\alpha \ln x) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\alpha} \ln x\right) = \prod_{k=1}^{\alpha} \exp(\ln x) = \prod_{k=1}^{\alpha} x = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ fois}}.$$

La définition que l'on a donnée de la fonction puissance d'exposant réel est donc bien cohérente dans le cas d'un exposant α entier avec la définition des fonctions polynomiales $x \longmapsto x^\alpha$. On remarquera toutefois que cette définition ne donne un sens à x^α que pour x strictement positif alors que la définition par récurrence des fonctions polynomiales $x \longmapsto x^\alpha$ donne un sens à x^α pour tout réel x. On peut vérifier que cette définition est également cohérente avec la définition des fonctions puissances d'exposant rationnel donnée à la page 628.

Proposition 14.8

✗ *Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction fonction puissance d'exposant α est une application continue sur $]0,+\infty[$ et strictement monotone (croissante si $\alpha > 0$ et décroissante si $\alpha < 0$).*

✗ *Elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée : $x \in]0,+\infty[\longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.*

✗ *On a*

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & si\ \alpha < 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \\ +\infty & si\ \alpha > 0 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha < 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \\ 0 & si\ \alpha > 0 \end{cases}.$$

Démonstration ⊵ Les fonctions exponentielle et logarithme sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ respectivement. La fonction puissance est continue en tant que composée des deux applications $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \alpha \ln x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} \longmapsto e^y$ qui sont continues sur leur domaine de définition (voir la proposition 13.19 p. 593).

⊵ Les fonctions exponentielle et logarithme sont croissantes. Si $\alpha > 0$ la fonction puissance d'exposant α est croissante en tant que composée de 2 applications croissantes (voir la proposition 13.5 p. 565). Si $\alpha < 0$ la fonction puissance d'exposant α est décroissante en tant que composée d'une application décroissante et d'une application croissante.

⊵ Les fonctions exponentielle et logarithme sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ respectivement. La fonction puissance est donc dérivable en tant que composée des deux applications $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \alpha \ln x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} \longmapsto e^y$ qui sont dérivables sur leur domaine de définition (voir la proposition 16.4 p. 720). De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\left(x^\alpha\right)' = \left(\exp(\alpha \ln(x))\right)' = \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln(x)).$$

Copyrighted material

Hidden page

Proposition 14.9 *Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a les relations suivantes :*

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \; x^\beta$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$;
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$;
4. $x^{\alpha\,\beta} = (x^\alpha)^\beta = (x^\beta)^\alpha$.

Démonstration Ces relations se démontrent en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle. Vérifions la première relation ; les autres relations se démontrent d'une manière analogue et sont laissées en exercice. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} x^{\alpha+\beta} &= \mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\ln x} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x + \beta \ln x} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \; \mathrm{e}^{\beta \ln x} \\ &= \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^\alpha \; \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^\beta = x^\alpha \; x^\beta. \end{aligned}$$

□

Exercice 8 *Il y a manifestement une erreur dans le calcul suivant. Indiquer où.*

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\frac{1}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Remarque Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, les applications $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}} \in \mathbb{R}_+^*$ sont bijections réciproques l'une de l'autre.

Exercice 9 *Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a $\ln(1+x) \leqslant x$. En déduire que pour tout entier n non nul et pour tout $x \in [-n, +\infty[$, on a*

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^x.$$

14.5 Comparaison locale des fonctions logarithme, exponentielle et puissances

Proposition 14.10 *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ on a,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\beta \, |\ln x|^\alpha = 0.$$

Copyrighted material

Démonstration ⊵ Remarquons que si $\alpha \in \mathbb{R}_-$ on a

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^\beta\ (\ln x)^{|\alpha|}}$$

et, puisque $\beta > 0$ et $\alpha \geqslant 0$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\beta\ (\ln x)^{|\alpha|} = +\infty$. Cela implique que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0.$$

⊵ Supposons que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned}\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} &= \left(\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right)\right).\end{aligned}$$

Or $\beta/\alpha > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\beta/\alpha} = +\infty$. D'après la proposition 13.14, page 583, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

Puisque la fonction logarithme tend vers $-\infty$ en 0 et que $\alpha > 0$, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha \ln\left(\frac{\ln(x^{\beta/\alpha})}{x^{\beta/\alpha}}\right) = -\infty$$

ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ puisque $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t = 0$.

⊵ En effectuant le changement de variable $t = 1/x$ et en utilisant la proposition 13.14 on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} x^\beta\ |\ln x|^\alpha &= \lim_{t\to+\infty} (1/t)^\beta\ |\ln 1/t|^\alpha \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{|\ln t|^\alpha}{t^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^\alpha}{t^\beta} = 0\end{aligned}$$

(on utilise la première partie de la démonstration pour conclure). □

On dit que les puissances du logarithme sont dominées par les puissances d'exposant strictement positif en $+\infty$ et en 0.

Proposition 14.11 *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ *on a,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta\ \mathrm{e}^{\alpha x} = 0.$$

Copyrighted material

Démonstration ⊵ En effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$ on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\alpha}{(\ln t)^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{(\ln t)^\beta}{t^\alpha}} = +\infty,$$

puisque la fonction $t \in]1, +\infty[\longmapsto (\ln t)^\beta / t^\alpha$ est positive et admet, d'après la proposition 14.10, pour limite 0 en $+\infty$.

⊵ En effectuant le changement de variable $t = -x$ et en utilisant la première partie de la démonstration, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\beta \, \mathrm{e}^{\alpha x} = \lim_{t\to+\infty} |t|^\beta \, \mathrm{e}^{-\alpha t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\beta}{\mathrm{e}^{\alpha t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{t^\beta}} = 0.$$

□

On dit que les puissances d'exposant strictement positif sont dominées par la fonction exponentielle en $\pm\infty$.

14.6 Fonctions hyperboliques

Rappelons que toute application f définie sur $\mathbb{R}$ peut être décomposée de manière unique en une somme de 2 fonctions, l'une paire, l'autre impaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$ où

$$f_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_i : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On vérifie sans difficulté que f_p est une fonction paire et que f_i est une fonction impaire et on montre que cette décomposition est unique.

On appelle ***fonction sinus hyperbolique*** la partie impaire de la fonction exponentielle et ***fonction cosinus hyperbolique*** la partie paire. On appelle ***fonction tangente hyperbolique*** le quotient de la fonction sinus hyperbolique par la fonction cosinus hyperbolique. La proposition suivante est alors évidente.

Proposition 14.12

✗ *La fonction sinus hyperbolique notée* sh *ou* sinh *vérifie*

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

✗ *La fonction cosinus hyperbolique notée* ch *ou* cosh *vérifie*

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

✗ *La fonction tangente hyperbolique notée* th *ou* tanh *vérifie*

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Copyrighted material

Remarque Par abus de notation on écrit souvent $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ et $\operatorname{th} x$ ce que l'on devrait écrire $\operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{th}(x)$.

Proposition 14.13

✗ *La fonction sinus hyperbolique est une application définie sur* $\mathbb{R}$*, continue, strictement croissante, impaire, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée la fonction cosinus hyperbolique. Son image est* $\mathbb{R}$.

✗ *La fonction cosinus hyperbolique est une application définie sur* $\mathbb{R}$*, continue, paire, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée la fonction sinus hyperbolique. Son image est* $]1, +\infty[$.

✗ *La fonction tangente hyperbolique est une application définie sur* $\mathbb{R}$*, continue, impaire, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée l'application* $x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 - \operatorname{th}^2(x)$. *Son image est* $]-1, 1[$.

Démonstration Ces propriétés se démontrent en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle. Intéressons-nous à la fonction tangente hyperbolique ; l'étude des fonctions sinus et cosinus hyperboliques est laissée en exercice. La fonction tangente hyperbolique est définie par

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

⊵ La fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas, on déduit de la proposition 13.18, page 593, que th est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x} = -\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = -\operatorname{th}(x).$$

⊵ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\operatorname{th}(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $0 \leqslant \mathrm{e}^{-2x} < +\infty$, on en déduit que

$$-\infty < 1 - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} \leqslant 1.$$

Il en résulte que $\operatorname{th}(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $0 \leqslant \mathrm{e}^{2x} < +\infty$, on en déduit que

$$-1 \leqslant \mathrm{e}^{2x} - 1 < +\infty \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} \leqslant 1.$$

Il en résulte que $\operatorname{th}(x) \geqslant -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Copyrighted material

$\trianglerighteq$ En utilisant les règles de dérivation d'un quotient (voir la proposition 16.3 p. 718), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\mathrm{th}(x))' = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right)' = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}.$$

Après simplification on obtient

$$(\mathrm{th}(x))' = 1 + \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$$

ou encore $(\mathrm{th}(x))' = \dfrac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\, x}$. □

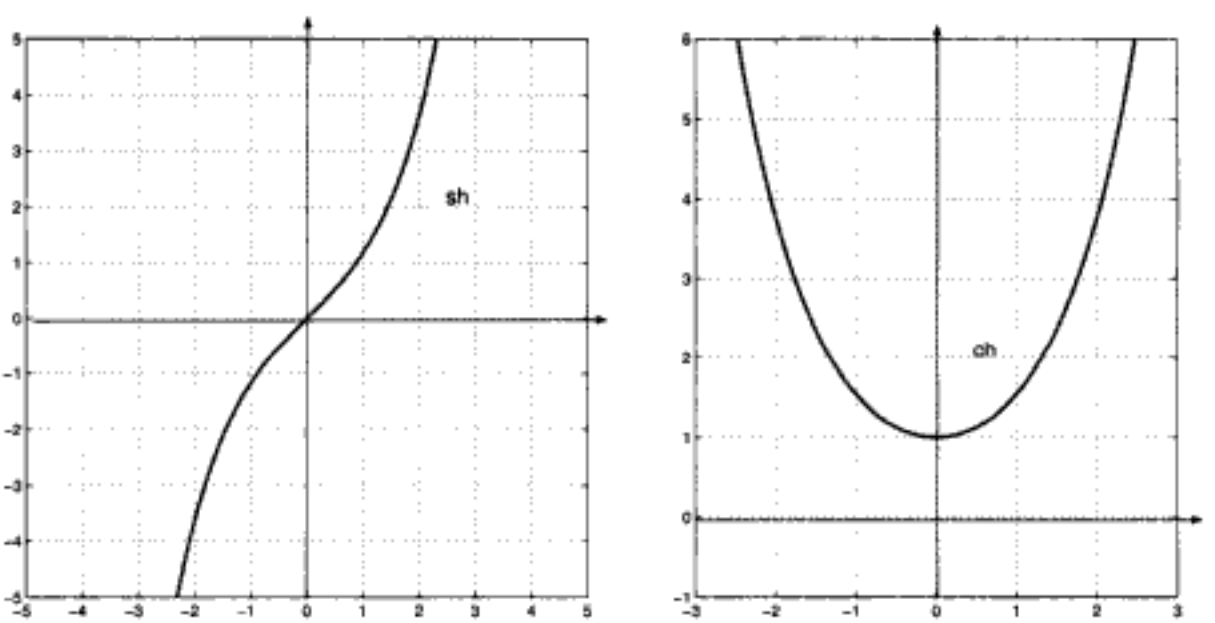


Fig. 9 Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus hyperboliques.

Remarques

1. On peut également exprimer la dérivée de la fonction tangente hyperbolique de la manière suivante : $\big(\mathrm{th}\, x\big)' = 1/\mathrm{ch}^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On vérifie facilement à partir de l'expression des fonctions hyperboliques à l'aide de la fonction exponentielle (voir la proposition 14.12) que

$$\mathrm{sh}(0) = 0, \qquad \mathrm{ch}(0) = 1, \qquad \mathrm{th}(0) = 0.$$

3. On vérifie également que

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1,$$

Copyrighted material

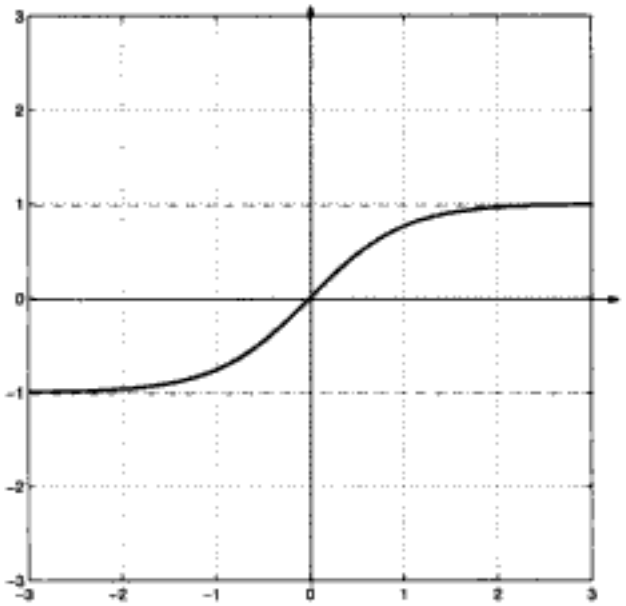


Fig. 10 Représentation graphique de la fonction tangente hyperbolique.

et que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1.$$

On peut regrouper les résultats précédents sous forme de tableaux.

- Fonction sinus hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$	$+\infty$	$+$	1	$+$	$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- Fonction cosinus hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Copyrighted material

- Fonction tangente hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$	0	$+$	1	$+$	0
$\mathrm{th}(x)$	-1	↗	0	↗	1

Exercice 10 *Montrer que pour tout entier n et pour tout réel x on a*

$$\left(\frac{1+\mathrm{th}\,x}{1-\mathrm{th}\,x}\right)^n = \frac{1+\mathrm{th}(nx)}{1-\mathrm{th}(nx)}.$$

Proposition 14.14 *Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a les relations suivantes :*

✗ $\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x=\mathrm{e}^x$; $\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x=\mathrm{e}^{-x}$; $\mathrm{ch}^2\,x-\mathrm{sh}^2\,x=1$.

✗ *Formules de sommation pour* ch *et* sh

$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y\,;\qquad \mathrm{ch}(2x)=\mathrm{ch}^2\,x+\mathrm{sh}^2\,x\,;$$
$$\mathrm{ch}(x-y)=\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y-\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y\,;$$
$$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y\,;\qquad \mathrm{sh}(2x)=2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x\,;$$
$$\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y-\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y\ .$$

✗ *Formules de sommation pour* th

$$\mathrm{th}(x+y)=\frac{\mathrm{th}\,x+\mathrm{th}\,y}{1+\mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y}\,;\qquad \mathrm{th}(2x)=\frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}^2\,x}\,;$$
$$\mathrm{th}(x-y)=\frac{\mathrm{th}\,x-\mathrm{th}\,y}{1-\mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y}.$$

Démonstration Ces relations se démontrent par simple calcul à partir de l'expression des fonctions hyperboliques en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle. Montrons par exemple la relation

$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y$$

On obtient, en utilisant l'expression exponentielle de cosinus hyperbolique et de sinus hyperbolique, puis en développant,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y &= \frac{1}{4}\Big(\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}\right)\\ &\qquad +\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}\right)\Big)\\ &= \frac{1}{4}\left(2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y+2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{-(x+y)}\right)\\ &= \mathrm{ch}(x+y).\end{aligned}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Exemple Montrons que pour tout $x \in [-1,1]$ on a

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right).$$

$\trianglerighteq$ Une première méthode consiste à utiliser l'identité $\cos^2\theta = 1/2\,(1+\cos 2\theta)$ qui permet dans un premier temps d'établir que

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(\arcsin x)\right).$$

Puisque pour tout $x \in [-1,1]$ $\arcsin x \in [-\pi/2, \pi/2]$, le réel $\cos(\arcsin x)$ est positif et

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

ce qui établit l'égalité.

$\trianglerighteq$ Une seconde méthode consiste à considérer les fonctions

$$f : x \in [-1,1] \longmapsto \cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$$

et

$$g : x \in [-1,1] \longmapsto \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right).$$

Ces deux fonctions sont continues et dérivables sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$ on a

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(-2x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)' \left(-2\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\sin 2\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) \\ &= -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Puisque f est g sont continues sur $]-1,1[$ et admettent la même dérivée sur cet intervalle, on en déduit que ces deux fonctions sont égales à une constante près : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [-1,1]$

$$f(x) = g(x) + C.$$

Pour $x = 0$ on a $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$ donc $C = 0$ et ces deux fonctions sont bien égales sur $[-1,1]$.

Exercice 13 *Étudier la fonction f définie par* $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

Copyrighted material

14.7.2 La fonction arc-cosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. L'image de l'intervalle $[0, \pi]$ est $[-1, 1]$. La fonction cosinus réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. On appelle ***fonction arc-cosinus*** et on note arccos ou $\cos^{-1}$ la fonction réciproque de l'application cosinus sur $[0, \pi]$.

D'après la proposition 14.1, la fonction arc-cosinus est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$, d'image $[0, \pi]$. On a

$$\arccos(\cos(x)) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

et

$$\cos(\arccos(y)) = y \quad \forall y \in [-1, 1].$$

De plus

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \forall y \in [-1, 1] \qquad \big(\cos(x) = y \iff x = \arccos(y)\big).$$

On a ainsi

$\cos(0) = 1$	$\arccos(0) = 0$
$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$	$\arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/6$
$\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$	$\arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$
$\cos(\pi/3) = 1/2$	$\arccos(1/2) = \pi/3$
$\cos(\pi/2) = 0$	$\arccos(0) = \pi/2$
$\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$	$\arccos(-\sqrt{3}/2) = 5\pi/6$
$\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$	$\arccos(-1/\sqrt{2}) = 3\pi/4$
$\cos(2\pi/3) = -1/2$	$\arccos(-1/2) = 2\pi/3$
$\cos(\pi) = -1$	$\arccos(-1) = \pi$

ATTENTION La relation $\arccos(\cos(x)) = x$ n'est vraie que si $x \in [0, \pi]$. On se gardera là encore de faire des simplifications hâtives ! Si $x \notin [0, \pi]$, on utilise la périodicité de la fonction cosinus pour se ramener à l'intervalle $[0, \pi]$. Par exemple,

$$\arccos(\cos(-\pi/4)) = \arccos(\cos(\pi/4)) = \pi/4.$$

Par contre on a toujours $\cos(\arccos(x)) = x$ lorsque ces quantités sont définies, *i.e.* pour tout $x \in [-1, 1]$.

Proposition 14.16 *La fonction arc-cosinus est dérivable sur* $]-1, 1[$ *de dérivée l'application*

$$x \in]-1, 1[\quad \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Proposition 14.20 *La fonction argument sinus hyperbolique est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée l'application*

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Démonstration D'après la proposition 14.2, puisque la fonction sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction cosinus hyperbolique qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction argument sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)}.$$

Or pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$, d'où $\operatorname{ch} y = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}$ car ch est une fonction positive. On a donc

$$\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1+(\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x))^2} = \sqrt{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Proposition 14.21

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Démonstration Nous allons donner deux méthodes pour établir ce résultat.

⊵ La fonction

$$f : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$ donc $x+\sqrt{1+x^2} > 0$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de l'application $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x+\sqrt{1+x^2} \in \mathbb{R}_+^*$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et de l'application logarithme qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'application logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle admet pour dérivée[(4)],

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ainsi f et argsh sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ayant même dérivée sur $\mathbb{R}$. Ces 2 fonctions sont égales à une constante réelle C près,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

[(4)] Utiliser la formule de dérivation composée (voir la proposition 16.4 p. 720) puis simplifier.

Copyrighted material

Puisque $\mathrm{sh}(0) = 0$ on a $\mathrm{argsh}(0) = 0$. Par ailleurs $f(0) = \ln 1 = 0$. On en déduit que $C = 0$.

$\trianglerighteq$ On peut également établir ce résultat sans recourir à la dérivée de argsh en utilisant la propriété

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \qquad \big(y = \mathrm{sh}(x) \iff x = \mathrm{argsh}(y)\big).$$

Partons de l'équation $\mathcal{E}$: $y = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et exprimons x en fonction de y. L'équation est équivalente à $\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0$ car $\mathrm{e}^x \neq 0$. Si l'on pose $X = \mathrm{e}^x$ alors $X \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Cette équation du second degré admet deux racines réelles distinctes (son discriminant qui vaut $4y^2 + 4$ est strictement positif) qui sont :

$$X_1 = y + \sqrt{y^2 + 1} > 0 \qquad \text{et} \qquad X_2 = y - \sqrt{y^2 + 1} < 0.$$

Comme $X > 0$, la seule expression possible pour X est $y + \sqrt{y^2 + 1}$. Finalement l'équation $\mathcal{E}$ admet pour unique solution $x = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$. On a ainsi vérifié que pour tout $y \in \mathbb{R}$ $\mathrm{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$ □

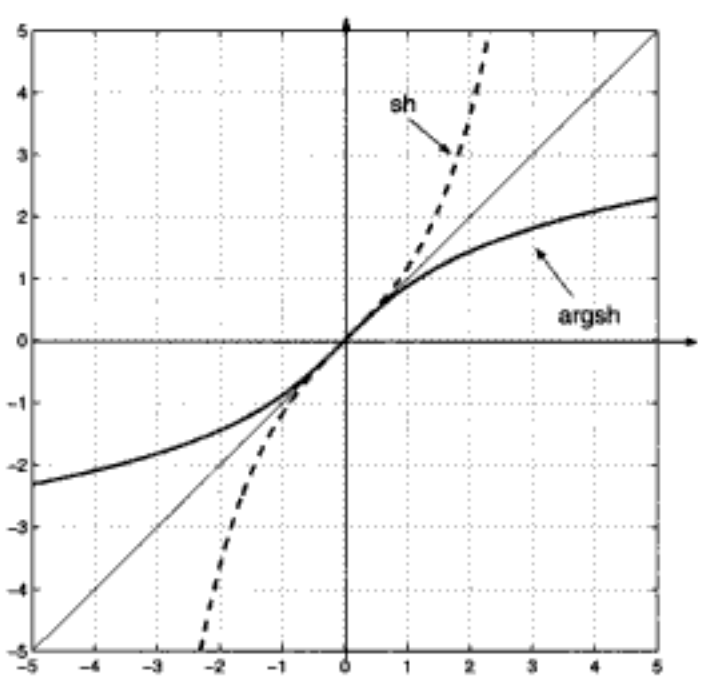


Fig. 15 Représentation graphique des fonctions sinus hyperbolique et argument sinus hyperbolique.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

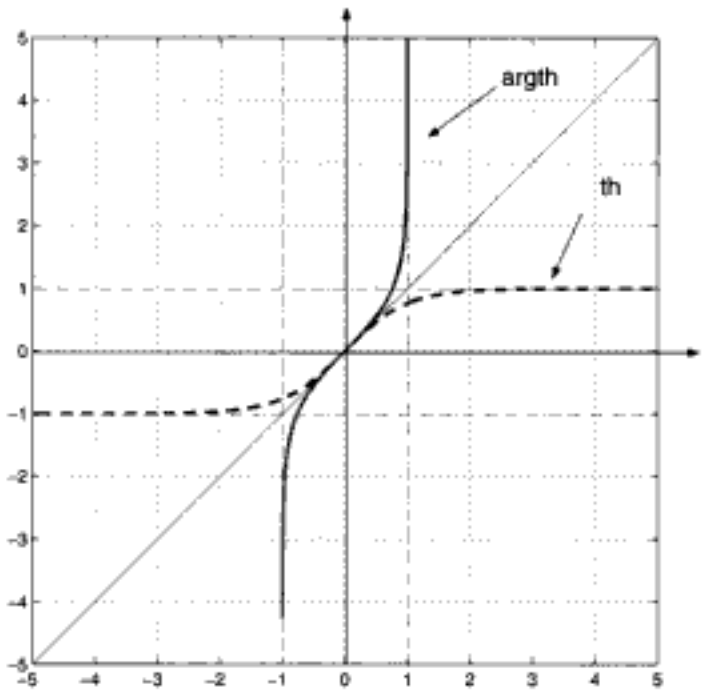


Fig. 17 Représentation graphique des fonctions tangente hyperbolique et argument tangente hyperbolique.

14.9 Exercices de synthèse

Exercice 15 *On s'intéresse à l'étude des solutions des équations*

$$\mathcal{E}_n : \ x + \ln x = n$$

où $n \in \mathbb{N}^*$. *On note* f *la fonction définie par* $f(x) = x + \ln x$.

1 - Donner le tableau de variation de la fonction f *en indiquant toutes les limites utiles.*

2 - Montrer que f *définit une bijection. Donner les propriétés de la bijection réciproque* f^{-1} *qui peuvent être déduites des propriétés de* f.

3 - Montrer que, pour n *fixé, l'équation* $\mathcal{E}_n$ *admet une unique solution (que l'on note* x_n*). Que vaut* x_1 *? Montrer que la suite* $(x_n)_n$ *est strictement croissante et qu'elle tend vers* $+\infty$.

4 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(x_n) \leqslant f(n)$ *puis que* $x_n \leqslant n$.

5 - On considère la fonction ϕ *définie par* $\phi(x) = f(x - \ln x) - x$. *Quel est le domaine de définition de* ϕ *? Donner le tableau de variation sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *de la fonction* ϕ *en indiquant toutes les limites utiles.*

6 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f(n - \ln(n)) \leqslant n$ *et en déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n \geqslant n - \ln(n)$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

autrement dit $2x^2 - 2x - 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Seul x_1 appartient à l'intervalle $]1, +\infty[$ donc l'équation $\mathcal{E}_1$ admet pour unique solution $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

2 - Les solutions de l'équation $\mathcal{E}_2$: $\ln(x+2)+\ln(x-4)-2\ln(x+1) = 0$ vérifient nécessairement $x+2 > 0$, $x-4 > 0$ et $x+1 > 0$. Elles appartiennent donc à $]4, +\infty[$. Pour $x \in]4, +\infty[$ on a (voir la proposition 14.3)

$$\ln(x+2) + \ln(x-4) - 2\ln(x+1) = \ln\left(\frac{(x+2)(x-4)}{(x+1)^2}\right).$$

Les solutions de l'équation $\mathcal{E}_2$ sont donc les réels de l'intervalle $]4, +\infty[$ vérifiant

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+1)^2} = 1,$$

autrement dit $(x+2)(x-4) = (x+1)^2$. Cette équation admet pour unique solution $x_0 = -9/4$. Puisque x_0 n'appartient pas à l'intervalle $]4, +\infty[$, on en conclut que l'équation $\mathcal{E}_2$ n'admet pas de solution.

Solution de l'exercice 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $a \in]0,1[\cup]1, +\infty[$ on a

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Si $a \in]0,1[$ alors $\ln a < 0$ et si $a \in]1, +\infty[$ alors $\ln a > 0$. On déduit alors de la proposition 14.4 que

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = \begin{cases} -\infty & \text{si } a \in]0,1[\\ +\infty & \text{si } a \in]1, +\infty[\end{cases};$$

$$\lim_{x\to0^+} \log_a x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \in]0,1[\\ -\infty & \text{si } a \in]1, +\infty[\end{cases};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln a}\,\frac{\ln x}{x} = 0 \quad \forall a \in]0,1[\cup]1, +\infty[;$$

$$\lim_{x\to0^+} x\log_a x = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\ln a}\, x\ln x = 0 \quad \forall a \in]0,1[\cup]1, +\infty[;$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{\ln a}\,\frac{\ln(1+x)}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } a \in]0,1[\\ 1 & \text{si } a \in]1, +\infty[\end{cases}.$$

Copyrighted material

Hidden page

L'application u étant dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ on en déduit, puisque la fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, que la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I en tant que composée de 2 applications dérivables. Puisque v est dérivable sur I, le produit $v \times (\ln \circ u)$ est une application dérivable sur I. Enfin puisque la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ on en conclut que f est dérivable sur I en tant que composée d'applications dérivables. En utilisant les règles de dérivation composée on obtient pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(v(x)\ln(u(x))\right)' \exp\left(v(x)\ln(u(x))\right) \\ &= \left(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) \exp\left(v(x)\ln(u(x))\right) \\ &= \left(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) f(x). \end{aligned}$$

2 - La fonction $g : x \longmapsto x^{1/x}$ correspond au cas particulier de l'étude précédente où $u : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x$ et $v : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto 1/x$. On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée l'application g' définie par

$$g'(x) = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) x^{1/x}.$$

On a $g'(x) = 0$ si et seulement si $\ln x = 1$. On en déduit que l'application g est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Intéressons-nous aux limites de g en 0^+ et en $+\infty$. On a

$$g(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

Intéressons-nous maintenant aux limites de g' en $+\infty$ (nous ne disposons pas pour le moment d'un critère permettant d'établir simplement la limite de g' en 0). On a

$$g'(x) = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right).$$

Puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0.$$

et que

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^t = 1$$

on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$. La représentation graphique de l'application g possède la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote en $+\infty$. L'équation $g(x) = 1$ n'admet qu'une solution qui est $x = 1$. On en déduit que la représentation graphique de l'application g coupe son asymptote en $+\infty$ au point d'abscisse 1.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

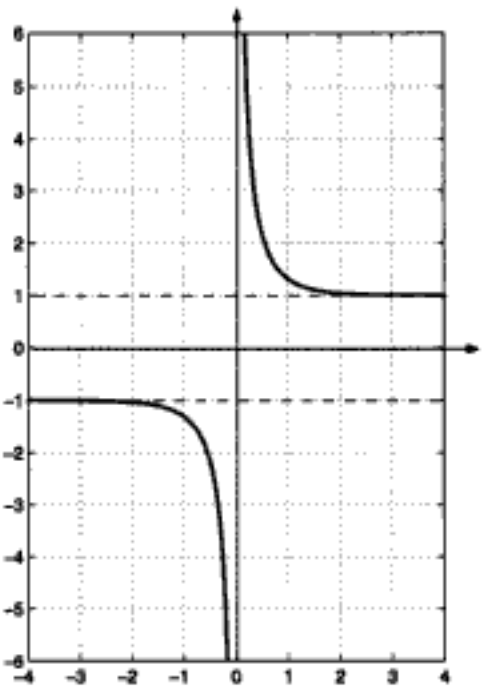


Fig. 21 Représentation graphique de la fonction cotangente hyperbolique.

Solution de l'exercice 12

Soient $x \in]0, \pi/2[$ et $y = 1/\sin(x)$. On a $y \in]1, +\infty[$ et $\sin(x) = 1/y \in]0, 1[$. On en déduit que $x = \arcsin(1/y)$. Ainsi, $f^{-1} : y \in]1, +\infty[\longmapsto \arcsin(1/y)$.

Solution de l'exercice 13

Domaine de définition

Désignons par ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$\psi(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

La fonction arc-sinus étant définie sur $[-1, 1]$, la quantité $f(x)$ est définie pour tout réel x tel que $g(x) \in [-1, 1]$. Or

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} \in [-1,1] &\iff \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1 \\ &\iff 2|x| \leqslant 1+x^2 \\ &\iff x^2 - 2|x| + 1 \geqslant 0 \\ &\iff \big(|x|-1\big)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée de l'application arc-sinus qui est continue sur $[-1, 1]$ et de l'application ψ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$ (voir la proposition 13.19 p. 593).

Copyrighted material

Hidden page

Recherche de points particuliers

D'après l'étude qui précède, la représentation graphique de f va posséder un point anguleux en $(1, f(1))$. Les demi-tangentes auront pour pentes 1 à gauche du point anguleux et -1 à droite.

La courbe ne possède pas de point d'inflexion puisque la dérivée seconde de f qui est l'application

$$f'' : x \in [0,1[\cup]1,+\infty[\longmapsto \begin{cases} -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

ne s'annule jamais. La fonction f est concave sur $[0,1[$ et convexe sur $]1,+\infty[$.

Représentation graphique

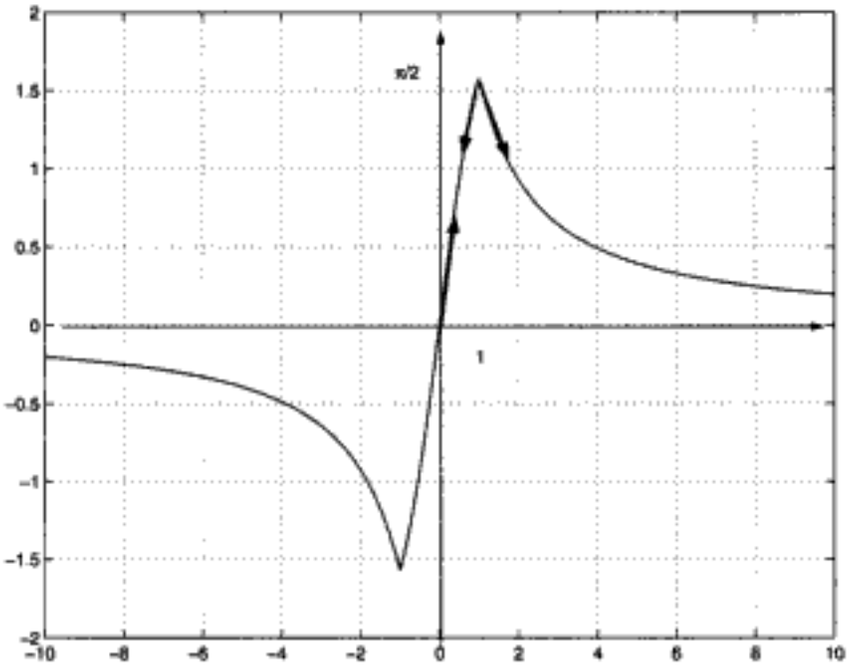


Fig. 22 Représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

Solution de l'exercice 14

La fonction cotangente hyperbolique a été étudiée au cours de l'exercice 11. Elle est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]1,+\infty[$. Elle est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et est à valeurs dans $]-\infty,-1[$. La fonction cotangente hyperbolique est donc une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. La bijection réciproque de la fonction cotangente hyperbolique est continue, strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et elle est continue, strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. Le tableau de variation de la fonction argument cotangente hyperbolique est le suivant :

Copyrighted material

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0

La fonction cotangente hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée l'application $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 1-\coth^2 x$, et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que la fonction argument cotangente hyperbolique est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Pour tout $y \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ on a

$$\operatorname{argcoth}'(y) = \frac{1}{\coth'(\operatorname{argcoth}(y))} = \frac{1}{1-\coth^2(\operatorname{argcoth}(y))} = \frac{1}{1-y^2}.$$

La représentation graphique de la fonction argument cotangente hyperbolique s'obtient en prenant le symétrique, par rapport à la droite $y = x$, de la représentation graphique de la fonction cotangente hyperbolique.

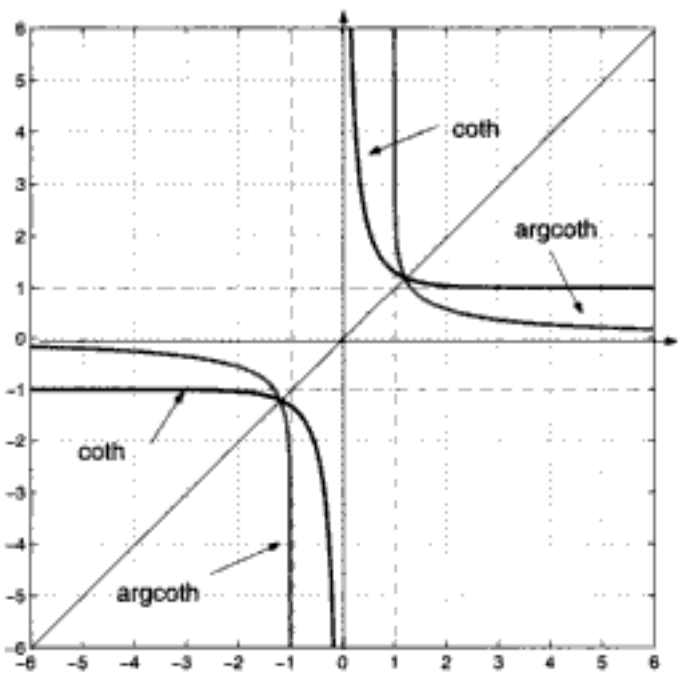


Fig. 23 Représentation graphique des fonctions cotangente hyperbolique et argument cotangente hyperbolique.

Solution de l'exercice 15

1 - La fonction $f : x \longmapsto x + \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est continue et dérivable sur cet intervalle de dérivée l'application $f' : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto 1 + 1/x$. L'application f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que l'application f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Les limites aux bornes de l'intervalle de définition se déduisent aisément de celles de la fonction logarithme.

Copyrighted material

Hidden page

Puisque l'application f est strictement croissante cela implique que $n \geqslant x_n$.

5 - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\ln x < x$ (ce qui peut être vérifié en étudiant la fonction $x \longmapsto x - \ln x$). Puisque f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit que ϕ est-elle même définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque les applications logarithme et f sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant les règles de dérivation d'une application composée on obtient,

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= (x - \ln x)' \; f'(x - \ln x) - 1 = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x - \ln x}\right) - 1 \\ &= \frac{\ln(x) - 1}{x(x - \ln x)}.\end{aligned}$$

Intéressons-nous à la fonction ϕ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Le dénominateur est strictement positif puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\ln x < x$. Le signe de $\phi'(x)$ dépend donc de celui de $\ln(x) - 1$. Ce réel est strictement négatif si $x \in [1, e[$ et strictement positif si $x \in]e, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned}\phi'(1) &= \frac{\ln(1) - 1}{1 - \ln(1)} = -1 \\ \phi(1) &= f(1) - 1 = 0 \\ \phi(e) &= f(e - 1) - e = (e - 1) + \ln(e - 1) - e = \ln\left(\frac{e - 1}{e}\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\phi'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x(x - \ln x)} = \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) \; \frac{1}{x} \; \frac{1}{1 - \dfrac{\ln x}{x}}.$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi'(x) = 0$. Enfin

$$\phi(x) = f(x - \ln x) - x = \ln\left(\frac{x - \ln x}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi'(x) = 0$. On peut résumer ces propriétés dans le tableau de variation suivant :

x	1		e		$+\infty$
$\phi'(x)$	-1	$-$	0	$+$	0
$\phi(x)$	0	↘	$\ln\left(\frac{e-1}{e}\right)$	↗	0

6 - D'après le tableau de variation de ϕ on en déduit que $\phi(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\phi(n) = f(n - \ln n) - n \leqslant 0$ donc

$$f(n - \ln n) \leqslant n = f(x_n).$$

Copyrighted material

Puisque la fonction f est croissante on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $x_n \geqslant n - \ln n$.

7 - D'après les questions 4 et 6 on a l'encadrement suivant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$n - \ln n \leqslant x_n \leqslant n.$$

On en déduit que

$$-\frac{\ln n}{n} \leqslant a_n = \frac{x_n}{n} - 1 \leqslant 0.$$

D'après le théorème d'encadrement (voir le théorème 5.1 p. 179) on conclut que la suite $(a_n)_n$ converge vers 0.

8 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $na_n + \ln n = x_n - n + \ln n$. Or $f(x_n) = n = x_n + \ln x_n$ donc $x_n - n = -\ln x_n$ et

$$na_n + \ln n = \ln n - \ln x_n = -\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = -\ln(a_n + 1).$$

La suite $(a_n)_n$ tend vers 0 et la fonction logarithme vaut 0 en 1. D'après la proposition 13.11, page 575, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, a_n + \ln(n) = 0$.

9 - On conclut que la suite $(\varepsilon_n)_n$ définie par

$$\varepsilon_n = x_n - n + \ln n = (na_n + n) - n + \ln n = na_n + \ln n$$

admet pour limite 0 et donc que $x_n = n - \ln(n) + \varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Interprétation : lorsque n est grand la solution de l'équation $\mathcal{E}_n$: $x + \ln x = n$ vaut approximativement $n - \ln n$. Le tableau suivant en donne une illustration numérique :

n	$n - \ln n$	x_n	ε_n
10	7.6974	7.9294	0.2320
10^2	95.3948	95.4414	0.0466
10^3	993.0922	993.0991	0.0069
10^4	9990.7896	9990.7905	0.0009

Solution de l'exercice 16

1 - La fonction arc-tangente est continue sur $\mathbb{R}$. Désignons par g la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Cette fonction est définie sur $D_g = [-1, 0[\cup]0, 1]$. Elle est continue sur D_g en tant que quotient de deux applications continues sur cet ensemble, la fonction au dénominateur ne s'y annulant pas. On en déduit que la fonction f est continue sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ en tant que composée de l'application g continue sur cet ensemble, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de la fonction arc-tangente qui est continue sur $\mathbb{R}$. On a par ailleurs

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Cette application est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a

$$f'(x) = \frac{-2\beta R_L x}{(\alpha^2+\beta^2 x^2)^{3/2}}.$$

L'application f est donc décroissante sur $[0,+\infty[$. Elle atteint par conséquent sa valeur maximale en 0. Cette valeur maximale est

$$M = \frac{R_L}{\alpha} = \frac{R_L}{2R+R_L}.$$

3 - La bande passante du filtre est l'ensemble des fréquences ν telles que

$$\frac{M}{\sqrt{2}} \leqslant |A(\nu)| \leqslant M.$$

Nous avons montré à la question précédente que la fonction $\nu \longmapsto |A(\nu)|$ est décroissante et que $|A(0)| = M$. On en déduit que la bande passante du filtre est l'intervalle $[0,\nu^*]$ où

$$|A(\nu^*)| = \frac{M}{\sqrt{2}}.$$

Résolvons cette équation. On a

$$\begin{aligned} |A(\nu^*)| = \frac{R_L}{\sqrt{2}(2R+R_L)} &\iff \alpha^2+\beta^2\nu^{*2} = 2(2R+R_L)^2 \\ &\iff \nu^{*2} = \frac{2(2R+R_L)^2-\alpha^2}{\beta^2} \\ &\iff \nu^* = \frac{1}{2\pi RC}\,\frac{R_L+2R}{R_L+R}. \end{aligned}$$

4 - Considérons la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g(x) = 20\log_{10} f(x) = \frac{20}{\ln 10}\Big(\ln R_L - \frac{1}{2}\ln\left(\alpha^2+\beta^2x^2\right)\Big).$$

Cette application est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a

$$g'(x) = -\frac{20}{\ln 10}\,\frac{\beta^2 x}{\alpha^2+\beta^2x^2}.$$

On a par conséquent le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	$\frac{20}{\ln 10}\ln\left(\frac{R_L}{\alpha}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Chapitre 15

Comparaison locale de fonctions

15.1 Prépondérance et Domination

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On dit qu'une fonction f est définie **au voisinage de** x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 (voir les définitions 3.10 et 3.14 p. 110 et 113) tel que f soit définie sur $V \setminus \{x_0\}$. Si f est définie **sur** un voisinage de x_0 alors elle est définie **au** voisinage de x_0. Une fonction définie **au** voisinage de x_0 est définie **sur** un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0.

Exemple Les fonctions $x \longmapsto 1/x$ et $x \longmapsto (\sin x)/x$ sont définies au voisinage de 0 mais pas sur un voisinage de 0.

Définition 15.1 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. On dit que f* **est négligeable**[1] **devant** *ϕ* **au voisinage de** *x_0 (ou encore que ϕ est* **prépondérante** *devant f au voisinage de x_0) s'il existe un voisinage V de x_0 et une application ϵ définie sur $V \setminus \{x_0\}$ telle que,*

$$\begin{cases} & \forall x \in V \setminus \{x_0\} \qquad f(x) = \epsilon(x) \times \phi(x), \\ \text{et} & \\ & \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0. \end{cases}$$

On note $f = o_{x_0}(\phi)$ ou $f(x) = o_{x_0}(\phi(x))$ ou $f = o(\phi)$ au voisinage de x_0.

On notera que d'après la définition 15.1, la seule fonction négligeable devant la fonction nulle est la fonction nulle elle même.

[1] En physique on utilise également une notion de « quantité négligeable devant une autre » mais avec un sens légèrement différent : une quantité A est négligeable devant une quantité B si le rapport A/B est assez petit, cet assez petit dépendant de la situation physique considérée (par exemple de la précision des mesures réalisées).

Copyrighted material

Exemples

1. Les fonctions $x \longmapsto \ln|x|$ et $x \longmapsto -1/|x|$ sont définies sur $\mathbb{R}^*$; elle sont donc définies au voisinage de 0. On a

$$\lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} -\frac{1}{|x|} = -\infty$$

et $\ln|x| = o_0(-1/|x|)$ car

$$\ln|x| = -\frac{\epsilon(x)}{|x|} \quad \text{avec} \quad \epsilon(x) = -|x|\ \ln|x|$$

et $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

2. $\sin x = o_0(\cos x)$ car $\sin x = \epsilon(x)\cos x$ avec $\epsilon(x) = \tan x$ et $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

3. $\sin x = o_0(\sqrt{|x|})$ car $\sin x = \epsilon(x)\sqrt{|x|}$ avec $\epsilon(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|}\ \dfrac{\sin(x)}{|x|}$ et $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

4. $\ln x = o_{+\infty}(x)$ car $\ln x = \epsilon(x)\, x$ avec $\epsilon(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \epsilon(x) = 0$.

ATTENTION La notation $f = o_{x_0}(g)$ peut laisser croire que $o_{x_0}(g)$ est une fonction. Ce n'est pas le cas. On devrait écrire $f \in o_{x_0}(g)$ où $o_{x_0}(g)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions négligeables devant g au voisinage de x_0. L'emploi du symbole $=$ est lié au fait que l'on a un certain nombre de relations algébriques entre fonctions négligeables (voir la proposition 15.2) qu'il est commode d'exprimer en utilisant le symbole d'égalité. On a par ailleurs $\sin x = o_0(\cos x)$ et $\sin x = o_0(\sqrt{|x|})$, mais écrire $o_0(\cos x) = o_0(\sqrt{|x|})$ n'a pas de sens.

La proposition suivante résulte de la définition 15.1.

Proposition 15.1 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. Si ϕ ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors*

$$f = o_{x_0}(\phi) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 0.$$

Remarque En utilisant la notion de limite à gauche (resp. à droite), il est alors naturel de définir la notion de prépondérance dans un voisinage à gauche (resp. à droite) du réel x_0 de la manière suivante.

- On dit que f est négligeable devant ϕ à gauche de x_0 et on note $f = o_{x_0^-}(\phi)$ si $\lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = 0$.

Copyrighted material

– On dit que f est négligeable devant ϕ à droite de x_0 et on note $f = o_{x_0^+}(\phi)$ si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = 0$.

Par exemple $\sin x = o_{0^+}(\sqrt{x})$ et $\ln x = o_{0^+}(-1/x)$.

Proposition 15.2 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g, ϕ, ψ quatre applications définies au voisinage de x_0. On a,*

1. $\left\{ \begin{array}{l} f = o_{x_0}(\phi) \\ g = o_{x_0}(\phi) \end{array} \right. \Longrightarrow \quad f + g = o_{x_0}(\phi)\,;$

2. $f = o_{x_0}(\phi) \quad \Longrightarrow \quad \lambda \cdot f = o_{x_0}(\phi)\,;$

3. $\left\{ \begin{array}{l} f = o_{x_0}(\phi) \\ g = o_{x_0}(\psi) \end{array} \right. \Longrightarrow \quad f \times g = o_{x_0}(\phi \times \psi)\,;$

4. $\left\{ \begin{array}{l} f = o_{x_0}(\phi) \\ \phi = o_{x_0}(\psi) \end{array} \right. \Longrightarrow \quad f = o_{x_0}(\psi)\ .$

Démonstration Ces propriétés se démontrent en revenant à la définition de la relation de négligeabilité (définition 15.1). Démontrons la première ; les autres propriétés sont à vérifier en exercice sur le même modèle. Si $f = o_{x_0}(\phi)$ et $g = o_{x_0}(\phi)$ alors il existe un voisinage V de x_0 et une application ϵ définie sur $D = V \setminus \{x_0\}$ telle que,

$$\forall x \in D \qquad f(x) = \epsilon(x)\ \phi(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$$

et il existe une application σ définie sur D telle que,

$$\forall x \in D \qquad g(x) = \sigma(x)\ \phi(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to x_0} \sigma(x) = 0.$$

On a donc pour tout $x \in D$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \epsilon(x)\ \phi(x) + \sigma(x)\ \phi(x) = (\epsilon(x) + \sigma(x))\ \phi(x)$$

avec, d'après les hypothèses,

$$\lim_{x \to x_0} (\epsilon(x) + \sigma(x)) = 0.$$

Soit $\mu : x \in D \longmapsto \epsilon(x) + \sigma(x)$. On a pour tout $x \in D$,

$$(f+g)(x) = \mu(x)\ \phi(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to x_0} \mu(x) = 0.$$

On en déduit que $f + g = o(\phi)$. □

Copyrighted material

Remarques

1. En prenant $\lambda = -1$ dans la deuxième propriété on obtient en particulier que

$$f = o_{x_0}(\phi) \qquad \Longrightarrow \qquad -f = o_{x_0}(\phi).$$

On a donc

$$\begin{cases} f = o_{x_0}(\phi) \\ g = o_{x_0}(\phi) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad g - f = o_{x_0}(\phi)$$

ce que l'on écrit aussi $g = f + o_{x_0}(\phi)$.

2. Si f et ϕ ne s'annulent pas au voisinage de x_0 et si $f = o_{x_0}(\phi)$ alors $1/\phi = o_{x_0}(1/f)$. On notera le renversement de la relation de négligeabilité.

ATTENTION On se gardera de faire des simplifications hasardeuses lors de la manipulation de relations de négligeabilité. Ainsi si $f = o_{x_0}(\phi)$ et $g = o_{x_0}(\phi)$ on a $f + g = o_{x_0}(\phi)$ (voir la démonstration précédente) et on n'écrira pas $f + g = 2o_{x_0}(\phi)$. De même on a $f - g = o_{x_0}(\phi)$ et on n'écrira surtout pas $f - g = 0$. Rappelons que la notation $f = o_{x_0}(\phi)$ est là pour signifier qu'au voisinage de x_0 la fonction f est égale à $\varepsilon \times \phi$ où ε est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers x_0. La notation $g = o_{x_0}(\phi)$ signifie quant à elle qu'au voisinage de x_0 la fonction g est égale à $\varepsilon \times \phi$ où ε est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers x_0 sans que ce soit nécessairement la même fonction que pour f (et en général ces 2 fonctions sont différentes ; on pourra les noter ε_f et ε_g pour les distinguer). Il est alors clair qu'au voisinage de x_0

$$(f - g)(x) = (\varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x))\phi(x) \neq 0.$$

À titre d'exemple considérons les relations

$$\sin(x) = x + o_0(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(3x) = 3x + o_0(x).$$

On en déduit d'après la proposition 14.2 que $\sin(x) + \sin(3x) = 4x + o_0(x)$. On n'écrira pas $\sin(x) + \sin(3x) = 4x + 2o_0(x)$. On a aussi $\sin(x) - \sin(3x) = -2x + o_0(x)$ mais on n'en déduira surtout pas que $\sin(x) - \sin(3x) = -2x$. On se préservera de telles erreurs en se rappelant de la signification très particulière du symbole $=$ dans la relation de négligeabilité et en confrontant la relation obtenue à sa définition.

Exemples usuels

✗ Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il résulte de la proposition 14.8, page 638, que

$$x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \qquad \text{si } \alpha < \beta \qquad \text{et} \qquad x^\alpha = o_{0^+}(x^\beta) \qquad \text{si } \alpha > \beta.$$

En effet $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha-\beta} = 0$ si et seulement si $\alpha - \beta < 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha-\beta} = 0$ si et seulement si $\alpha - \beta > 0$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Par exemple $|\sin x| \underset{0^+}{\sim} x$ et $|\sin x| \underset{0^-}{\sim} -x$.

Corollaire 15.1 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. S'il existe un réel ℓ non nul tel que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} \phi(x) = \ell$ alors $f \underset{x_0}{\sim} \phi$.*

Proposition 15.5 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. On suppose que ϕ ne s'annule pas au voisinage de x_0. On a les propriétés suivantes :*

1. $f \underset{x_0}{\sim} \phi \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi) \\ \phi = \mathcal{O}_{x_0}(f) \end{cases}$

2. $f \underset{x_0}{\sim} \phi \quad \Longleftrightarrow \quad (f - \phi) = o_{x_0}(\phi)$

Démonstration Il suffit de revenir aux définitions des relations d'équivalence et de domination.

$\trianglerighteq$ Si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ alors il existe une application Λ définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x \in D$,

$$f(x) = \Lambda(x)\ \phi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \Lambda(x) = 1.$$

L'application Λ est définie au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et a une limite finie en x_0 ; d'après la proposition 13.10, page 575, elle est bornée sur un voisinage de x_0. On en déduit que $f = \mathcal{O}_{x_0}(\phi)$. Puisque f et ϕ ne s'annulent pas sur D on en déduit que l'application Λ ne s'annule pas non plus sur D et que l'on a pour tout $x \in D$,

$$\phi(x) = \frac{1}{\Lambda(x)}\ f(x).$$

Puisque l'application Λ admet pour limite 1 en x_0, il existe un voisinage W de x_0 tel que pour tout $x \in W$ on ait $1/2 < \Lambda(x) < 3/2$. On en déduit que pour tout $x \in W$ on a $2/3 < 1/\Lambda(x) < 2$ et donc l'application $1/\Lambda$ est elle aussi bornée sur un voisinage de x_0. Ceci permet d'affirmer que l'on a $\phi = \mathcal{O}_{x_0}(f)$.

$\trianglerighteq$ Supposons que $f \underset{x_0}{\sim} \phi$. Il existe alors une application Λ définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x \in D$,

$$f(x) = \Lambda(x)\ \phi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \Lambda(x) = 1.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

On a

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \Lambda_f(x) + (\Lambda_g(x) - \Lambda_f(x))\frac{\psi(x)}{\phi(x)+\psi(x)} \\ &= \Lambda_f(x) + (\Lambda_g(x) - \Lambda_f(x))\frac{1}{1+\dfrac{\phi(x)}{\psi(x)}}.\end{aligned}$$

Puisque ϕ et ψ sont supposées de même signe au voisinage de x_0 la quantité $\left(1+\dfrac{\phi(x)}{\psi(x)}\right)^{-1}$ reste bornée (elle est minorée par 0 et est majorée par 1). On en déduit que

$$\lim_{x\to x_0} (\Lambda_g(x) - \Lambda_f(x)) \left(1+\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right)^{-1} = 0$$

et par conséquent que $\lim\limits_{x\to x_0} \Gamma(x) = 1$. □

Exemple Au voisinage de $+\infty$ les fonctions

$$f : x \longmapsto \sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto x$$

sont strictement positives et on a $\sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} x$. On en déduit que

$$x + \sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} 2x.$$

Règle 2 : s'il existe deux réels c_1 et c_2 tels que $f \underset{x_0}{\sim} c_1\phi$ et $g \underset{x_0}{\sim} c_2\phi$ et

1. si $c_1 + c_2 \neq 0$ alors $f + g \underset{x_0}{\sim} (c_1 + c_2)\phi$;
2. si $c_1 + c_2 = 0$ alors $f + g = o_{x_0}(\phi)$.

Démonstration Si $f \underset{x_0}{\sim} c_1\phi$ et $g \underset{x_0}{\sim} c_2\phi$ alors on peut trouver un voisinage V de x_0 et deux applications Λ_1 et Λ_2 définies sur l'ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$ telles que pour tout $x \in D$,

$$f(x) = c_1\Lambda_1(x)\phi(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to x_0} \Lambda_1(x) = 1;$$

et

$$g(x) = c_2\Lambda_2(x)\phi(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to x_0} \Lambda_2(x) = 1.$$

⊵ Si on suppose que $c_1 + c_2 \neq 0$ alors pour tout $x \in D$ on a

$$f(x) + g(x) = \big(c_1\Lambda_1(x) + c_2\Lambda_2(x)\big)\phi(x) = \frac{c_1\Lambda_1(x) + c_2\Lambda_2(x)}{c_1 + c_2}\,(c_1 + c_2)\phi(x).$$

Or $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c_1\Lambda_1(x) + c_2\Lambda_2(x)}{c_1 + c_2} = 1$, donc d'après la définition 15.3 on peut conclure que $f + g \underset{x_0}{\sim} (c_1 + c_2)\phi$.

Copyrighted material

▷ Puisque $\lim_{x\to x_0}\big(c_1\Lambda_1(x)+c_2\Lambda_2(x)\big)=c_1+c_2$, si $c_1+c_2=0$ la relation

$$f(x)+g(x)=\big(c_1\Lambda_1(x)+c_2\Lambda_2(x)\big)\phi(x)$$

permet de conclure que $f+g=\mathcal{O}_{x_0}(\phi)$, voir la définition 15.1. □

Exemple On a $x^2-3x \underset{0}{\sim} -3x$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $x^2-3x+\sin x \underset{0}{\sim} 2x$ et $x^2-3x+3\sin x=\mathcal{O}_0(x)$.

Règle 3 : si $f=\mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ alors $f+\phi \underset{x_0}{\sim} \phi$.

Démonstration Si $f=\mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ alors il existe une application ε définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D=V\setminus\{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x\in D$,

$$f(x)=\varepsilon(x)\ \phi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=1.$$

On en déduit que pour tout $x\in D$,

$$f(x)+\phi(x)=(1+\varepsilon(x))\phi(x)=\Lambda(x)\phi(x)$$

où l'application $\Lambda : x\in D \longmapsto 1+\varepsilon(x)$ admet pour limite 1 en x_0. On a donc $f+\phi \underset{x_0}{\sim} \phi$. □

Exemples

1. Puisque $\sin x=\mathcal{O}_{+\infty}(x)$ on a $\sin x+x \underset{+\infty}{\sim} x$.

2. Puisque pour tout réel x strictement positif, $\ln(2x)=\ln x+\ln 2$ et que $\ln 2=\mathcal{O}_{+\infty}(\ln x)$ on en déduit que $\ln(2x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

Règle 4 : si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ et $g=\mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ alors $f+g \underset{x_0}{\sim} \phi$.

Démonstration Si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ et $g=\mathcal{O}_{x_0}(\phi)$ alors on peut trouver un voisinage V de x_0 et deux applications Λ et ε définies sur l'ensemble $D=V\setminus\{x_0\}$ telles que pour tout $x\in D$,

$$f(x)=\Lambda(x)\phi(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to x_0}\Lambda(x)=1;$$

$$\text{et} \qquad g(x)=\varepsilon(x)\phi(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0.$$

On a donc

$$f(x)+g(x)=\big(\Lambda(x)+\varepsilon(x)\big)\phi(x) \qquad \forall x\in D.$$

Puisque $\lim_{x\to x_0}\big(\Lambda(x)+\varepsilon(x)\big)=1$, on en déduit d'après la définition 15.3 que $f+g \underset{x_0}{\sim} \phi$. □

Copyrighted material

Hidden page

On prendra garde que la composition à gauche de fonctions équivalentes n'est que rarement possible. La proposition 15.8 indique les deux situations usuelles où il est licite de composer à gauche des fonctions équivalentes. Dans tous les autres cas on justifiera le résultat, par exemple en revenant à la définition de l'équivalence.

Proposition 15.8 *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f et ϕ deux applications définies au voisinage de x_0. On suppose que ϕ est* ***strictement positive au voisinage de*** *x_0 (pas nécessairement en x_0).*

✗ *Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} \phi(x)$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (f(x))^\alpha \underset{x_0}{\sim} (\phi(x))^\alpha$.*

✗ *On suppose de plus que ϕ admet pour limite en x_0 le réel $\ell \in [0,1[\cup]1,+\infty[$ ou bien que ϕ tend vers $+\infty$ en x_0. Sous ces hypothèses, si $f(x) \underset{x_0}{\sim} \phi(x)$ alors* $\ln(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \ln(\phi(x))$.

Démonstration Supposons que $f \underset{x_0}{\sim} \phi$: il existe une application Λ définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x \in D$ on ait $f(x) = \Lambda(x)\,\phi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \Lambda(x) = 1$. Puisque ϕ est strictement positive, on peut supposer, quitte à prendre un voisinage de x_0 inclus dans V, que f est strictement positive sur D.

$\trianglerighteq$ Commençons par établir la seconde assertion. Pour $x \in V \setminus \{x_0\}$ on a

$$\ln(f(x)) = \ln\big(\Lambda(x)\phi(x)\big) = \ln\big(\Lambda(x)\big) + \ln\big(\phi(x)\big) = \Gamma(x)\ \ln\big(\phi(x)\big).$$

où

$$\Gamma : x \in D \longmapsto 1 + \frac{\ln\big(\Lambda(x)\big)}{\ln\big(\phi(x)\big)}.$$

Comme la fonction Λ admet pour limite 1 en x_0 on a $\lim\limits_{x \to x_0} \ln\big(\Lambda(x)\big) = 0$. Dans le cas où ϕ admet pour limite en x_0 le réel $\ell \in [0,1[\cup]1,+\infty[$ on a

$$\lim_{x \to x_0} \ln\big(\phi(x)\big) = \ln(\ell) \neq 0.$$

et par conséquent $\lim\limits_{x \to x_0} \Gamma(x) = 1$. Dans le cas où ϕ tend vers $+\infty$ en x_0 la fonction $x \longmapsto \ln(\phi(x))$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et par conséquent $\lim\limits_{x \to x_0} \Gamma(x) = 1$. On en déduit dans tous les cas que $\ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(\phi)$.

$\trianglerighteq$ Intéressons-nous maintenant à la première assertion. Pour $x \in D$ on a $f(x) = \Lambda(x)\phi(x)$ et par conséquent pour tout réel α,

$$\alpha \ln\big(f(x)\big) = \alpha \ln\big(\Lambda(x)\big) + \alpha \ln\big(\phi(x)\big).$$

On en déduit que

$$f(x)^\alpha = \exp(\alpha \ln(f(x))) = \underbrace{\exp(\alpha \ln(\Lambda(x)))}_{\theta(x)}\ \underbrace{\exp(\alpha \ln(\phi(x)))}_{\phi(x)^\alpha}.$$

Copyrighted material

Comme la fonction Λ admet pour limite 1 en x_0 on a $\lim\limits_{x\to x_0}\theta(x)=1$. On en conclut que $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} \phi^\alpha$. □

Exemples

1. Considérons la fonction $f : x \longmapsto 1+x^2$. Cette fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On a $1+x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ d'où $\sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} x$ (car $\sqrt{x^2}=|x|=x$ dans tout voisinage de $+\infty$ inclus dans $]0,+\infty[$).

2. Considérons la fonction $f : x \longmapsto x+\sqrt{1+x^2}$ qui est strictement positive au voisinage de $+\infty$. On a $x+\sqrt{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} 2x$ d'où $\ln\big(f(x)\big) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2x)$. Par ailleurs $\ln(2x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$ et $\ln\big(f(x)\big) = \operatorname{argsh}(x)$ (voir la proposition 14.21 p. 657). On a donc

$$\operatorname{argsh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x).$$

Remarque Si ϕ admet pour limite 1 en x_0 et si $f(x) \underset{x_0}{\sim} \phi(x)$ alors on ne peut pas conclure que $\ln(f(x)) \underset{x_0}{\sim} \ln(\phi(x))$ comme le montre l'exemple suivant (on utilisera la définition de l'équivalence pour établir les équivalences indiquées) : $1+x \underset{0}{\sim} 1+2x$ mais $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$ donc $\ln(1+x)$ n'est pas équivalent à $\ln(1+2x)$ au voisinage de 0.

Exercice 3 *Déterminer un équivalent en $+\infty$ aux fonctions*

$$x \longmapsto \ln(x^2+1)-\ln x \quad \text{et} \quad x \longmapsto \ln(x^2+1)-2\ln x.$$

ATTENTION On ne peut en général pas composer les équivalents avec la fonction exponentielle. Autrement dit, $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ n'implique pas nécessairement que $\mathrm{e}^f \underset{x_0}{\sim} \mathrm{e}^\phi$ comme le montre l'exemple suivant : $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais e^{x+1} n'est pas équivalent à e^x au voisinage de $+\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^x}=e\neq 1$.

Toutefois si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\phi(x)=0$ alors $\mathrm{e}^f \underset{x_0}{\sim} \mathrm{e}^\phi$ puisque dans ce cas

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{e}^{f(x)}}{\mathrm{e}^{g(x)}}=\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^{f(x)-g(x)}=1.$$

Copyrighted material

15.2.4 Équivalents aux fonctions usuelles

✗ Si f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$ alors

$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} (x - x_0)f'(x_0). \tag{1}$$

En effet, si f est dérivable en x_0 alors par définition (voir la définition 16.1 p. 713) on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

d'où on déduit que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)f'(x_0)} = 1.$$

On obtient grâce à la relation (1) les équivalents suivants (α désigne un réel) :

$\mathrm{e}^x - 1$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\ln(x+1)$	$\underset{0}{\sim}$	x	$(1+x)^\alpha - 1$	$\underset{0}{\sim}$	αx
$\sin x$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\operatorname{sh} x$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\tan x$	$\underset{0}{\sim}$	x
$\operatorname{th} x$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\arcsin x$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\operatorname{argth} x$	$\underset{0}{\sim}$	x

Remarque Nous avons vu que l'on ne devait pas composer à gauche avec la fonction logarithme des fonctions équivalentes lorsque leur limite est 1. La relation $\ln(x+1) \underset{0}{\sim} x$ permet de traiter ce cas. Si f admet pour limite 1 en 0 alors $f = (f-1) + 1$ au voisinage de 0 et

$$\ln(f(x)) = \ln(1 + (f(x) - 1)) \underset{0}{\sim} f(x) - 1$$

d'après la proposition 15.7. Ainsi, en considérant $f : x \longmapsto 1 + \tan x$, on établit que

$$\ln(1 + \tan x) \underset{0}{\sim} \tan x \underset{0}{\sim} x.$$

Une autre façon de procéder consiste à remarquer que la relation (1) appliquée à la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ en $x_0 = 1$ permet d'établir que $\ln(x) \underset{1}{\sim} (x-1)$.

✗ En utilisant les égalités trigonométriques

$$1 - \cos x = 2\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x - 1 = 2\left(\operatorname{sh} \frac{x}{2}\right)^2$$

on obtient,

$$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Copyrighted material

✗ Toute fonction polynomiale est équivalente en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré. Toute fonction fraction rationnelle[(2)] est équivalente en $\pm\infty$ au quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

✗ Toute fonction polynomiale est équivalente en 0 à son monôme de plus bas degré. Toute fonction fraction rationnelle est équivalente en 0 au quotient des monômes de plus bas degré du numérateur et du dénominateur.

✗ En utilisant l'expression exponentielle des fonctions hyperboliques (voir la proposition 14.12 p. 642) et l'expression logarithmique des fonctions hyperboliques réciproques (voir les propositions 14.21 p. 657 et 14.23 p. 659) on vérifie que :

$$\operatorname{sh} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \qquad \operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \qquad \operatorname{argsh} x \underset{+\infty}{\sim} \ln x \qquad \operatorname{argch} x \underset{+\infty}{\sim} \ln x$$

15.2.5 Changement de variable

Les équivalents usuels étant souvent donnés au voisinage de 0, il est parfois utile d'effectuer un changement de variable pour s'y ramener lorsque l'on cherche un équivalent au voisinage d'un réel différent de 0. La proposition suivante, qui est un corollaire de la proposition 15.7, en fournit le moyen.

Proposition 15.9 *Soient f et ϕ deux applications définies au voisinage de 0 et h une application définie au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si*

$$f(t) \underset{0}{\sim} \phi(t) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = 0$$

alors

$$f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} \phi(h(x)).$$

Remarque En pratique, on considère les changements de variables suivants.

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on effectue le changement de variable $t = h(x)$ où h est l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto x - x_0$ ou l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto x_0 - x$. Pour x dans un voisinage de x_0, t est dans un voisinage de 0.
2. si $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, on effectue le changement de variable $t = h(x)$ où $h : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1/x$. Pour x dans un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), t est dans un voisinage à droite (resp. à gauche) de 0. On peut aussi considérer le changement de variable défini par $h : x \in \mathbb{R} \longmapsto -1/x$.

(2) Définie comme le quotient de 2 fonctions polynomiales.

Copyrighted material

Hidden page

15.2.6 Application au calcul de limites

Proposition 15.10 *Deux fonctions équivalentes au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ont, ou bien la même limite, ou bien pas de limite en x_0.*

Démonstration Si $f \underset{x_0}{\sim} \phi$ alors il existe une application Λ définie au voisinage de x_0 sur un ensemble $D = V \setminus \{x_0\}$, où V désigne un voisinage de x_0, telle que pour tout $x \in D$

$$f(x) = \Lambda(x)\ \phi(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \Lambda(x) = 1.$$

Supposons que ϕ admette une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0. D'après les propositions 13.12 et 13.13, page 579, on en déduit que f admet pour limite ℓ en x_0. Inversement, puisque la relation d'équivalence est une relation symétrique, si on suppose que f admet pour limite ℓ en x_0 alors ϕ admet aussi pour limite ℓ en x_0. Puisqu'on a établi l'équivalence entre l'existence d'une limite pour f en x_0 et l'existence d'une limite pour ϕ en x_0, on en déduit que si l'une des deux fonctions n'a pas de limite en x_0 alors l'autre non plus. □

Exemples

1. Déterminons la limite en 0 de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$.
On a

$$\ln(1+2\tan x) \underset{0}{\sim} 2\tan x \underset{0}{\sim} 2x$$

et $\sin x \underset{0}{\sim} x$. On en déduit que $f(x) \underset{0}{\sim} 2$ puis que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.

2. Déterminons la limite en $+\infty$ de $g : x \longmapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.
On a

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Par ailleurs, $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x = 0$ donc d'après la proposition 15.9 on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On en déduit que

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1 \tag{2}$$

autrement dit que

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

15.3 Exercices de synthèse

Exercice 6

1 - Montrer que $\dfrac{1}{x}\ln(x+1) - \dfrac{1}{x+1}\ln x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^2}$.

2 - En déduire que $x^{\frac{1}{x+1}} - (x+1)^{\frac{1}{x}} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Exercice 7

1 - Déterminer un équivalent au voisinage de 0 *à la fonction*

$$x \longmapsto \frac{1}{\tan 4x}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right).$$

2 - En déduire la limite en $\pi/4$ *de la fonction* $x \longmapsto (\tan x)^{\operatorname{cotan} 4x}$.

Exercice 8 *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = \ln(1+\operatorname{th} x)$.

1 - Étudier la fonction f *et tracer aussi précisément que possible son graphe.*

2 - Montrer que $f(x) \underset{0}{\sim} x$.

3 - Justifier que f *définit une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans un intervalle* I *que l'on précisera. On note* f^{-1} *la bijection réciproque de* f. *Déduire de ce qui précède le tableau de variation de* f^{-1} *et tracer son graphe.*

4 - Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$ *pour tout* $y \in I$ *et donner un équivalent à* f^{-1} *au voisinage de* 0.

5 - Calculer la dérivée de f^{-1} *de 2 manières différentes : en utilisant la relation liant les dérivées de* f *et de* f^{-1} *puis directement à partir de l'expression de* f^{-1}.

15.4 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

Pour tout réel x non nul, on a

$$\mathrm{E}(x) = \Lambda(x)\, x \quad \text{où } \Lambda : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \mathrm{E}(x)/x.$$

Or pour tout réel x on a (voir la proposition 3.10 p. 105)

$$x - 1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x,$$

donc pour tout réel x non nul,

$$1 - \frac{1}{x} < \Lambda(x) \leqslant 1.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \Lambda(x) = 1$ et par conséquent que $\mathrm{E}(x) \underset{-\infty}{\sim} x$. On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} \Lambda(x) = 1$ et $\mathrm{E}(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 2

On a d'une part $\operatorname{ch} x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et d'autre part $\mathrm{e}^x = o_{-\infty}(\mathrm{e}^{-x})$ puisque

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0.$$

On est donc dans la situation de la règle 3, page 694, et l'on peut écrire

$$\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \underset{-\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

L'argumentation pour vérifier que $\operatorname{sh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ est identique. Puisque la fonction cosinus hyperbolique est paire, on déduit de la proposition 15.9 que

$$\operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$

La relation d'équivalence $\underset{+\infty}{\sim}$ étant transitive (voir la proposition 15.6) on a l'implication

$$\left(\operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\operatorname{sh} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \operatorname{sh} x.$$

Solution de l'exercice 3

1 - La fonction $x \longmapsto \ln(x^2+1) - \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\ln(x^2+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Or $x + 1/x \underset{+\infty}{\sim} x$ et cette quantité tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. D'après la proposition 15.8 on en déduit que

$$\ln(x^2+1) - \ln x \underset{+\infty}{\sim} \ln x.$$

2 - La fonction $x \longmapsto \ln(x^2+1) - 2\ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est un voisinage de $+\infty$. Remarquons qu'elle « ressemble » à la précédente. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\ln(x^2+1) - 2\ln x = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Cette fois-ci $1 + 1/x^2 \underset{+\infty}{\sim} 1$. On ne peut donc pas utiliser la proposition 15.8. Toutefois $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ et $\lim_{x \to +\infty} 1/x^2 = 0$ donc d'après la proposition 15.7 on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

en montrant que la limite du quotient de ces deux fonctions vaut 1. On a

$$\begin{aligned} x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right) &= 1+x-\frac{x\ln x}{\ln(x+1)} \\ &= 1+\frac{x\ln(x+1)-x\ln x}{\ln(x+1)} \\ &= 1+\frac{x}{\ln(x+1)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\ln(x+1)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{x}{\ln x}$$

d'où

$$\frac{x}{\ln(x+1)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln x}.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x+1)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$$

puis que

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)=1.$$

On peut donc conclure que

$$\frac{1}{x}\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\ln x\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{x^2}.$$

2 - On a

$$x^{\frac{1}{x+1}}-(x+1)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{\ln x}{x+1}\right)\left(1-\exp\left(\frac{\ln x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right).$$

Il est clair (la fonction admet pour limite 1 en $+\infty$) que

$$\exp\left(\frac{\ln x}{x+1}\right)\underset{+\infty}{\sim}1.$$

Par ailleurs puisque $\mathrm{e}^u-1\underset{0}{\sim}u$ on a d'après la première partie de l'exercice,

$$\exp\left(\frac{\ln x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)-1\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{x^2}.$$

Finalement on peut conclure que

$$x^{\frac{1}{x+1}}-(x+1)^{\frac{1}{x}}\underset{+\infty}{\sim}-\frac{\ln x}{x^2}.$$

Copyrighted material

Hidden page

D'après la question précédente, on a

$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{\tan 4u} \ln\left(\frac{1+\tan u}{1-\tan u}\right) = \frac{1}{2}.$$

La fonction exponentielle étant continue en $1/2$, on en déduit $\lim\limits_{x\to\pi/4} f(x) = \mathrm{e}^{1/2}$.

Solution de l'exercice 8

1 - La fonction tangente hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est à valeurs dans $]-1,1[$. On a donc $0 < 1 + \operatorname{th} x < 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction tangente hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction logarithme est continue sur $]0,2[$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée en $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1-\operatorname{th}^2 x}{1+\operatorname{th} x} = 1 - \operatorname{th} x.$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et par conséquent f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	2	+	0
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 2$

2 - On a $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{th} x = 0$ donc $\ln(1+\operatorname{th} x) \underset{0}{\sim} \operatorname{th} x$. Puisque $\operatorname{th} x \underset{0}{\sim} x$ on a finalement $\ln(1+\operatorname{th} x) \underset{0}{\sim} x$.

3 - L'application f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]-\infty, \ln 2[$. Sa bijection réciproque f^{-1} est une application continue et de même sens de monotonie. Elle admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\ln 2$
$f^{-1}(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Les représentations graphiques de f^{-1} et de f sont symétriques, par la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Copyrighted material

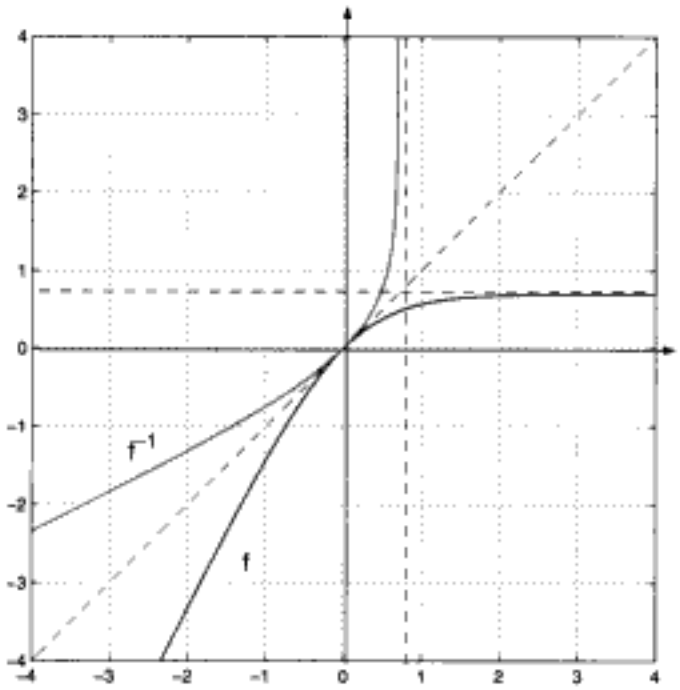


Fig. 1 Représentation graphique de f et de f^{-1}.

4 - Les applications f et f^{-1} sont liées par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]-\infty, \ln 2[\qquad \Big(y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)\Big).$$

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} y = \ln(1 + \operatorname{th} x) &\iff 1 + \operatorname{th} x = \mathrm{e}^y \iff \operatorname{th} x = \mathrm{e}^y - 1 \\ &\iff x = \operatorname{argth}(\mathrm{e}^y - 1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f^{-1} : y \in]-\infty, \ln 2[\longmapsto \operatorname{argth}(\mathrm{e}^y - 1).$$

On a $\operatorname{argth} u \underset{0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{y \to 0} \mathrm{e}^y - 1 = 0$, donc $\operatorname{argth}(\mathrm{e}^y - 1) \underset{0}{\sim} \mathrm{e}^y - 1$. Puisque $\mathrm{e}^y - 1 \underset{0}{\sim} y$ on en conclut que $f^{-1}(y) \underset{0}{\sim} y$.

5 - En utilisant la proposition 14.2, on obtient pour tout $y \in]-\infty, \ln 2[$,

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^y}.$$

Par ailleurs, par un calcul direct, on obtient

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \big(\operatorname{argth}(\mathrm{e}^y - 1)\big)' = \mathrm{e}^y \frac{1}{1 - (\mathrm{e}^y - 1)^2} = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^y}.$$

Copyrighted material

CHAPITRE 16

Dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle

16.1 Dérivée d'une fonction réelle

Nous considérons dans ce chapitre uniquement des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

16.1.1 Définitions

Définition 16.1

✗ *Soient f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité*

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite quand h tend vers 0. Cette limite, notée $f'(x_0)$, est appelée **dérivée de f en x_0**.

✗ *On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert $J \subset I$ si pour tout $x \in J$, f est dérivable en x. On appelle alors* **dérivée de** *f et on note f' l'application de J dans $\mathbb{R}$ qui à $x \in J$ associe $f'(x)$ la dérivée de f en x.*

Exemples

1. La dérivée de l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ en x_0 est $2x_0$. En effet, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h \quad \text{d'où} \quad \lim_{h\to 0} \Delta_{x_0}(h) = 2x_0.$$

2. La dérivée de la fonction sinus en x_0 est $\cos x_0$. En effet, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\begin{aligned} \Delta_{x_0}(h) &= \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \, \frac{\sin h}{h} - \sin x_0 \, \frac{1-\cos h}{h}, \end{aligned}$$

Copyrighted material

car $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h^2} = \dfrac{1}{2}$. Or,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} h\frac{\cos h - 1}{h^2} = 0.$$

On a donc bien $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_{x_0}(h) = \cos x_0$.

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0. En effet,

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin \frac{1}{h}$$

et cette quantité n'a pas de limite lorsque h tend vers 0 (voir l'exercice 6 p. 576).

Exercice 1 *Montrer que la dérivée de la fonction cosinus en x_0 vaut $-\sin x_0$.*

Remarques

1. La dérivée de f en x_0 est parfois notée $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ et on a également (par le changement de variable $x = x_0 + h$)

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. La tangente à la représentation graphique de f au point (x_0, y_0) a pour équation $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

Exercice 2 *Soit f une application dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h^2) - f(x_0 + h)}{h}$ puis $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$.*

Définition 16.2 *Soient f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(\text{resp. } \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$) et elle est appelée **dérivée à droite (resp. à gauche) de f en x_0**.

Copyrighted material

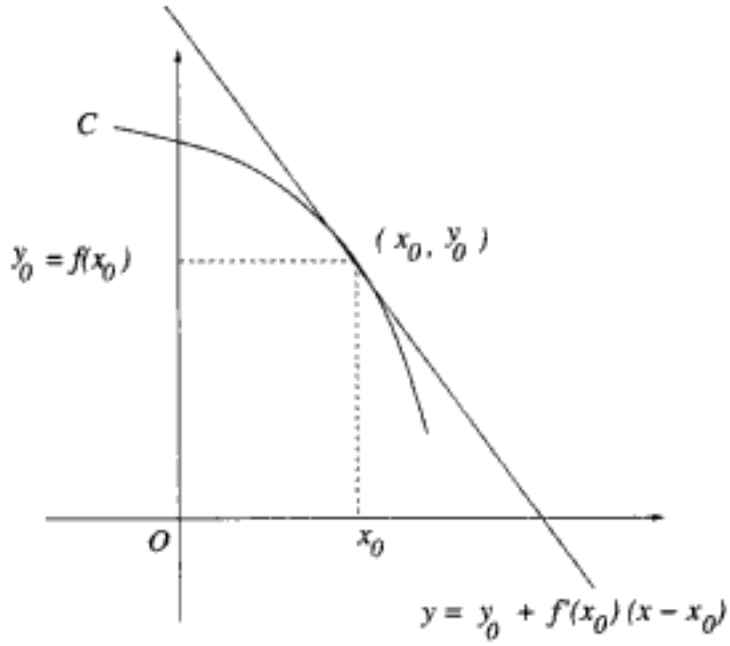


Fig. 1 Tangente à la représentation graphique d'une fonction f au point (x_0, y_0).

Exemple Considérons la fonction valeur absolue. Elle est dérivable à droite en 0 de dérivée égale à 1 puisque

$$\Delta_0(h) = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} \quad \text{d'où} \quad \lim_{h \to 0^+} \Delta_0(h) = 1.$$

Elle est dérivable à gauche en 0 de dérivée égale à -1 puisque $\lim_{h \to 0^-} \Delta_0(h) = -1$. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 puisque $\Delta_0(h)$ n'a pas de limite quand h tend vers 0.

La proposition suivante résulte des propriétés des limites.

Proposition 16.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle d'une variable réelle f soit dérivable en x_0 est qu'elle soit dérivable à droite en x_0 et dérivable à gauche en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

Remarque On dit qu'une fonction réelle f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$, si elle est dérivable en tout $x_0 \in]a, b[$ et si elle est dérivable à droite en a et à gauche en b.

Copyrighted material

Interprétation graphique

✗Si $\lim_{h\to 0^{\pm}} \Delta_{x_0}(h) = \pm\infty$ alors la représentation graphique de f possède une demie tangente verticale au point (x_0, y_0). C'est le cas par exemple de la fonction racine carrée en $(0,0)$ (voir la fig. 2).
✗Si f est continue en x_0 et $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ alors la représentation graphique de f présente un point anguleux en $(x_0, f(x_0))$. C'est le cas par exemple de la fonction $f : x \longmapsto |\arctan(1/x)|$ qui est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \pi/2$ et pour laquelle $f'_g(0) = 1$ et $f'_d(0) = -1$ (voir la fig. 2). C'est également le cas de la représentation graphique de la fonction valeur absolue en $(0,0)$.

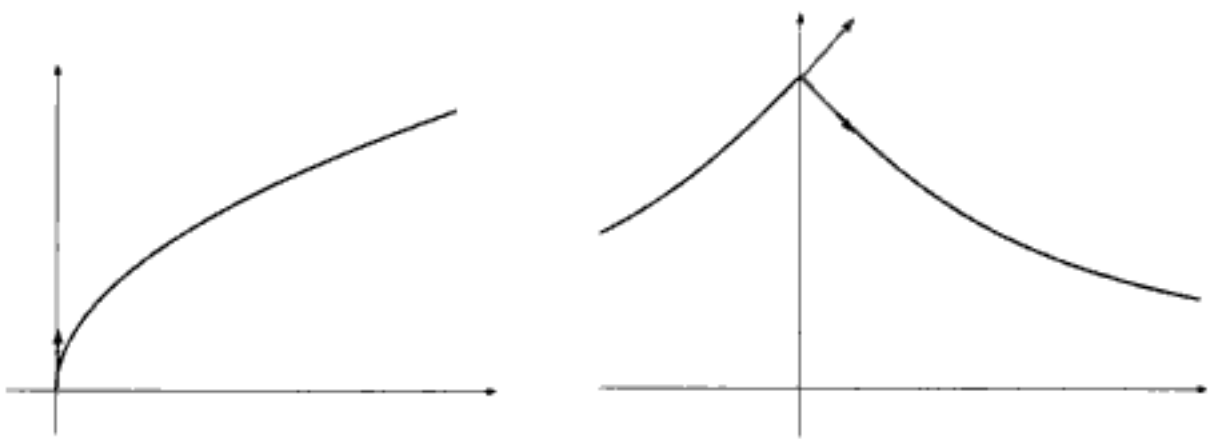


Fig. 2 Représentations graphiques des fonctions $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto |\arctan(1/x)|$.

L'ensemble des points où une fonction est dérivable est appelé **domaine de dérivabilité** de la fonction.

ATTENTION Le domaine de dérivabilité n'est pas toujours identique au domaine de définition de la fonction. Ainsi, la fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ mais elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (elle est dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0).

Proposition 16.2 *Soient f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Démonstration Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0 + h \in I$. On peut écrire (vérifier que le membre de droite se simplifie)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Copyrighted material

Or, f étant dérivable en x_0,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0), \quad \text{d'où} \quad \lim_{h\to 0} h\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0.$$

On a donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, autrement dit f est continue en x_0. □

Remarque La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. C'est le cas de la fonction valeur absolue en 0.

Exercice 3 *Justifier, en utilisant la définition 16.1, que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1 \quad \textit{et que} \quad \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1.$$

16.1.2 Dérivées des fonctions usuelles

On rappelle les dérivées des fonctions usuelles et leur domaine de dérivabilité.

f	Dom. de dérivabilité	$f'(x)$
$x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$x \longmapsto \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$	$1+\tan^2 x \quad$ ou $\quad \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$x \longmapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$x \longmapsto \ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$	e^x
$x \longmapsto \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$
$x \longmapsto \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$
$x \longmapsto \operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$	$1-\operatorname{th}^2 x \quad$ ou $\quad \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

Copyrighted material

Hidden page

Or

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0} &= \frac{1}{x-x_0}\,\frac{g(x_0)f(x)-g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\\ &= \frac{1}{x-x_0}\,\frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))+f(x_0)(g(x_0)-g(x))}{g(x)g(x_0)}\\ &= \frac{1}{g(x)}\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\,\frac{g(x_0)-g(x)}{x_0-x}.\end{aligned}$$

Étudions la limite du premier terme :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}\,\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x_0)}\,f'(x_0),\end{aligned}$$

car g étant dérivable en x_0, g est continue en x_0 et puisque $g(x_0)\neq 0$, $1/g$ est continue en x_0 (voir la proposition 13.18, page 593).

Étudions la limite du second terme :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\,\frac{g(x_0)-g(x)}{x_0-x} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\,\lim_{x\to x_0}\frac{g(x_0)-g(x)}{x_0-x}\\ &= \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2}\,g'(x_0),\end{aligned}$$

car g étant dérivable en x_0, g est continue en x_0 et puisque $g(x_0)\neq 0$, $1/g$ est continue en x_0.

On obtient finalement la relation énoncée

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{g(x_0)}\,f'(x_0)-\frac{f(x_0)}{g(x_0)^2}\,g'(x_0)\\ &= \frac{f'(x_0)\;g(x_0)-f(x_0)\;g'(x_0)}{g(x_0)^2}.\end{aligned}$$

□

Exemple La fonction tangente est dérivable sur $]-\pi/2,\pi/2[$ car elle est définie comme le quotient de 2 fonctions, sinus et cosinus, dérivables sur $]-\pi/2,\pi/2[$, la fonction cosinus ne s'annulant pas sur cet intervalle. La dérivée de la fonction tangente en $x_0\in]-\pi/2,\pi/2[$ est

$$\begin{aligned}\tan'(x_0) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x_0)=\frac{\sin'(x_0)\;\cos(x_0)-\sin(x_0)\;\cos'(x_0)}{\cos(x_0)^2}\\ &= \frac{\cos^2(x_0)+\sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)}\\ &= \frac{1}{\cos^2(x_0)}.\end{aligned}\tag{1}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas définie en 0 ni prolongeable par continuité en 0. On a en effet

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Si l'on calcule formellement la dérivée de f on obtient (faire le calcul de simplification)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)' \times \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2} \\ &= -\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est bien définie en 0 et vaut 1 mais f n'est pas dérivable en 0 donc 1 ne peut pas être la valeur de $f'(0)$ qui n'existe pas. Avant de se lancer dans le calcul de la dérivée d'une application, il faut donc étudier avec soin son domaine de dérivabilité.

ATTENTION On n'a pas nécessairement $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$ et on ne peut pas conclure à la non dérivabilité d'une application de cette manière. Pour s'en convaincre il suffit de considérer l'exemple suivant.

Exemple L'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $f' : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. D'autre part, f est dérivable en 0 de dérivée 0 puisque

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Par contre f' n'a pas de limite en 0 car la fonction cosinus n'a pas de limite en l'infini. On a donc une fonction dérivable en 0 pour laquelle la limite en 0 de $f'(x)$ n'existe pas.

Remarque On peut toutefois démontrer le résultat suivant (voir la proposition 16.7, p. 732) : si f est continue en x_0, dérivable au voisinage de x_0 et si $\lim_{x\to x_0} f'(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$. On remarquera

Copyrighted material

Hidden page

Démonstration ⊵ Supposons que f soit différentiable en x_0. Il existe alors une application ε définie dans un voisinage V de 0 et un réel α tels que

$$\forall h \in V \quad f(x_0+h) - f(x_0) = \alpha\, h + h\,\varepsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On en déduit que pour tout $h \in V \setminus \{0\}$ on a

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \alpha + \varepsilon(h)$$

et par conséquent que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \alpha$. D'après la définition 16.1 cela implique que f est dérivable en x_0 de dérivée en x_0 le réel α.

⊵ Supposons que f soit dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0)$. On a alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

autrement dit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0.$$

Considérons la fonction ε définie pour tout réel h vérifiant $h + x_0 \in I$, par $\varepsilon(0) = 0$ et

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \qquad \text{si } h \neq 0.$$

On a alors pour tout réel h dans un voisinage de 0,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\,\varepsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0,$$

autrement dit, f est différentiable en x_0 de différentielle en x_0 l'application

$$\mathrm{d}f_{x_0} : h \in \mathbb{R} \longmapsto f'(x_0)\, h.$$

□

Définition 16.4 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction réelle définie sur I admettant une différentielle $\mathrm{d}f_{x_0}$ en tout $x_0 \in I$. On appelle différentielle de f, et on note $\mathrm{d}f$, l'application de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathrm{d}f : x_0 \in I \longmapsto \mathrm{d}f_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Copyrighted material

Exemples

1. Considérons l'application identité $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $f'(x_0) = 1$ et la différentielle de f est donc

$$\mathrm{d}f : x_0 \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{d}f_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{où} \quad \mathrm{d}f_{x_0} : h \in \mathbb{R} \longmapsto h \in \mathbb{R}.$$

On a coutume de noter $\mathrm{d}x$ l'application $\mathrm{d}x : h \in \mathbb{R} \longmapsto h \in \mathbb{R}$.

2. Considérons l'application $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$. La différentielle de g est

$$\mathrm{d}g : x_0 \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{d}g_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{où} \quad \mathrm{d}g_{x_0} : h \in \mathbb{R} \longmapsto 2x_0 h \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, on a

$$\mathrm{d}g_{x_0}(h) = 2x_0 h = 2x_0 \mathrm{d}x(h),$$

ce que l'on écrit $\mathrm{d}g_{x_0} = 2x_0 \mathrm{d}x$. Il arrive fréquemment que l'on note[1] $\mathrm{d}g = 2x\ \mathrm{d}x$ la différentielle de g.

16.1.5 Dérivées successives

LEIBNIZ, Gottfried (1646, Leipzig - 1716, Hannovre).

La curiosité de Leibniz est universelle. Il fut non seulement philosophe et mathématicien, mais aussi linguiste, juriste, historien, géographe, diplomate et théologien. Il fut l'inventeur en 1686, en même temps que Newton, du calcul différentiel et intégral. Leibniz a précisé le concept de fonction (le terme est de lui : en latin functio = accomplissement, exécution) et de fonction dérivée, à travers celui de différentielle, que Newton appela fluxion. Les dernières années de Leibniz sont marquées par la retentissante controverse avec Newton sur l'antériorité de l'invention du calcul différentiel.

Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. Si la dérivée de f est à son tour dérivable, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f' qui est appelée ***dérivée seconde*** de f. On peut ainsi de proche en proche définir pour tout entier n la ***dérivée n-ième*** (ou d'ordre n) de f que l'on note $f^{(n)}$. Par convention $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$. On dit que f est ***indéfiniment dérivable*** sur $J \subset I$ si pour tout entier n la dérivée n-ième de f est définie sur J.

---

[1] Cette écriture est justifiée par le fait que symboliquement on obtient $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = 2x = g'(x)$. Mais gare aux confusions : $\mathrm{d}g_x$ est une application linéaire alors que $g'(x)$ est un réel.

Copyrighted material

Remarques

1. Il se peut que les domaines de définition de f, f', $f^{(2)}$, ..., soient distincts. C'est le cas par exemple pour $x \longmapsto x^{3/2}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ mais dont la dérivée $x \longmapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. L'existence de $f^{(n)}(x_0)$ suppose que $f^{(n-1)}$ soit définie sur un voisinage de x_0 et pas uniquement en x_0.

Exemples

1. On vérifie par un raisonnement par récurrence que la dérivée n-ième de la fonction cosinus est l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(x + n\pi/2)$. De même on vérifie que la dérivée n-ième de la fonction sinus est $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(x + n\pi/2)$.

2. On vérifie par un raisonnement par récurrence que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ la dérivée n-ième de l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^p$ est

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto (x^p)^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ n! & \text{si } p = n \\ p \dots (p-n+1)\, x^{n-p} = \dfrac{p!}{(n-p)!} x^{n-p} & \text{si } p > n \end{cases}.$$

Proposition 16.6 *Soient f, g deux fonctions réelles définies sur un intervalle ouvert I, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f et g admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n en x_0 (resp. sur I). Alors,*

✗ *$f + g$ est dérivable jusqu'à l'ordre n en x_0 (resp. sur I) et*

$$(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0);$$

✗ *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ est dérivable jusqu'à l'ordre n en x_0 (resp. sur I) et*

$$(\lambda \cdot f)^{(n)}(x_0) = \lambda\, f^{(n)}(x_0);$$

✗ *$f \times g$ est dérivable jusqu'à l'ordre n en x_0 (resp. sur I) et $\forall k \in \{1, \dots, n\}$,*

$$(f \times g)^{(k)}(x_0) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i\, f^{(i)}(x_0)\, g^{(k-i)}(x_0) \qquad (\textbf{formule de Leibniz}^{(2)});$$

✗ *si $g(x_0) \neq 0$ (resp. g ne s'annule pas sur I), $\dfrac{f}{g}$ est dérivable[3] jusqu'à l'ordre n en x_0 (resp. sur I).*

Démonstration Ces propriétés se démontrent par récurrence à partir des relations pour la dérivée première. □

[3] La formule donnant l'expression de la dérivée n-ième du quotient f/g en fonction des dérivées de f et de g est quelque peu compliquée.

Copyrighted material

Exemple Calculons la dérivée n-ième de l'application $\phi : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3\,\mathrm{e}^{3x}$. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{3x}.$$

On a $\phi = f \times g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6 \quad \text{et} \quad f^{(i)}(x) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, i \geqslant 4.$$

Par un raisonnement par récurrence trivial, on vérifie que pour tout entier i et pour tout réel x on a

$$g^{(i)}(x) = 3^i \mathrm{e}^{3x}.$$

On vérifie aisément que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\phi'(x) = (3x^3 + 3x^2)\,\mathrm{e}^{3x}, \quad \phi''(x) = (9x^3 + 18x^2 + 6x)\,\mathrm{e}^{3x}$$

Pour tout entier n supérieur à 3 on a d'après la formule de Leibniz,

$$\phi^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x) = \sum_{i=0}^{3} C_n^i f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x)$$

car $f^{(i)}(x) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}, i \geqslant 4$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}(x) &= f(x)g^{(n)}(x) + nf'(x)g^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} f''(x)g^{(n-2)}(x) \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} f^{(3)}(x)g^{(n-3)}(x) \\ &= \mathrm{e}^{3x}\Big(x^3 3^n + 3^n n x^2 + 3^{n-1} n(n-1)x + n(n-1)(n-2)3^{n-3}\Big). \end{aligned}$$

Exercice 6 *On considère l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n(1+2x)^n$. En utilisant la formule de Leibniz, montrer que la dérivée n-ième de f est l'application*

$$f^{(n)} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k=0}^{n} 2^k n! \left(C_n^k\right)^2 x^k (1+2x)^{n-k}.$$

Définition 16.5 ✗ *On dit que la fonction réelle f est* **de classe $\mathcal{C}^n$** *sur l'intervalle I ($n \in \mathbb{N}^*$) si f est dérivable jusqu'à l'ordre n sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.*

✗ *On dit que la fonction réelle f est* **de classe $\mathcal{C}^\infty$** *sur l'intervalle I si f est indéfiniment dérivable sur I. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.*

Copyrighted material

Exemples

1. Les fonctions sinus, cosinus, sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, exponentielle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. L'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. En effet f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de 2 applications dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Elle admet pour dérivée l'application $f' : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x)$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$$

(on a $0 \leqslant \left|x^2 \sin(1/x)\right| \leqslant x^2$). L'encadrement $0 \leqslant |f'(x)| \leqslant 3x^2 + |x|$ implique que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ et permet de conclure que f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

L'application f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas dérivable en 0 car la quantité $\dfrac{f'(h) - f'(0)}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0. L'application f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Toutefois elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Remarques

1. $\mathcal{C}^0(I)$ désigne l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ continues sur I. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m < n$ et I un intervalle ouvert. Il résulte de la définition 16.5 que $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^m(I) \subset \mathcal{C}^0(I)$.

2. Une application peut être dérivable jusqu'à l'ordre n sur un intervalle donné sans être de classe $\mathcal{C}^n$ sur cet intervalle. C'est le cas de l'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

qui est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée l'application

$$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

qui n'est pas continue en 0.

16.2 Le théorème des accroissements finis

Dans cette section, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Copyrighted material

Hidden page

Or f est dérivable en $c_1 \in]a,b[$ donc $f'(c_1) = f'_g(c_1) = f'_d(c_1)$. Compte tenu des signes de $f'_g(c_1)$ et $f'_d(c_1)$ on a nécessairement $f'(c_1) = 0$.

$\trianglerighteq$ Si $c_1 \notin]a,b[$ alors on a nécessairement $c_2 \in]a,b[$. On peut alors reprendre un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas où $c_1 \in]a,b[$. On établit par ce moyen que

$$f'_d(c_2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c_2+h) - f(c_2)}{h} \geqslant 0$$

et que

$$f'_g(c_2) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c_2+h) - f(c_2)}{h} \leqslant 0.$$

Là encore, puisque f est dérivable en $c_2 \in]a,b[$ on a $f'(c_2) = f'_g(c_2) = f'_d(c_2)$, ce qui compte tenu des signes de $f'_g(c_2)$ et de $f'_d(c_2)$ implique que $f'(c_2) = 0$.

Dans tous les cas on a donc établi l'existence d'un réel dans l'intervalle $]a,b[$ pour lequel f' s'annule. □

Interprétation graphique du théorème de Rolle. Au point de coordonnées $(c, f(c))$ la représentation graphique de f admet une tangente horizontale (voir la fig. 3).

Remarques

1. En général, il n'y a pas unicité du réel c annulant la dérivée. Par exemple la fonction cosinus est continue sur $[-\pi/2, 3\pi/2]$, dérivable sur $]-\pi/2, 3\pi/2[$ et $\cos(-\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$, donc satisfait les hypothèses du théorème de Rolle. La dérivée s'annule en 0 et en π (voir la fig. 3).

2. Chacune des hypothèses du théorème de Rolle est importante. La figure 4 est la représentation graphique de $f : x \longmapsto |\arctan(1/(x-2))|$ prolongée par continuité en posant $f(2) = \pi/2$. Cette application est continue sur $[1,3]$ et on a $f(1) = f(3) = \pi/4$ mais il n'existe pas de réel c vérifiant $f'(c) = 0$. L'hypothèse de dérivabilité de f sur $]1,3[$ n'est pas satisfaite car f n'est pas dérivable en 2. Le théorème de Rolle ne s'applique pas.

Si l'on considère la même fonction sur l'intervalle $]2,3]$ et si l'on pose $f(2) = \pi/4$ alors on a une fonction dérivable sur $]2,3[$ pour laquelle $f(2) = f(3)$ mais il n'existe pas de réel c vérifiant $f'(c) = 0$. L'hypothèse de continuité de f sur $[2,3]$ n'est pas satisfaite car f n'est pas continue en 2. Le théorème de Rolle ne s'applique pas.

3. Les hypothèses du théorème de Rolle sont des conditions suffisantes pour conclure à l'existence d'un réel c annulant la dérivée. Ces conditions ne sont pas des conditions nécessaires.

Copyrighted material

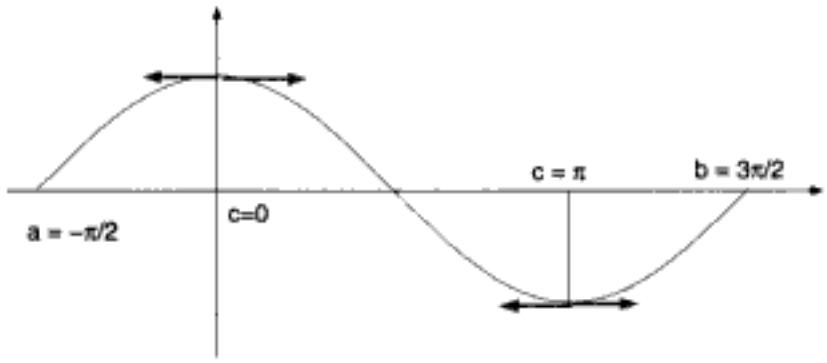


Fig. 3 Illustration de la non-unicité du réel c.

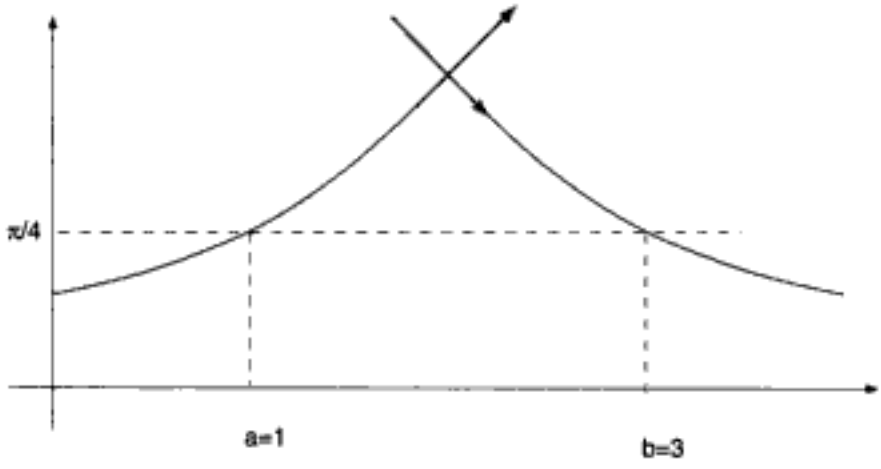


Fig. 4 Illustration des conditions d'application du théorème de Rolle : il manque l'hypothèse de dérivabilité, le théorème ne s'applique pas.

Exercice 7 *Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré N ayant n racines réelles distinctes ($2 \leqslant n \leqslant N$). Montrer que le polynôme P' admet au moins $n-1$ racines réelles distinctes et qu'entre deux racines de P' il y a une racine de P (on dit que les racines de P séparent les racines de P').*

16.2.2 Le théorème des accroissements finis

Théorème 16.2 (théorème des accroissements finis) *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a,b]$. Si,*

1. *f est continue sur $[a,b]$* [6] ;
2. *f est dérivable sur $]a,b[$;*

alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que : $f(b)-f(a) = f'(c)\ (b-a)$.

Copyrighted material

Hidden page

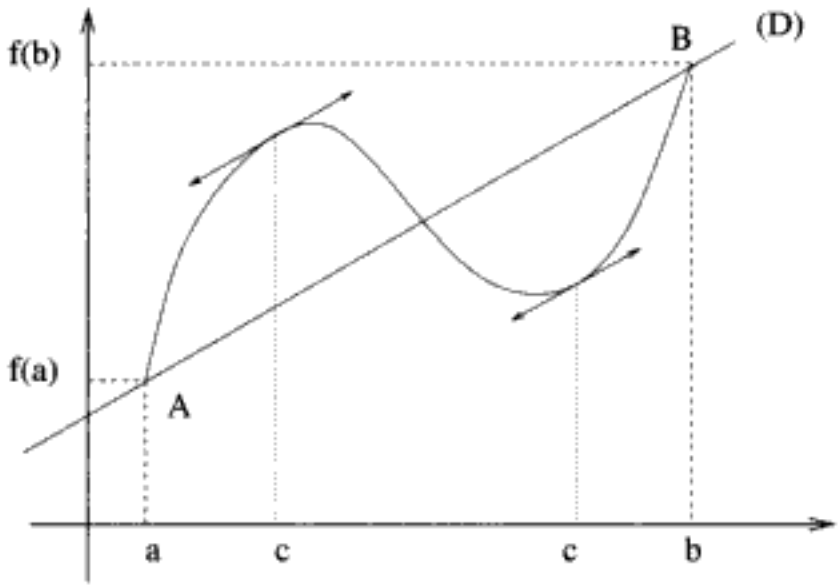


Fig. 5 Interprétation graphique du théorème des accroissements finis.

Démonstration Puisque f' admet pour limite en x_0 le réel ℓ, pour tout réel strictement positif ε fixé

$$\exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \qquad \Big(|x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f'(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\Big). \qquad (2)$$

Soit x un élément de $I \setminus \{x_0\}$ vérifiant $|x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon$. Désignons par J l'intervalle fermé d'extrémités x et x_0 et par $\mathring{J}$ l'intervalle ouvert d'extrémités x et x_0. La restriction de f à l'intervalle J est une application continue sur J et dérivable sur $\mathring{J}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in \mathring{J}$ tel que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c).$$

Le réel c vérifie $|c - x_0| \leqslant |x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon$, donc d'après (2) on en déduit que $|f'(c) - \ell| \leqslant \varepsilon$. On a donc

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = |f'(c) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi on a prouvé que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad \left(|x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}\right| \leqslant \varepsilon\right),$$

autrement dit que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$. Cela permet de conclure que f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) = \ell$. □

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

que $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(x+h)-f(x)\big) \geqslant 0$ (voir la mise en garde et le contre-exemple donnés à la page 578).

Signalons que les résultats donnés dans ce chapitre s'étendent aux applications définies sur $\mathbb{R}$ (et pas seulement sur un intervalle compact $[a,b]$).

16.3.2 Application à la recherche d'extremum

Définition 16.6 *Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$.*

✗ *On dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) en $x_0 \in D$ s'il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 inclus dans D tel que*

$$\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Un maximum ou un minimum local est appelé un extremum local.

✗ *On dit que f admet un maximum global (resp. un minimum global) en $x_0 \in D$ si*

$$\forall x \in D \quad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Remarque Si f admet $f(x_0)$ pour maximum local en $x_0 \in D$ alors $-f$ admet $-f(x_0)$ pour minimum local en x_0.

Proposition 16.10 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle dérivable sur un intervalle ouvert de centre x_0.*

✗ *Si $f(x_0)$ est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.*

✗ *Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0 (f' est positive à gauche de x_0 et négative à droite de x_0 ou inversement) alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.*

Démonstration ⊵ On utilise une idée analogue à celle mise en œuvre dans la démonstration du théorème de Rolle en page 729. Supposons que f admette un maximum local en x_0 (le cas où f admet un minimum local en x_0 s'en déduira d'après la remarque ci-dessus). Il existe un intervalle I de centre x_0 tel que $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in I$. On en déduit que

$$\forall x \in I \quad \left(x > x_0 \implies \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0\right),$$

$$\text{et} \qquad \forall x \in I \quad \left(x < x_0 \implies \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0\right).$$

Cela implique, puisque f est dérivable en x_0, que les dérivées de f à gauche et à droite en 0 vérifient

$$f'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0.$$

Copyrighted material

Mais puisque f est dérivable en x_0 on a

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

Comme $f'_g(x_0) \leqslant 0$ et $f'_d(x_0) \geqslant 0$ on a nécessairement $f'(x_0) = 0$.

$\trianglerighteq$ Supposons que $f'(x_0) = 0$ et que f' change de signe en x_0 (pour fixer les idées, supposons que f' est négative sur un voisinage à gauche de x_0 et positive sur un voisinage à droite de x_0). Cela implique, d'après la proposition 16.9, qu'il existe un réel $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit décroissante sur $[x_0 - \eta, x_0]$ et croissante sur $[x_0, x_0 + \eta]$. On a alors

$$\begin{aligned} &\forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\quad f(x) \geqslant f(x_0), \\ \text{et} \quad &\forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\quad f(x) \geqslant f(x_0), \end{aligned}$$

autrement dit $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. L'application f admet donc un minimum local en x_0.

Si on suppose que f' est positive à gauche de x_0 et négative à droite de x_0, alors on vérifie, en utilisant un raisonnement similaire, que f admet un maximum local en x_0. □

ATTENTION La condition $f'(x_0) = 0$ seule n'implique pas l'existence d'un extremum local. Il est impératif qu'en plus f' change de signe en x_0. Par exemple la fonction $f : x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$. Pourtant on a $f'(0) = 0$.

Exercice 8 *Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ. Le tracteur va deux fois plus vite sur la route que dans le champ. On suppose que le tracteur se déplace sur la route et dans le champ à vitesse constante. La distance AC est désignée par L et la distance CB par d. Déterminer le point D où le tracteur doit quitter la route pour que le temps de parcours de A à B soit minimal. On discutera la solution suivant les valeurs de L et d.*

16.3.3 Étude de la convexité

Définition 16.7 *Une fonction réelle f définie sur un intervalle $[a, b]$ est dite* **convexe sur** *$[a, b]$ si : $\forall (x_1, x_2) \in [a, b]^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$,*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leqslant \lambda\, f(x_1) + (1 - \lambda)\, f(x_2).$$

Une fonction réelle f définie sur $[a, b]$ est dite **concave sur** *$[a, b]$ si l'application $-f$ est convexe, c'est-à-dire, si : $\forall (x_1, x_2) \in [a, b]^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$,*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geqslant \lambda\, f(x_1) + (1 - \lambda)\, f(x_2).$$

Copyrighted material

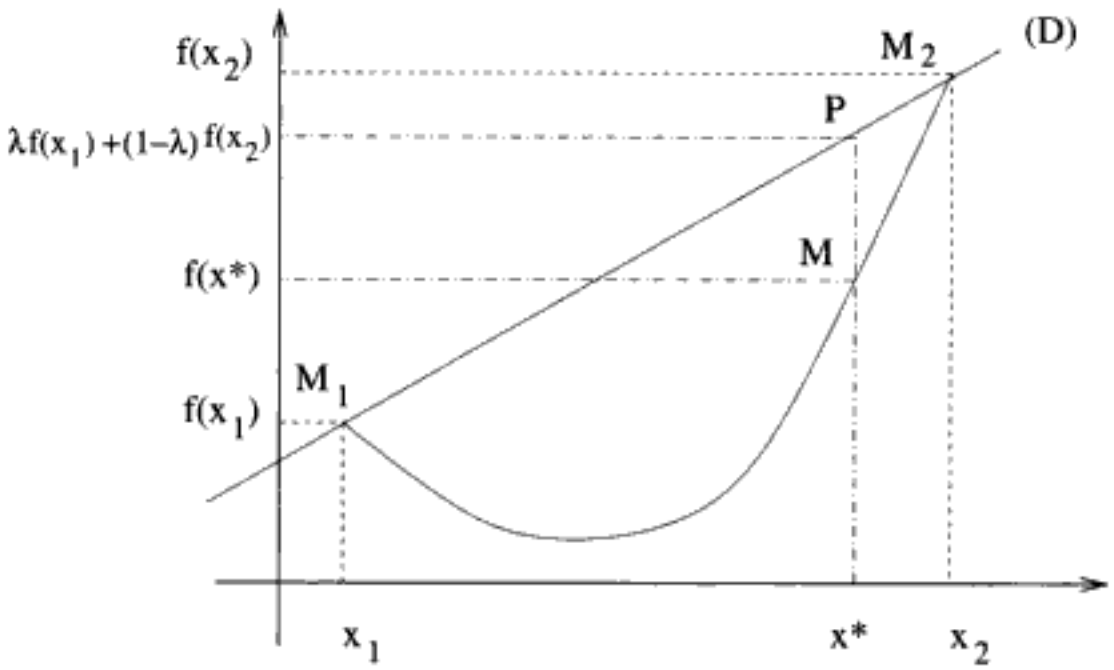


Fig. 6 Interprétation graphique de la convexité.

Exemple L'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &- (\lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)) \\ &= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 - (\lambda\, x_1^2 + (1-\lambda)\, x_2^2) \\ &= \lambda(\lambda-1)\, (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \\ &= \lambda(\lambda-1)\, (x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

Cette quantité est négative pour $\lambda \in [0,1]$, donc, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2).$$

Interprétation graphique de la convexité. Soient $(x_1, x_2) \in [a,b]^2$, $\lambda \in [0,1]$ et $x^* = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Si f est convexe sur $[a,b]$ l'inégalité de convexité indique que le point M de coordonnées $(x^*, f(x^*))$ est au-dessous du point P de coordonnées $(x^*, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2))$ (voir la fig. 6). Si on désigne par M_1 et M_2 les points de la représentation graphique Γ de f de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, la convexité de f sur $[a,b]$ signifie que l'arc d'extrémités M_1, M_2 de Γ est situé sous le segment $[M_1, M_2]$ qui le sous-tend (voir la fig. 6).

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ est convexe si pour tout $(A,B) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ le barycentre $G = \lambda A + (1-\lambda)B$ de (A,λ) et $(B, 1-\lambda)$ appartient à E. Géométriquement, lorsque λ décrit l'intervalle $[0,1]$, le point

Copyrighted material

Hidden page

Démonstration $\trianglerighteq$ Montrons que la condition est suffisante. Supposons que f' soit croissante sur $[a,b]$ et considérons les réels $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, $\lambda \in]0,1[$ et $x^* = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.

D'après les hypothèses, l'application f est continue sur $[x_1, x^*]$ et dérivable sur $]x_1, x^*[$. On en déduit, d'après le théorème des accroissements finis, l'existence d'un réel $c_1 \in]x_1, x^*[$ tel que

$$f(x^*) - f(x_1) = (x^* - x_1)\ f'(c_1).$$

Or $x^* - x_1 = (1-\lambda)\ (x_2 - x_1)$. Le réel c_1 vérifie donc

$$f'(c_1) = \frac{f(x^*) - f(x_1)}{(1-\lambda)\ (x_2 - x_1)}.$$

D'après les hypothèses, l'application f est continue sur $[x^*, x_2]$ et dérivable sur $]x^*, x_2[$. On en déduit, d'après le théorème des accroissements finis, l'existence d'un réel $c_2 \in]x^*, x_2[$ tel que

$$f(x_2) - f(x^*) = (x_2 - x^*)\ f'(c_2).$$

Or $x_2 - x^* = \lambda\ (x_2 - x_1)$. Le réel c_2 vérifie donc

$$f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x^*)}{\lambda\ (x_2 - x_1)}.$$

Comme f' est croissante sur $[a,b]$ et que $c_2 > c_1$, on a $f'(c_2) \geqslant f'(c_1)$. Autrement dit,

$$\frac{f(x_2) - f(x^*)}{\lambda\ (x_2 - x_1)} \geqslant \frac{f(x^*) - f(x_1)}{(1-\lambda)\ (x_2 - x_1)}.$$

On en déduit que pour tout $(x_1, x_2) \in [a,b]^2, x_1 < x_2$, et pour tout $\lambda \in]0,1[$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda\ f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2).$$

Remarquons enfin que si $x_1 = x_2$ ou si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, l'inégalité de convexité est trivialement vérifiée car on a alors

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda\ f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2).$$

On en conclut que pour tout $(x_1, x_2) \in [a,b]^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda\ f(x_1) + (1-\lambda)\ f(x_2)$$

c'est-à-dire que f est convexe sur $[a,b]$.

$\trianglerighteq$ Nous admettons que la condition est nécessaire. □

Corollaire 16.1 *Soit f une application continue sur $[a,b]$ admettant une dérivée seconde sur $]a,b[$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit convexe sur $[a,b]$ est que f'' soit positive sur $]a,b[$.*

Copyrighted material

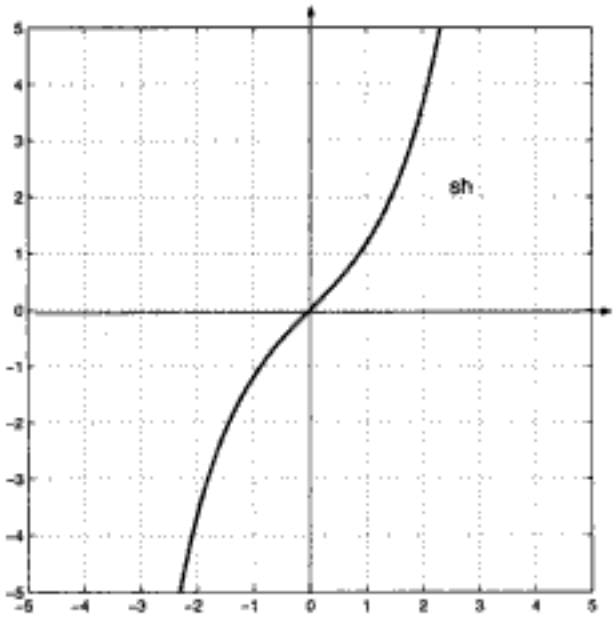
Exemple Les applications : $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto -\ln x$, $x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$, sont convexes sur leur domaine de définition car leurs dérivées secondes y sont positives.

Remarque On montre qu'une fonction réelle convexe sur l'intervalle $[a,b]$ est nécessairement continue sur l'intervalle $]a,b[$ et qu'elle admet en tout point de $]a,b[$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite.

Application à la construction de la représentation graphique d'une application

Soient f une fonction réelle deux fois dérivable sur $]a,b[$ et $x_0 \in]a,b[$. On dit que le point M de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est un ***point d'inflexion*** de la représentation graphique Γ de f si l'on a $f''(x_0) = 0$ et si f'' change de signe au voisinage de x_0. Dans ce cas, d'une application convexe à gauche de x_0 l'application f devient une application concave à droite de x_0 ou inversement[8]. Graphiquement, on dit que la représentation graphique Γ change de concavité en M. Le sens de la concavité donne une information utile pour le tracé de la représentation graphique d'une fonction.

Exemple La fonction sinus hyperbolique admet un point d'inflexion à l'origine.



$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \operatorname{sh} x \quad \text{donc,}$$

$$\begin{cases} f''(x) < 0 & \text{si } x < 0, \\ f''(0) = 0, & \\ f''(x) > 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi, sh est concave sur $\mathbb{R}_-$ et est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

ATTENTION La condition $f''(x_0) = 0$ seule ne suffit pas pour conclure que le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la représentation graphique de f. Il faut en plus s'assurer que la dérivée seconde de f change de signe en x_0. Ainsi l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^4$ a une dérivée seconde qui est nulle pour $x_0 = 0$. Toutefois cette application est convexe sur $\mathbb{R}$ et son graphe n'admet donc pas de point d'inflexion.

[8] Pour différencier visuellement une fonction convexe d'une fonction concave, on pourra observer la forme de la représentation graphique de la fonction : si elle dessine les parois d'une grotte (« *cave* » en anglais) c'est que la fonction est con-cave. Dessiner la représentation graphique de $x \longmapsto x^2$ qui est convexe et de $x \longmapsto -x^2$ qui est concave à titre d'illustration.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Puisque $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ on a

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{x}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

En utilisant la Règle de L'Hôpital on en conclut que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

2. Calculons la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{argsh}(x) - \ln(1+\sqrt{2})}{x^2-1}$. Soient f et g les applications définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \operatorname{argsh}(x)$ et $g(x) = x^2$. On a

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2x\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad f(1) = \ln(1+\sqrt{2}), \quad g(1) = 1.$$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{argsh}(x) - \ln(1+\sqrt{2})}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{2x\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 10 *En utilisant la Règle de L'Hôpital, calculer* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+x} - \mathrm{e}^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$.

ATTENTION L'implication réciproque de la règle de L'Hôpital est fausse. Considérons les applications f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \sin x.$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ mais $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1}{\cos x}\left(2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

16.3.5 Interpolation de Lagrange

LAGRANGE, Joseph (1736, Turin - 1813, Paris).

Lagrange est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du 18e siècle. En 1766, il est nommé Président de l'Académie de Berlin par Frédéric II pour succéder à Euler. En 1787, Lagrange arrive à Paris à l'invitation de Louis XVI. Il échappe de justesse à la mort durant la révolution française. Il contribua à la création du système métrique, à la fondation du Bureau des Longitudes et de l'École Polytechnique. Il fut membre de l'Institut, sénateur, Comte d'Empire et Grand Officier de la Légion d'Honneur.

Copyrighted material

Hidden page

La matrice M est appelée matrice de Vandermonde[13]. La proposition 16.13 nous assure que la matrice de Vandermonde est inversible et que le système linéaire admet une unique solution. Une autre méthode pour démontrer que le système linéaire admet une unique solution (et donc pour démontrer la proposition 16.13) consisterait à établir que le déterminant de la matrice de Vandermonde est non nul.

Exemple Considérons la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Son polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds $-\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$ obtenu en résolvant le système linéaire (S) est

$$P_4 = \frac{8}{3\pi} X - \frac{8}{3\pi^3} X^3.$$

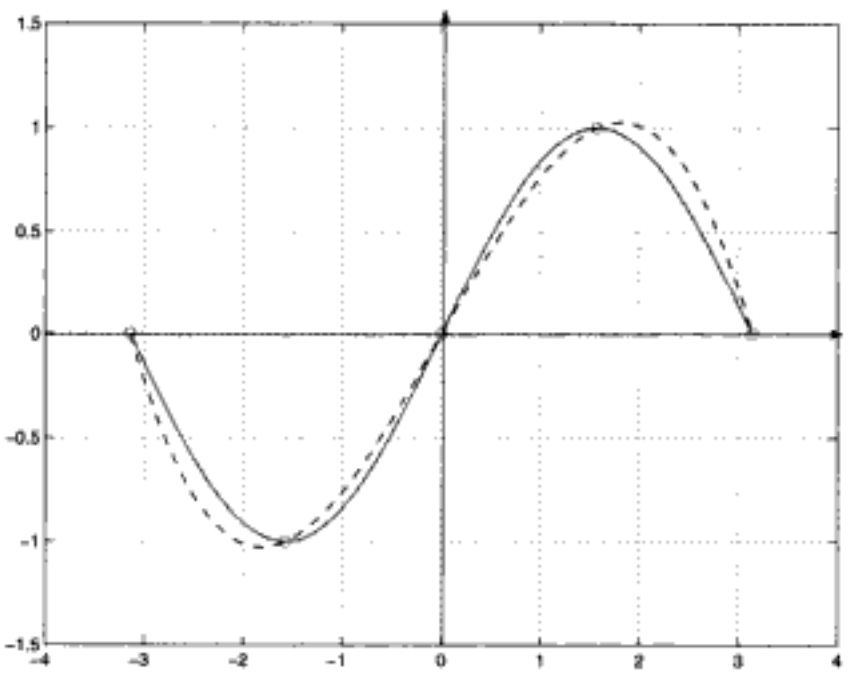


Fig. 8 Représentation graphique de la fonction sinus (en trait plein) et de son polynôme d'interpolation de Lagrange (en trait pointillé) aux nœuds $-\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$.

La fonction polynomiale P_n prend les mêmes valeurs que la fonction f aux nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et « approche » f entre ces points. Pour estimer l'erreur d'interpolation, c'est-à-dire l'écart entre $f(x)$ et $P_n(x)$ pour $x \in [a, b]$, nous avons besoin du lemme 16.1 qui constitue une généralisation du théorème de Rolle.

[13] Alexandre VANDERMONDE (Paris, 1735 - Paris, 1796).

Copyrighted material

Hidden page

Démonstration Pour $t \in [a,b]$ fixé, $t \notin \{x_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$, on note c^* le réel défini par la relation $f(t) - P_n(t) = c^*\ \Pi_{n+1}(t)$ et on considère l'application

$$g : x \longmapsto f(x) - P_n(x) - c^*\Pi_{n+1}(x).$$

Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ on a

$$g(x_i) = \underbrace{f(x_i) - P_n(x_i)}_{=0} - c^* \underbrace{\Pi_{n+1}(x_i)}_{=0} = 0.$$

De plus, $g(t) = f(t) - P_n(t) - c^*\Pi_{n+1}(t) = 0$. D'après le lemme 16.1, il existe donc un réel $\zeta_t \in]a,b[$ tel que $g^{(n+1)}(\zeta_t) = 0$. Par ailleurs, on a d'après la relation définissant g,

$$g^{(n+1)}(\zeta_t) = f^{(n+1)}(\zeta_t) - P_n^{(n+1)}(\zeta_t) - c^*\Pi_{n+1}^{(n+1)}(\zeta_t).$$

P_n étant un polynôme de degré n, $P_n^{(n+1)}$ est le polynôme nul. Π_{n+1} est un polynôme normalisé (voir la définition 6.3 p. 218) de degré $(n+1)$ donc $\Pi_{n+1}^{(n+1)}(\zeta_t) = (n+1)!$. On a ainsi

$$g^{(n+1)}(\zeta_t) = f^{(n+1)}(\zeta_t) - c^*(n+1)!$$

et par conséquent $c^* = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta_t)}{(n+1)!}$. On en déduit que

$$f(t) - P_n(t) = c^*\Pi_{n+1}(t) = \frac{\Pi_{n+1}(t)}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\zeta_t)$$

pour tout réel $t \in [a,b]$, $t \notin \{x_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$.

La relation est également vraie pour $t \in \{x_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$ car pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ on a

$$f(x_i) - P_n(x_i) = 0 = \Pi_{n+1}(x^i),$$

donc pour tout $\zeta_t \in]a,b[$,

$$f(x_i) - P_n(x_i) = \frac{\Pi_{n+1}(c_i)}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\zeta_t).$$

On a ainsi établi que pour tout $t \in [a,b]$, il existe un réel $\zeta_t \in]a,b[$ tel que

$$f(t) - P_n(t) = \frac{\Pi_{n+1}(t)}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\zeta_t).$$

□

Rappelons (voir la p. 568) que si ϕ désigne une application bornée sur l'intervalle $[a,b]$, on note $\|\phi\|_\infty$ la borne supérieure de $|\phi|$ sur $[a,b]$:

$$\|\phi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |\phi(x)|.$$

Copyrighted material

Corollaire 16.2 *Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ admettant une dérivée $(n+1)$-ième sur $]a,b[$ et soit P_n son polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a,b]$. On a*

$$\|f - P_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty \, \|\Pi_{n+1}\|_\infty.$$

Démonstration D'après la proposition 16.14, pour tout réel $t \in [a,b]$ on a

$$|f(x) - P_n(t)| = \frac{|\Pi_{n+1}(t)|}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\zeta_t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty \, \|\Pi_{n+1}\|_\infty.$$

Or $\|f - P_n\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - P_n(t)|$, donc

$$\|f - P_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty \, \|\Pi_{n+1}\|_\infty.$$

□

On remarque que l'erreur d'interpolation dépend à la fois de $f^{(n+1)}$ et de Π_{n+1} c'est-à-dire de la façon dont sont choisis les nœuds d'interpolation.

Exemple Considérons à nouveau la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$. Son polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds $-\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$ est $P_4 = \frac{8}{3\pi}X - \frac{8}{3\pi^3}X^3$. On a de manière évidente $\|\sin^{(n+1)}\|_\infty = 1$. Le polynôme Π_5 a pour expression

$$\Pi_5 = (X+\pi)(X+\pi/2)X(X-\pi)(X-\pi/2).$$

Sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ la fonction polynomiale Π_5 admet des extrema locaux en les réels α tels que $\Pi_5'(\alpha) = 0$. Le polynôme Π_5' a pour expression

$$\Pi_5' = 5X^4 - \frac{15\pi^2}{4}X^2 + \frac{\pi^4}{4}.$$

Le changement d'indéterminée $Y = X^2$ permet d'exprimer Π_5' comme un polynôme de degré 2 en Y et ainsi de calculer ses racines. Il admet 4 racines réelles dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ qui sont

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{145}}{10}}, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{145}}{10}},$$

$$\alpha_3 = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{145}}{10}}, \qquad \alpha_4 = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{145}}{10}}.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

L'application v_{λ^*} est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie (par le choix qui vient d'être fait pour la valeur du paramètre λ) la condition $v_{\lambda^*}(a) = v_{\lambda^*}(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $v'_{\lambda^*}(c) = 0$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} v'_{\lambda^*}(c) = 0 &\iff \left(\lambda^* - f^{(n+1)}(c)\right) \frac{(b-c)^n}{n!} = 0 \\ &\iff \lambda^* = f^{(n+1)}(c) \\ &\iff \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k\right) = f^{(n+1)}(c) \\ &\iff f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \quad + \quad \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \end{aligned}$$

Le théorème est démontré : il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \quad + \quad \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

□

Remarques

1. Le terme $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$ est appelé ***reste de Taylor-Lagrange d'ordre*** n de f en a.

2. On retrouve pour la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 0, la formule des accroissements finis.

Exemple La formule de Taylor-Lagrange peut être utilisée pour établir des inégalités. Montrons par exemple que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

On considère l'application $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \ln(x+1)$. Cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ car la fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1,+\infty[$. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en prenant $b = x$ et $a = 0$: il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(c) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}.$$

Puisque $x \in \mathbb{R}_+$ et que $c \in]0,x[$, la quantité $\dfrac{x^3}{3(1+c)^3}$ est positive. On en déduit que

$$\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}.$$

Copyrighted material

Hidden page

16.5 Applications de la formule de Taylor-Lagrange

16.5.1 Approximation polynomiale

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et admettant une dérivée $(n+1)$ième sur I. Pour $a \in I$, considérons la fonction polynomiale p définie sur $\mathbb{R}$ par

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

On vérifie sans peine que pour tout entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$ on a $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. On peut donc s'attendre à ce que pour n assez grand, la fonction polynomiale p constitue une bonne approximation de la fonction f dans un voisinage de a. La qualité de cette approximation est donnée par la formule de Taylor-Lagrange qui nous indique qu'il existe un réel $c$compris entre a et x tel que

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Supposons que la dérivée $(n+1)$-ième de f sur l'intervalle I soit bornée par le réel positif M :

$$\forall x \in I \qquad |f^{n+1}(x)| \leqslant M.$$

Dans ce cas, l'erreur d'approximation de f par p en $x \in I$ est majorée par

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Cette erreur est petite si M n'est pas trop grand et si n est choisi suffisamment grand. À titre d'exemple, considérons la fonction sinus sur l'intervalle $[0,1]$. On vérifie par récurrence que $f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\pi/2)$. Prenons $n = 4$. La fonction sinus est approchée par la fonction polynomiale

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

avec une erreur qui est en tout point $x \in [0,1]$ plus petite que $1/5!$ soit approximativement 10^{-2} (voir la fig. 9). Il s'agit là d'une majoration de l'erreur : l'erreur en un point donné de l'intervalle $[0,1]$ peut être beaucoup plus petite.

On remarquera que pour une valeur de n fixée, l'approximation devient moins bonne lorsque la distance entre les réels x et a croit car le terme $(x-a)^{n+1}$ devient prédominant. C'est le cas si l'on considère l'approximation de la fonction sinus sur l'intervalle $[0,2]$ (voir la fig. 9).

Copyrighted material

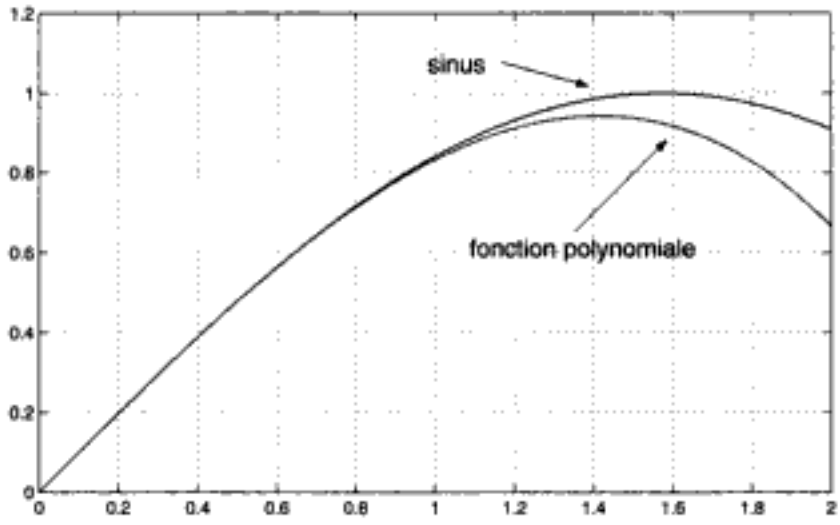


Fig. 9 Approximation de la fonction sinus par la fonction polynomiale $x \longmapsto x - x^3/3!$.

16.5.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point

Soient I un intervalle ouvert, f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $x_0 \in I$. On note A le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Au point A, la représentation graphique Γ de f admet pour tangente la droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0).$$

On cherche à préciser la position de la représentation graphique de f par rapport à la droite $\mathcal{D}$ au voisinage de ce point. Pour cela il faut connaître le signe de

$$u(x) = f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)\big)$$

lorsque x est proche de x_0.

Soit $\nu = \min\{k \geqslant 2 \mid f^{(k)}(x_0) \neq 0\}$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $\nu - 1$ en x_0 indique qu'il existe un réel c_x dans l'intervalle ouvert d'extrémités x_0 et$x$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(\nu)}(c_x)}{\nu!}\ (x - x_0)^\nu.$$

On a donc

$$u(x) = \frac{f^{(\nu)}(c_x)}{\nu!}\ (x - x_0)^\nu.$$

On détermine aisément le signe de $(x - x_0)^\nu$ en fonction de la parité de ν. Par ailleurs

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(\nu)}(c_x)}{\nu!} = \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}$$

Copyrighted material

et $f^{(\nu)}(x_0)/\nu! \neq 0$ donc on peut trouver un voisinage de x_0 sur lequel la quantité $f^{(\nu)}(c_x)$ ne s'annule pas (voir la proposition 13.16 p. 591). Cela implique que pour x assez proche de x_0, $f^{(\nu)}(c_x)$ est du même signe que $f^{(\nu)}(x_0)$

Cela nous donne 4 possibilités pour le signe de u en fonction de la parité de ν et du signe de $f^{(\nu)}(x_0)$.

▷ Supposons que ν est pair. On a alors $(x - x_0)^\nu \geqslant 0$.

1. Si $f^{(\nu)}(x_0) > 0$, alors $u \geqslant 0$ et la représentation graphique Γ reste, au voisinage de A, au-dessus de sa tangente en A (voir la fig. 10).
2. Si $f^{(\nu)}(x_0) < 0$, alors $u \leqslant 0$ et la représentation graphique Γ reste, au voisinage de A, au-dessous de sa tangente en A (voir la fig. 11).

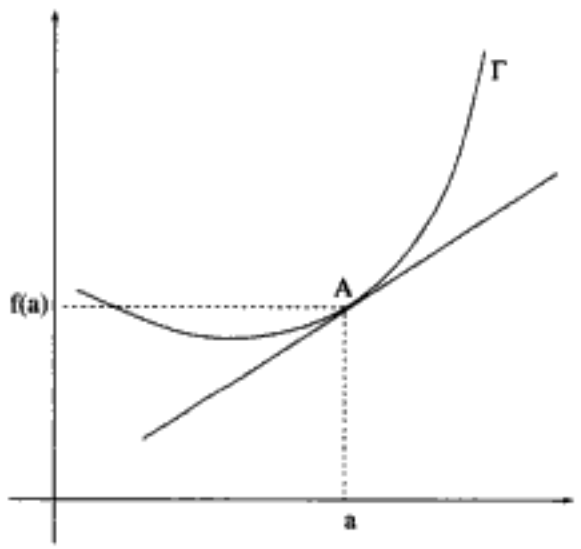


Fig. 10 Cas ν impair et $f^{(\nu)}(x_0) > 0$.

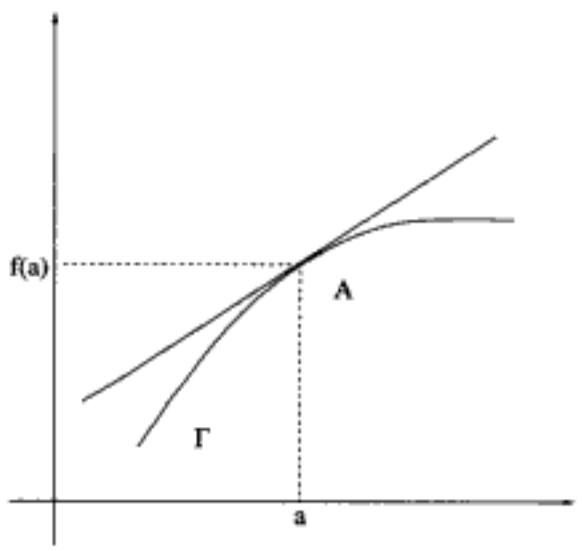


Fig. 11 Cas ν pair et $f^{(\nu)}(x_0) < 0$.

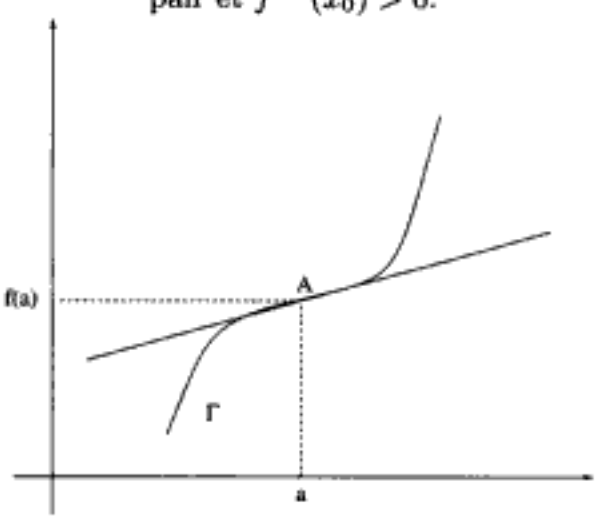


Fig. 12 Cas ν impair et $f^{(\nu)}(x_0) > 0$.

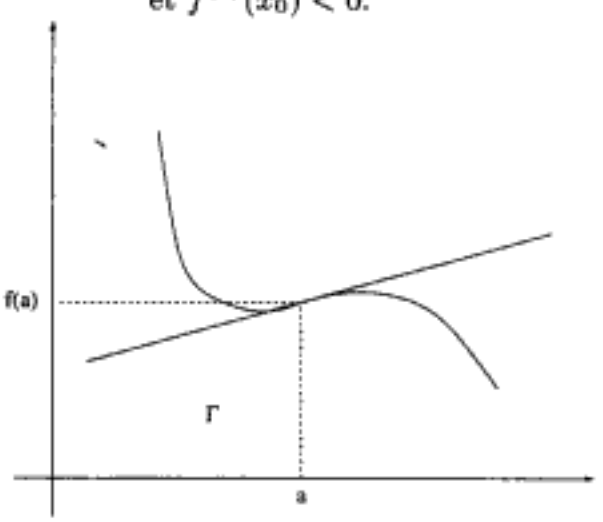


Fig. 13 Cas ν impair et $f^{(\nu)}(x_0) < 0$.

Copyrighted material

▷ Supposons que ν est impair. Dans ce cas $(x-x_0)^\nu$ change de signe en x_0.

1. Si $f^{(\nu)}(x_0) > 0$, alors $u > 0$ si $x > x_0$ et $u < 0$ si $x < x_0$. La représentation graphique Γ est au-dessous de sa tangente en A pour $x < x_0$ et au-dessus de sa tangente en A pour $x > x_0$ (voir la fig. 12).
2. Si $f^{(\nu)}(x_0) < 0$, alors $u < 0$ si $x > x_0$ et $u > 0$ si $x < x_0$. La représentation graphique Γ est au-dessus de sa tangente en A pour $x < x_0$ et au-dessous de sa tangente en A pour $x > x_0$ (voir la fig. 13).

16.6 Exercices de synthèse

Exercice 12 *Soient n un entier naturel et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier en fonction de la valeur de $n \in \{0,1,2,3\}$ la continuité et la dérivabilité des applications f_n sur $\mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'application f_n est-elle de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 13 *Soit f une application dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et admettant une dérivée à droite nulle en 0 et une dérivée à gauche nulle en 1.*

On souhaite montrer que f admet un point fixe dans l'intervalle $]0,1[$ c'est-à-dire montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

1 - Soit g l'application définie sur $]0,1[$ par

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}.$$

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$; en déduire que g est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

2 - Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}.$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 14 ***Méthode de la fausse position.***

On s'intéresse à la fonction ψ définie par $\psi(x) = (1+x) + \arctan(x)$.

1 - a) Donner le tableau de variation de la fonction ψ (en indiquant toutes les limites utiles).

Copyrighted material

b) En déduire qu'il existe un unique réel $\zeta \in]-1,0[$ *tel que* $\psi(\zeta) = 0$.

2 - Déterminer les asymptotes éventuelles de ϕ *et tracer la représentation graphique de la fonction* ψ.

Dans la suite du problème, on étudie une méthode permettant de calculer une valeur approchée du réel ζ.

Soit f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[a,b]$ *vérifiant les conditions suivantes :* $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ *et pour tout réel* $x \in [a,b]$ $f'(x) > 0$ *et* $f''(x) > 0$.

3 - Montrer qu'il existe un unique réel $c \in]a,b[$ *tel que* $f(c) = 0$.

Soit p_0 *la fonction polynomiale de degré 1 définie par* $p_0(a) = f(a)$ *et* $p_0(b) = f(b)$. *On désigne par* c_1 *l'unique réel vérifiant* $p_0(c_1) = 0$ *et on définit l'application* $g = f - p_0$.

4 - a) Montrer que $g''(x) > 0$ *pour tout* $x \in [a,b]$. *En déduire que* g *ne s'annule pas sur* $]a,b[$ *(on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde et le théorème de Rolle).*

b) Montrer qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ *tel que* $g'(x_0) = 0$. *En déduire que* g *est négative sur* $[a,b]$ *(on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange).*

c) Montrer que $p_0(c) > 0$ *et conclure que le réel* c_1 *vérifie :* $a < c_1 < c$.

On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie à partir de* c_1 *par récurrence de la manière suivante. On note* p_n *l'unique fonction polynomiale de degré 1 telle que*

$$p_n(c_n) = f(c_n), \quad p_n(b) = f(b).$$

On définit c_{n+1} *par* $p_n(c_{n+1}) = 0$. *On admet que l'on a l'encadrement :* $a < c_{n+1} < c$.

5 - a) Donner l'expression de p_n *en fonction de* $c_n, b, f(c_n), f(b)$.

b) En déduire que c_{n+1} *est lié à* c_n *par une relation de la forme* $c_{n+1} = \phi(c_n)$ *où* ϕ *est une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *que l'on explicitera.*

6 - Démontrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante.*

7 - Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* c.

8 - Dans le cas particulier où la fonction f *est la fonction* ψ *étudiée à la question 1 (et* $c = \zeta$*), tracer sur un même dessin la représentation graphique de la fonction* ψ *sur l'intervalle* $[-1,0]$ *ainsi que les représentations graphiques des polynômes* p_0, p_1 *qui lui sont associés et placer les points* c_1, c_2.

La méthode de calcul d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ *étudiée ici est connue sous le nom de « méthode de la fausse position ». Pour simplifier l'étude on a supposé que la fonction* f *était convexe mais la méthode peut s'utiliser avec des fonctions n'ayant pas cette propriété.*

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Ces applications sont dérivables sur les ensembles indiqués, la composée est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'application f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'applications dérivables sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de dérivation d'un produit, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_3'(x) = 2^x + x \ln 2 \exp(x \ln 2) = (1 + 2x)\ 2^x.$$

Solution de l'exercice 6

Soient $f_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n$ et $f_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto (1+2x)^n$. Pour tout entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$, les applications f_1 et f_2 admettent pour dérivées k-ième en $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_1^{(k)}(x) &= n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}, \\ f_2^{(k)}(x) &= 2^k n(n-1)\dots(n-k+1)(1+2x)^{n-k} = 2^k \frac{n!}{(n-k)!}(1+2x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Puisque $f = f_1 \times f_2$, on en déduit d'après la formule de Liebniz que

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ f_1^{(n-k)}(x)\ f_2^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ \frac{n!}{k!}x^k\ 2^k \frac{n!}{(n-k)!}(1+2x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^n n!\left(C_n^k\right)^2\ x^k(1+2x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7

Désignons par a_i, $i = 1, \dots, n$ les n racines distinctes de P que l'on ordonne de la manière suivante :

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n.$$

Considérons la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ associée à P. Pour tout entier $i, 1 \leqslant i \leqslant n-1$, cette application est continue sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ et dérivable sur l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. De plus

$$\widetilde{P}(a_i) = \widetilde{P}(a_{i+1}) = 0.$$

D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $\alpha_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que

$$\widetilde{P}'(\alpha_i) = 0.$$

Le réel α_i est par conséquent une racine de P'. On en déduit que le polynôme P possède au moins $n-1$ racines réelles et que ces racines sont séparées par les racines de P :

$$a_1 < \alpha_1 < a_2 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-2} < a_{n-1} < \alpha_{n-1} < a_n.$$

Copyrighted material

Solution de l'exercice 8

On note x la distance AD (voir la fig. 14) et v la vitesse du tracteur sur la route[15]. Le temps de parcours sur la route est x/v. La distance parcourue dans le champ est

$$BD = \sqrt{d^2 + (L-x)^2}$$

et le temps de parcours dans le champ est $BD/(v/2)$. Le temps de parcours total pour aller de A à B en fonction de la distance x parcourue sur la route est donc

$$T(x) = \frac{x}{v} + \frac{2\sqrt{d^2 + (L-x)^2}}{v} = \frac{1}{v}\left(x + 2\sqrt{d^2 + (L-x)^2}\right).$$

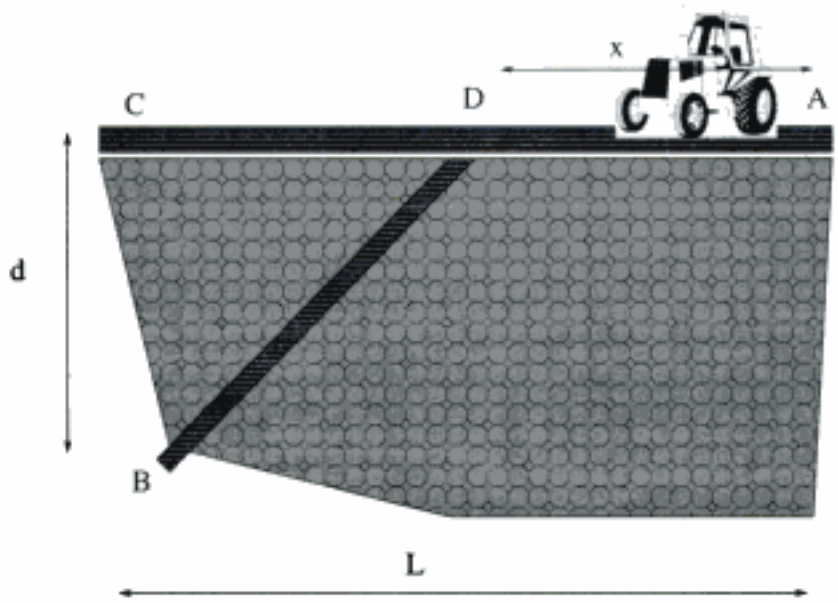


Fig. 14 Situation considérée.

On est donc conduit à déterminer le minimum de la fonction T sur $[0, L]$. Commençons par déterminer les valeurs possibles pour les extremums de T. On vérifie que pour tout $x \in [0, L]$,

$$T'(x) = \frac{1}{v}\left(1 - \frac{2(L-x)}{\sqrt{d^2 + (L-x)^2}}\right).$$

[15] Des renseignements pris auprès d'un agriculteur breton nous permettent d'estimer cette vitesse sur route à 55 km/h.

Copyrighted material

On a alors

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 &\iff \sqrt{d^2 + (L-x)^2} = 2(L-x) \\ &\iff d^2 + (L-x)^2 = 4(L-x)^2 \\ &\iff 3(L-x)^2 = d^2 \\ &\iff L - x = \frac{d}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Le minimum de la fonction T sur $[0, L]$ est à rechercher parmi les valeurs $0, L$ et $x_0 = L - \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ dans la mesure où $x_0 \in]0, L[$. Il est aisé de vérifier que $x_0 \in]0, L[$ si et seulement si $L > d/\sqrt{3}$. On a donc deux cas à envisager.

1. Si $L \leqslant d/\sqrt{3}$ alors T' ne s'annule pas sur $]0, L]$. Le signe de T' sur $[0, L]$ est celui de $T'(L) = 1/v$; il est positif. La fonction T est alors strictement croissante sur $[0, L]$ et son minimum est atteint en 0 et vaut

$$T(0) = \frac{2}{v}\sqrt{L^2 + d^2}.$$

   Pour minimiser le temps de parcours, le tracteur doit quitter le champ en A.

2. Si $L > d/\sqrt{3}$ alors T' s'annule en $x_0 \in]0, L[$. On a $T'(L) = 1/v > 0$ et

$$T'(0) = \frac{1}{v\sqrt{d^2 + L^2}}\left(\sqrt{d^2 + L^2} - 2L\right) = \frac{1}{v\sqrt{d^2 + L^2}} \; \frac{d^2 - 3L^2}{\sqrt{d^2 + L^2} + 2L} < 0,$$

   car $d^2 - 3L^2 < 0$ sous l'hypothèse $L > d/\sqrt{3}$. T est donc décroissante[16] sur $[0, x_0]$ et croissante sur $[x_0, L]$. On en déduit que T admet un minimum en x_0. Pour minimiser le temps de parcours, le tracteur doit quitter la route à une distance

$$x_0 = L - \frac{d}{\sqrt{3}}$$

   du point A. Le temps de parcours est alors

$$T(x_0) = \frac{L + d\sqrt{3}}{v}.$$

Solution de l'exercice 9

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que composée d'une fonction polynomiale par la fonction exponentielle). Pour tout réel x on a

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

[16] On rappelle qu'une fonction peut s'annuler en un point sans changer de signe. C'est le cas de la fonction carrée en 0. On ne peut donc pas conclure que $T'(0) < 0$ à partir de la seule information $T'(L) > 0$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Puisque $f' > 0$, f est croissante sur $[a, b]$ donc $f(b) - f(c_k) > 0$. D'autre part, par hypothèse $c_k \leqslant c$ et $f(c) = 0$ donc $f(c_k) < 0$. On en déduit que $c_{k+1} - c_k > 0$ et que la suite $(c_k)_k$ est croissante.

7 - La suite $(c_k)_k$ est croissante et majorée par b donc elle converge. Cette suite étant définie par la relation de récurrence $c_{k+1} = \phi(c_k)$, elle converge nécessairement vers l'une des solutions de l'équation $x = \phi(x)$. Or

$$x = \phi(x) \iff x = x - f(x)\frac{b-x}{f(b)-f(x)} \iff f(x)\frac{b-x}{f(b)-f(x)} = 0$$
$$\iff f(x) = 0$$

(la dernière équivalence résultant du fait que f est strictement croissante sur $[a, b]$). L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $[a, b]$ qui est c. La suite $(c_k)_k$ converge donc vers c.

8 - Les représentations graphiques de la fonction ψ et des polynômes p_0, p_1 sur l'intervalle $[-1, 0]$ sont données à la figure 16.

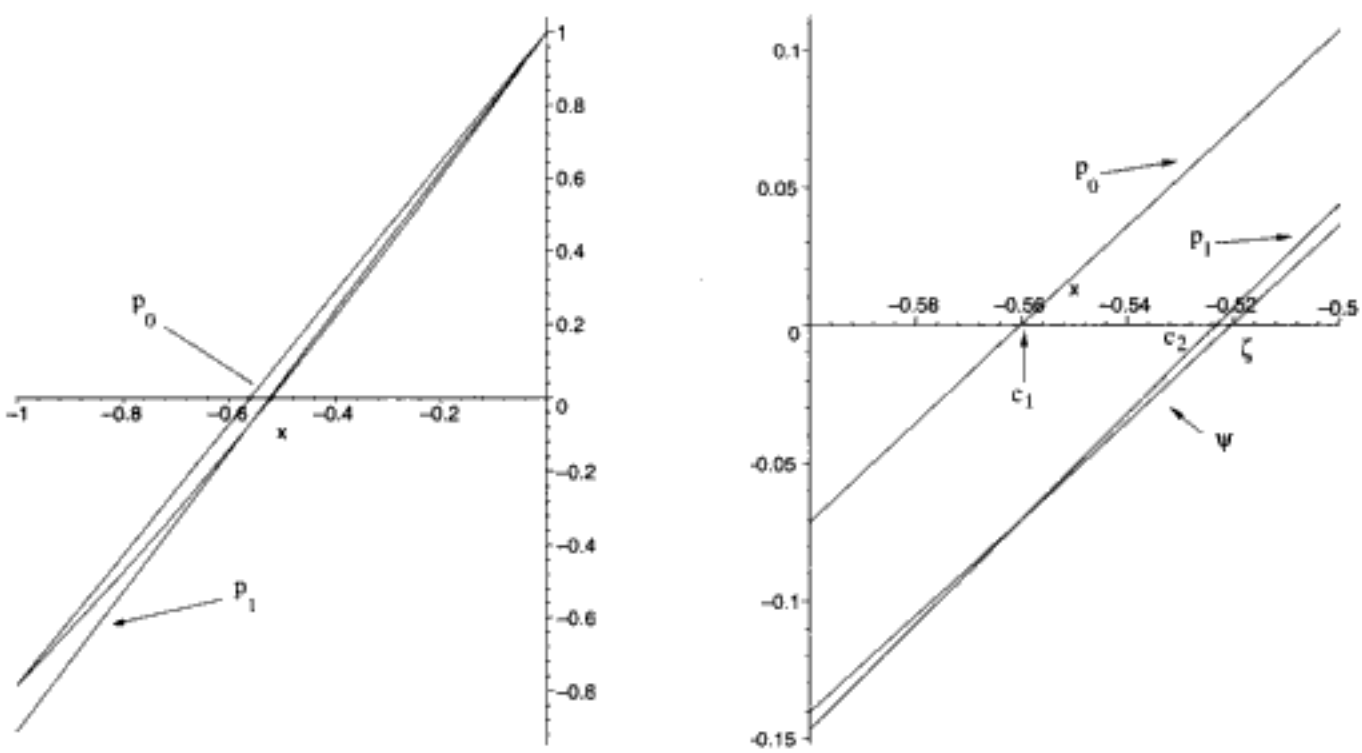


Fig. 16 Représentations graphiques de la fonction ψ et des polynômes p_0, p_1 sur l'intervalle $[-1, 0]$.

Copyrighted material

Dans le cas de la fonction ψ, l'utilisation de cette méthode pour calculer c donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned} c_1 &= -.5600991535 \\ c_2 &= -.5231330281 \\ c_3 &= -.5204706485 \\ c_4 &= -.5202831687 \\ c_5 &= -.5202699892 \\ c_6 &= -.5202690628 \\ c_7 &= -.5202689977 \\ c_8 &= -.5202689931 \\ c_9 &= -.5202689927 \end{aligned}$$

Cette dernière valeur coïncide avec la valeur exacte à 10^{-10} près.

Copyrighted material

Hidden page

CHAPITRE 17

Développements limités

17.1 Définition et généralités

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que l'on dit que f ***est définie au voisinage de*** x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 telle que $V \setminus \{x_0\}$ soit inclus dans le domaine de définition de f. Si f est définie **sur** un voisinage de x_0 alors elle est définie **au** voisinage de x_0. Une fonction définie **au** voisinage de x_0 est définie **sur** un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0. Dans ce chapitre, on confondra au niveau des notations un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée, le contexte permettant toujours de lever l'ambiguïté.

Définition 17.1 *Soient n un entier et f une application définie au voisinage de 0. On dit que f* ***admet un développement limité d'ordre n en 0*** *(on note de façon abrégée $DL_n(0)$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un voisinage V de 0 et une application ε définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que*

$$\forall x \in V \setminus \{0\} \qquad f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

La fonction polynomiale P est appelée ***partie régulière*** *du développement limité d'ordre n en 0.*

Remarques

1. La fonction $R : x \longmapsto x^n \varepsilon(x)$ est appelée ***reste*** du développement limité d'ordre n en 0. On a $R(x) = f(x) - P(x) = o_0(x^n)$.

2. Il est clair d'après la définition, que toute fonction polynomiale f admet un développement limité à tout ordre en 0. Si $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ et $n \geqslant m$ alors la partie régulière du développement limité d'ordre n en 0 est la fonction elle-même et le reste est la fonction nulle. Si $n < m$ alors la partie régulière est $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et le reste est

$$R(x) = \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = x^n \sum_{k=1}^{m-n} a_{k+n} x^k = x^n \varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{m-n} a_{k+n} x^k.$$

Copyrighted material

Ainsi la fonction polynomiale $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x^3 + x + 4$ admet un développement limité à l'ordre 2 dont la partie régulière est $x + 4$ et elle admet un développement limité à l'ordre 4 dont la partie régulière est $2x^3 + x + 4$.

3. Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P alors pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell \leqslant n$, f admet un développement limité d'ordre ℓ en 0 dont la partie régulière est obtenue en ne considérant que les monômes de degré au plus égal à ℓ de P.

4. S'il existe un polynôme P de degré au plus égal à n tel qu'au voisinage de 0 on ait

$$f(x) = P(x) + \mathcal{O}_0(x^{n+1}) \tag{1}$$

alors on a *a fortiori*

$$f(x) = P(x) + o_0(x^n) \tag{2}$$

et P est la partie régulière du développement limité d'ordre n en 0 de f. Les écritures (1) et (2) sont toutes deux correctes. La première en dit plus sur le comportement de f au voisinage de 0. On dit qu'elle correspond à un développement limité d'ordre n en 0 au sens fort de f. C'est l'écriture qui est utilisée par le logiciel de calcul formel MAPLE pour exprimer les développements limités.

Proposition 17.1 (unicité du développement limité) *Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0, celui-ci est unique.*

Démonstration On utilise un raisonnement par l'absurde.

$\trianglerighteq$ Supposons que f admette en 0 deux développements limités d'ordre n distincts. Il existe alors un polynôme $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un voisinage V_1 de 0 et une application ε_1 définie sur $V_1 \setminus \{0\}$ tels que

$$\forall x \in V_1 \setminus \{0\} \qquad f(x) = P_1(x) + x^n \varepsilon_1(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

et il existe un polynôme $P_2 \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un voisinage V_2 de 0 et une application ε_2 définie sur $V_2 \setminus \{0\}$ tels que

$$\forall x \in V_2 \setminus \{0\} \qquad f(x) = P_2(x) + x^n \varepsilon_2(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

L'hypothèse que les deux développements limités sont distincts se traduit par : ou bien $P_1 \neq P_2$ ou bien $P_1 = P_2$ et $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Notons $U = V_1 \cap V_2$, $P_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $P_2 = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

$\trianglerighteq$ Envisageons tout d'abord le cas où $P_1 = P_2$ sur $U \setminus \{0\}$. Par différence des deux développements limités, on obtient

$$0 = x^n \, (\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)) \qquad \forall x \in U \setminus \{0\}.$$

Cela implique que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ sur $U \setminus \{0\}$.

Copyrighted material

$\trianglerighteq$ Supposons maintenant que $P_1 \neq P_2$ et désignons par Q le polynôme (non nul) $P_1 - P_2$. La valuation ν de Q vérifie $0 \leqslant \nu \leqslant n$ et on a

$$Q(x) \underset{0}{\sim} (a_\nu - b_\nu)x^\nu.$$

D'autre part pour tout $x \in U \setminus \{0\}$ on a

$$\begin{aligned} Q(x) &= P_1(x) - P_2(x) = \big(f(x) - x^n\varepsilon_1(x)\big) - \big(f(x) - x^n\varepsilon_2(x)\big) \\ &= x^n\,(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)). \end{aligned}$$

On aboutit à la contradiction suivante : $Q(x) \underset{0}{\sim} (a_\nu - b_\nu)x^\nu$ et $Q(x) = o_0(x^n)$ avec $\nu \leqslant n$. Si la fonction polynomiale Q est équivalente au voisinage de 0 à $(a_\nu - b_\nu)x^\nu$ alors on a $x^k = o_0(Q(x))$ pour $k \geqslant \nu$. Puisque $n \geqslant \nu$, on ne peut donc pas avoir $Q(x) = o_0(x^n)$. On a donc nécessairement $P_1 = P_2$. D'après la première partie de la démonstration, on en déduit que cela implique que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

On a ainsi démontré que, si une fonction admettait un développement limité d'ordre n en 0, celui-ci était nécessairement unique. □

Proposition 17.2 (développement limité et parité) *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P.*

✗ *Si f est paire alors la fonction polynomiale P est paire. Autrement dit, les coefficients des monômes de degré impair de P sont nuls.*

✗ *Si f est impaire alors la fonction polynomiale P est impaire. Autrement dit, les coefficients des monômes de degré pair de P sont nuls.*

Démonstration Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P au voisinage de 0 alors il existe un voisinage V de 0 et une application ε définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Puisque V est un voisinage de 0, il existe un réel η strictement positif tel que l'intervalle ouvert $I =]-\eta, \eta[$ soit inclus dans V. On a alors pour $x \in I \setminus \{0\}$

$$f(-x) = P(-x) + (-1)^n\,x^n\varepsilon(-x) = P(-x) + x^n\varepsilon_2(x),$$

où la fonction ε_2 est définie sur I par $\varepsilon_2(x) = (-1)^n\,\varepsilon(-x)$ et vérifie donc $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

$\trianglerighteq$ Si f est paire alors pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = f(x)$. Par unicité du développement limité d'ordre n en 0 on en déduit que $P(-x) = P(x)$ pour tout $x \in I$ (et par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$). Autrement dit la fonction polynomiale P est paire.

$\trianglerighteq$ Si f est impaire alors pour tout $x \in I$ on a $f(-x) = -f(x)$. Par unicité du développement limité d'ordre n en 0 on en déduit que $P(-x) = -P(x)$ pour tout $x \in I$ (et par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$). Autrement dit, la fonction polynomiale P est impaire. □

Copyrighted material

Proposition 17.3 ✗ *Pour qu'une fonction f admette un développement limité d'ordre 0 en 0, il faut et il suffit que f soit continue en 0 (ou prolongeable par continuité en 0). On a alors dans un voisinage de 0,*

$$f(x) = f(0) + o_0(1).$$

✗ *Pour qu'une fonction f admette un développement limité d'ordre 1 en 0, il faut et il suffit que f soit dérivable en 0. On a alors dans un voisinage de 0,*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o_0(x).$$

Démonstration ⊵ On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } 0 &\iff \lim_{x\to 0}\Big(f(x) - f(0)\Big) = 0 \\ &\iff f(x) - f(0) = o_0(1). \end{aligned}$$

Donc si f est continue en 0 alors elle admet un développement limité d'ordre 0 en 0 de partie régulière $f(0)$. Réciproquement, supposons que f admette un développement limité d'ordre 0 en 0. Il existe alors un voisinage V de 0, un polynôme P de degré au plus 0 et une application ε définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On en déduit que l'application f admet pour limite en 0 le réel $P(0)$. Elle est donc continue en 0 (ou prolongeable par continuité en 0).

⊵ On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } 0 &\iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \\ &\iff \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = o_0(1) \text{ au voisinage de } 0 \\ &\iff f(x) = f(0) + xf'(0) + o_0(x) \text{ au voisinage de } 0. \end{aligned}$$

Donc si f est dérivable en 0, elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0 de partie régulière $f(0)+xf'(0)$. Réciproquement, supposons que f admette un développement limité d'ordre 1 en 0. Elle admet alors aussi un développement limité d'ordre 0 en 0 et, d'après la première partie de la démonstration, f est continue en 0. Par ailleurs, d'après la définition 17.1, il existe un voisinage V de 0, un polynôme P de degré au plus 1 et une application ε définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in V \setminus \{0\}$

$$f(x) = P(x) + x\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Le polynôme P est de la forme $P = f(0) + \alpha X$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \alpha + \varepsilon(x)$$

Copyrighted material

et par conséquent que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \alpha.$$

Cela permet de conclure que f est dérivable en 0, de nombre dérivé α. □

Remarques

1. La proposition 17.3 contient un abus de langage fréquent : la fonction f peut admettre un développement limité d'ordre n en 0 sans être définie en 0. On ne peut pas alors vraiment parler de la continuité de f en 0. Dans ce cas il faut lire : pour que f admette un développement limité d'ordre 0 en 0, il faut et il suffit que f soit prolongeable par continuité en 0. Pour ne pas alourdir inutilement les énoncés nous ferons systématiquement cet abus de langage, en précisant les choses si nécessaire.

2. On déduit de la proposition 17.3 qu'une fonction qui n'est pas continue en 0 n'admet de développement limité à aucun ordre en 0 (c'est le cas par exemple de la fonction logarithme).

Exemples

1. Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + x^3 \sin(1/x^2)$. Cette application admet un développement limité d'ordre 1 en 0 de partie régulière x. En effet, l'encadrement

$$0 \leqslant \left| x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right| \leqslant x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

permet d'établir que $\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0$ puis que

$$x^3 \sin \frac{1}{x^2} = o_0(x).$$

On en déduit que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ et que ce prolongement est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 1$.

2. Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \ln|x|$. Cette application est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Elle est dérivable en 0 de dérivée 0 puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \ln|x| = 0.$$

Elle admet donc $0 + o_0(x)$ pour développement limité d'ordre 1 en 0. Par contre on peut vérifier que f n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0. Si f admettait un développement limité d'ordre 2 en 0, celui-ci serait de la forme $ax^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Or

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - ax^2}{x^2} = \ln|x| - a$$

Copyrighted material

et cette quantité ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0.

ATTENTION Pour $\mathbf{n \geqslant 2}$ une application peut admettre un développement limité d'ordre n en 0 sans être n fois dérivable en 0 comme le montre l'exemple suivant. L'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x + x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée l'application (à vérifier à titre d'exercice),

$$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 + 3x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} - 2\cos \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

L'application f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 de partie régulière x (voir l'exemple précédent). Cependant f n'est pas deux fois dérivable en 0 car f' n'est pas continue à l'origine (cela est dû au terme $2\cos(1/x^2)$ qui n'a pas de limite quand x tend vers 0).

On peut se demander à quelle condition une fonction admet un développement limité d'ordre n en 0 pour $n \geqslant 2$. La réponse est donnée par le théorème de Taylor-Young. Ce théorème est également l'outil de base pour calculer un développement limité.

17.2 Le théorème de Taylor-Young

Théorème 17.1 (formule de Taylor-Young[1]) *Soient f une application définie sur un intervalle ouvert I, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in I$. On suppose que f est $(n-1)$ fois dérivable sur I et admet une dérivée n-ième en x_0. Pour tout $x \in I$ on a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Cette relation est appelée ***formule de Taylor-Young à l'ordre*** *n.*

Démonstration Nous allons montrer le résultat par récurrence.

[1] YOUNG, William Henry (1863, Londres - 1942, Lausanne). Young travailla principalement sur le développement en série des fonctions (séries de Fourier en particulier). Il donna une expression du reste dans la formule de Taylor. Ne pas le confondre avec le célèbre physicien anglais Thomas Young (1773-1829) qui découvrit les interférences lumineuses.

Copyrighted material

Hidden page

d'après la relation (4) pour tout $x \in I$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\phi^{(n-1)}(x)-\phi^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\\ &= \underbrace{\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}}_{=\Delta(x)} - f^{(n)}(x_0).\end{aligned}$$

Puisque f admet une dérivée n-ième en x_0, la quantité $\Delta(x)$ tend vers $f^{(n)}(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. On en déduit que ϕ admet une dérivée n-ième en x_0 qui prend la valeur 0. On a donc établi que la fonction ϕ est $(n-1)$ fois dérivable sur I et qu'elle admet une dérivée n-ième en x_0. Cela implique que la fonction ϕ' est $(n-2)$ fois dérivable sur I et qu'elle admet une dérivée $(n-1)$-ième en x_0. La fonction ϕ' satisfait donc aux conditions de l'hypothèse de récurrence et on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre $(n-1)$. On obtient

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\phi')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^{n-1})\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\phi^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^{n-1})\\ &= o_{x_0}((x-x_0)^{n-1}).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\phi'(x)}{\big((x-x_0)^n\big)'} = \frac{1}{n}\lim_{x\to x_0}\frac{\phi'(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0.$$

D'après la règle de L'Hôpital (les fonctions ϕ et $r : x \longmapsto (x-x_0)^n$ sont continues et dérivables sur un voisinage de x_0 et $\phi(x_0) = r(x_0) = 0$) on en déduit que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\phi(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{r(x)-r(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\phi'(x)}{r'(x)} = 0$$

autrement dit que $\phi(x) = o_{x_0}((x-x_0)^n)$. La formule de Taylor-Young à l'ordre n est démontrée et le raisonnement par récurrence achevé. □

Remarque Les hypothèses sont plus faibles que celles du théorème de Taylor-Lagrange (on ne suppose pas que $f^{(n+1)}$ existe sur I), mais on n'a pas d'expression précise pour le reste (on sait seulement qu'il est négligeable devant $(x-x_0)^n$ au voisinage de x_0).

Corollaire 17.1 *Une application f qui est n fois dérivable en 0 admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o_0(x^n).$$

Copyrighted material

Remarques

1. On déduit du théorème 17.1 qu'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 admet des développements limités à tout ordre en 0.

2. Rappelons (voir le contre-exemple donné dans la section précédente) que la réciproque est fausse : une application peut admettre un développement limité d'ordre n en 0 sans être n fois dérivable en 0.

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir le développement limité d'ordre n en 0 de plusieurs fonctions usuelles.

❑ Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^x$. On a $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout entier k. On en déduit que le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction exponentielle est,

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n).$$

❑ Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x$. Pour tout entier ℓ pair ($\ell = 2k, k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = 0$ et pour tout entier ℓ impair ($\ell = 2k+1, k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = (-1)^k$. On en déduit que le développement limité d'ordre $n = 2p+2, p \in \mathbb{N}$, en 0 de la fonction sinus est,

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_0(x^{2p+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2p+2}). \end{aligned}$$

On remarquera que le développement limité d'ordre $n = 2p+1, p \in \mathbb{N}$, en 0 de la fonction sinus admet la même partie régulière que le développement limité d'ordre $n = 2p+2, p \in \mathbb{N}$, en 0, cela en raison de la parité de la fonction sinus.

❑ Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x$. Pour tout entier ℓ pair ($\ell = 2k, k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = (-1)^k$ et pour tout entier ℓ impair ($\ell = 2k+1, k \in \mathbb{N}$) on a $f^{(\ell)}(0) = 0$. On en déduit que le développement limité d'ordre $n = 2p+1, p \in \mathbb{N}$, en 0 de la fonction cosinus est,

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o_0(x^{2p+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2p+1}). \end{aligned}$$

Copyrighted material

On remarquera que le développement limité d'ordre $n = 2p, p \in \mathbb{N}$, en 0 de la fonction cosinus admet la même partie régulière que le développement limité d'ordre $n = 2p+1, p \in \mathbb{N}$, en 0, cela en raison de la parité de la fonction cosinus.

❑ Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \operatorname{sh} x$. Pour tout entier ℓ pair $(\ell = 2k, k \in \mathbb{N})$ on a $f^{(\ell)}(0) = 0$ et pour tout entier ℓ impair $(\ell = 2k+1, k \in \mathbb{N})$ on a $f^{(\ell)}(0) = 1$. On en déduit que le développement limité d'ordre $n = 2p + 2, p \in \mathbb{N}$, en 0 de la fonction sinus hyperbolique est

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_0(x^{2p+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2p+2}). \end{aligned}$$

On remarquera que le développement limité d'ordre $n = 2p+1, p \in \mathbb{N}$, en 0 de la fonction sinus hyperbolique admet la même partie régulière que le développement limité d'ordre $n = 2p + 2, p \in \mathbb{N}$, en 0, cela en raison de la parité de la fonction sinus hyperbolique.

❑ Considérons l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \operatorname{ch} x$. Pour tout entier ℓ pair $(\ell = 2k, k \in \mathbb{N})$ on a $f^{(\ell)}(0) = 1$ et pour tout entier ℓ impair $(\ell = 2k+1, k \in \mathbb{N})$ on a $f^{(\ell)}(0) = 0$. On en déduit que le développement limité d'ordre $n = 2p + 1, p \in \mathbb{N}$, en 0 de la fonction cosinus hyperbolique est,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o_0(x^{2p+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2p+1}). \end{aligned}$$

On remarquera que le développement limité d'ordre $n = 2p, p \in \mathbb{N}$, en 0 de la fonction cosinus admet la même partie régulière que le développement limité d'ordre $n = 2p+1, p \in \mathbb{N}$, en 0, cela en raison de la parité de la fonction cosinus.

❑ Considérons l'application $f : x \in]-1, 1[\longmapsto \dfrac{1}{1-x}$. Par récurrence, on vérifie que pour tout entier k non nul on a $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. On en déduit le développement limité d'ordre n en 0 suivant,

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Mais $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et $Q(0) \neq 0$, donc le terme

$$\varepsilon_3(x) = \frac{-U(x)\varepsilon_2(x) + xR(x) + \varepsilon_1(x)}{Q(x) + x^n\varepsilon_2(x)}$$

a pour limite 0 lorsque x tend vers 0. Finalement on a établi que pour tout $x \in \mathcal{V}$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = U(x) + x^n\varepsilon_3(x) \qquad \text{avec} \quad \deg(U) \leqslant n \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0.$$

Cela constitue le développement limité d'ordre n en 0 de f/g puisque celui-ci est unique. □

Exemple Les fonctions sinus et cosinus admettent en 0 pour développements limités d'ordre 3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^3) \qquad \text{et} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o_0(x^3).$$

On obtient donc les développements limités d'ordre 3 suivants en 0 pour les fonctions $\sin + \cos$ et $\sin \times \cos$,

$$\begin{aligned}
\sin x + \cos x &= 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^3); \\
\sin x \times \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + o_0(x^3) \\
&= x - \frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^5}{12}}_{= o_0(x^3)} + o_0(x^3) \\
&= x - \frac{2x^3}{3} + o_0(x^3).
\end{aligned}$$

Exercice 1 *Montrer que le développement limité d'ordre* 3 *en* 0 *de la fonction* $x \longmapsto \operatorname{ch} x \sin x$ *a pour partie régulière* $x + \dfrac{x^3}{3}$.

Exemple Déterminons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction tangente. Pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ on a $\tan x = \sin x / \cos x$ et les fonctions sinus et cosinus admettent en 0 pour développements limités d'ordre 3 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \qquad \text{et} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o_0(x^3).$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Ce résultat permet d'obtenir les développements limités d'ordre n en 0 de plusieurs fonctions usuelles.

❑ La dérivée de l'application $f : x \in]-1,+\infty[\longmapsto \ln(1+x)$ admet pour développement limité d'ordre $n-1$ en 0,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o_0(x^{n-1}).$$

Puisque $f(0) = 0$, on obtient le développement limité d'ordre n suivant pour f en 0,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + o_0(x^n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\,\frac{x^k}{k} + o_0(x^n). \end{aligned}$$

❑ La dérivée de l'application $f : x \in]-\infty,1[\longmapsto \ln(1-x)$ admet pour développement limité d'ordre $n-1$ en 0,

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{n-1} x^k + o_0(x^{n-1}).$$

Puisque $f(0) = 0$, on obtient le développement limité d'ordre n suivant pour f en 0,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o_0(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o_0(x^n).$$

❑ Soient p un entier et $n = 2p+1$. La dérivée de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \arctan x$ admet pour développement limité d'ordre $n-1$ en 0,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k x^{2k} + o_0(x^{2p}).$$

Puisque $f(0) = 0$, on obtient le développement limité d'ordre $n = 2p+1$ suivant pour f en 0 :

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^p\,\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o_0(x^{2p+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_0(x^{2p+1}). \end{aligned}$$

Copyrighted material

Hidden page

Démonstration Supposons que f' admet un développement limité d'ordre $(n-1)$ en 0 de partie régulière P. Il existe alors un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à $(n-1)$, un voisinage V de 0 et une application ε définie sur $V \setminus \{0\}$ tels que

$$\forall x \in V \setminus \{0\} \qquad f'(x) = P(x) + x^{n-1}\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

D'après la proposition 17.6, on en déduit que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t + o_0(x^n).$$

Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière Q alors par unicité du développement limité on a

$$Q(x) = f(0) + \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t$$

ce qui signifie que Q est la primitive de P qui vaut $f(0)$ en 0. On a par conséquent $P = Q'$. □

Exemple L'application $f : x \in]-1,1[\longmapsto 1/(1+x)$ admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière $1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$. Elle a pour dérivée l'application $f' : x \in]-1,1[\longmapsto -1/(1+x)^2$ qui est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et qui par conséquent admet des développements limités à tout ordre en 0. On en déduit d'après la proposition 17.6 que f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ de partie régulière

$$-1 + 2x - 3x^2 + \ldots + (-1)^n n x^{n-1}.$$

On peut également obtenir ce développement limité par d'autres méthodes. Par exemple en effectuant une division selon les puissances croissantes de -1 par $1 + 2X + X^2$, ou en effectuant le produit du développement limité de $1/(1+x)$ par lui même, ou encore en utilisant la composition de développements limités comme cela est proposé dans l'exercice qui suit.

Exercice 3 *En remarquant que $f' = g \circ h$ où*

$$h : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + 2x \qquad \textit{et} \qquad g : y \in]-1,1[\longmapsto -\frac{1}{1+y}$$

et en utilisant la proposition 17.5 relative au développement limité d'une fonction composée, retrouver l'expression du développement limité d'ordre 4 en 0 de f'.

Copyrighted material

ATTENTION Le corollaire 17.2 ne dit pas que si f admet un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière Q alors on peut en déduire que f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0 dont la partie régulière est $P = Q'$. Il est nécessaire de s'assurer au préalable que f' admet bien un développement limité : f peut admettre un développement limité sans que f' n'admette de développement limité. À titre de contre-exemple, considérons l'application

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 + x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Cette application est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée l'application

$$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} - 2\cos \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Nous avons démontré précédemment que la fonction f admettait un développement limité d'ordre 2 en 0 de partie régulière x^2 mais f' qui n'est pas continue en 0 ne peut pas posséder de développement limité en 0. Il serait donc inexact d'affirmer que le développement limité d'ordre 1 en 0 de f' a pour partie régulière $2x$.

Exercice 4 *Calculer le développement limité au voisinage de* 0 *de*

1. $x \longmapsto \sin x \cos 2x$ *à l'ordre* 6
2. $x \longmapsto \cos x \ \ln(1+x)$ *à l'ordre* 4
3. $x \longmapsto (x^3+1)\sqrt{1-x}$ *à l'ordre* 3
4. $x \longmapsto \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ *à l'ordre* 2
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x} \ \ln(1+x)$ *à l'ordre* 3
6. $x \longmapsto \exp(\arcsin(x))$ *à l'ordre* 3
7. $x \longmapsto (1+\arctan x)^{x/\sin^2(x)}$ *à l'ordre* 2
8. $x \longmapsto x\ (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$ *à l'ordre* 4

17.4 Extensions de la notion de développement limité

Nous avons vu qu'une condition nécessaire pour que f admette un développement limité en 0 est que f soit continue sur un voisinage de 0 (et qu'une condition suffisante pour que f admette un développement limité à l'ordre n est que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de 0). Dans cette section nous allons généraliser la notion de développement limité en considérant des fonctions non nécessairement continues et des points autres que 0.

Copyrighted material

17.4.1 Développements limités à gauche ou à droite

La notion de développement limité possède pour généralisation naturelle les notions de développements limités à gauche ou à droite. Par exemple, l'application $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ n'est pas dérivable en 0 donc n'admet pas en 0 de développement limité d'ordre supérieur à 1. On peut toutefois remarquer que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

et que les applications $f_1 : x \in]-1,1[\longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $f_2 : x \in]-1,1[\longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ admettent pour développement limité d'ordre n en 0

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o_0(x^n) \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n).$$

On en déduit que pour $x \geqslant 0$ on a $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o_0(x^n)$ et que pour $x \leqslant 0$ on a $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o_0(x^n)$. Ces considérations motivent la définition suivante.

Définition 17.2 ✗ *On dit que la fonction f* ***admet un développement limité d'ordre n à gauche de 0*** *s'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un réel η strictement négatif et une application ε définie sur $]\eta, 0[$ tels que pour tout $x \in]\eta, 0[$,*

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \lim_{x \to 0^-} \varepsilon(x) = 0.$$

✗ *On dit que la fonction f* ***admet un développement limité d'ordre n à droite de 0*** *s'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n, un réel η strictement positif et une application ε définie sur $]0, \eta[$ tels que pour tout $x \in]0, \eta[$,*

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \lim_{x \to 0^+} \varepsilon(x) = 0.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

2. Calculons le développement limité généralisé d'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto x \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$. Considérons la fonction f_0 définie par $f_0(t) = f(1/t)$. On a

$$f_0(t) = \frac{1}{t} \arctan \frac{1}{1+1/t} = \frac{1}{t} \arctan \frac{t}{1+t}.$$

On a d'une part $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t} = t - t^2 + t^3 + o_0(t^3)$ et d'autre part $\arctan u = u - u^3/3 + o_0(u^3)$. On en déduit, en utilisant la règle de calcul du développement limité de la composée de 2 applications, que le développement limité d'ordre 2 en 0 de f_0 est

$$f_0(t) = 1 - t + \frac{2}{3}t^2 + o_0(t^2).$$

On obtient finalement le développement limité généralisé en $+\infty$ à l'ordre 2 suivant pour f,

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2} + o_{+\infty}(1/x^2).$$

17.4.4 Développement limité d'une fonction non bornée

Définition 17.5 *Soit f une application définie au voisinage de 0 et non nécessairement bornée en 0. On dit que f* ***admet un développement asymptotique en 0 à la précision $x^{\nu+n}$ dans l'échelle*** *$\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ s'il existe un entier $\nu \in \mathbb{Z}$ et un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n tels qu'au voisinage de 0 on ait,*

$$f(x) = x^\nu \big(P(x) + o_0(x^n)\big).$$

Remarque Cette définition s'étend au cas d'un réel x_0 non nul.

Exemple Calculons le développement asymptotique en 0 à la précision x^3 dans l'échelle $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ de la fonction cotangente. Remarquons que la fonction cotangente n'est pas bornée en 0 ; elle tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Pour x au voisinage de 0 on a (voir l'exercice 2)

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5) = x(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o_0(x^4)).$$

En effectuant la division selon les puissances croissantes de 1 par $1 + \dfrac{X^2}{3} + \dfrac{2X^4}{15}$ à l'ordre 4 on obtient

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o_0(x^4)\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o_0(x^3),$$

Copyrighted material

ce qui constitue le développement asymptotique dans l'échelle $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ en 0 à la précision x^3 de la fonction cotangente.

Exercice 6 *Calculer le développement asymptotique dans l'échelle* $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ *en* 0 *à la précision* x^3 *de la fonction cotangente hyperbolique.*

ATTENTION Malgré la généralisation de la notion de développement limité apportée par la définition 17.5, il existe des fonctions qui n'admettent pas de développement asymptotique dans l'échelle des $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. C'est le cas par exemple de la fonction logarithme. Si la fonction logarithme admettait un tel développement asymptotique, elle serait équivalente en 0 à une certaine puissance de $1/x$, ce qui est impossible puisque d'après la proposition 14.10, page 640, on a pour tout entier n,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x^n}} = \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0.$$

17.5 Applications

17.5.1 Application à la recherche d'équivalents

Les développements limités sont un outil efficace pour la recherche de l'équivalent d'une fonction donnée au voisinage d'un point. La proposition suivante nous indique qu'une fonction est équivalente au voisinage d'un point au monôme de plus bas degré de la partie régulière de son développement limité en ce point.

Proposition 17.7 *Soient* x_0 *un réel et* n *un entier pour lequel la fonction* f *admet un développement limité à l'ordre* n *en* x_0 *de partie régulière non nulle. Soit* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *le polynôme constituant la partie régulière du développement limité en* 0 *de la fonction* $f_0 : t \longmapsto f(t - x_0)$. *On a*

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_\nu (x - x_0)^\nu$$

où ν *désigne la valuation de* P.

Démonstration Il existe un voisinage V de x_0 et une application ε définie sur $V \setminus \{x_0\}$ tels que pour tout $x \in V \setminus \{x_0\}$

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

Copyrighted material

Pour $x \in V \setminus \{x_0\}$ on a alors

$$\frac{f(x)}{a_\nu(x-x_0)^\nu} = 1 + \sum_{k=\nu+1}^{n} \frac{a_k}{a_\nu}(x-x_0)^{k-\nu} + (x-x_0)^{n-\nu}\varepsilon(x-x_0).$$

Il est clair que l'on a $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-\nu}\varepsilon(x-x_0) = 0$ et que pour tout entier k avec $\nu+1 \leqslant k \leqslant n$ on a $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^{k-\nu} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{a_\nu(x-x_0)^\nu} = 1$, autrement dit, que $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_\nu(x-x_0)^\nu$. □

Exemples

1. Du développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction sinus, on déduit que

$$\sin x - x \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}.$$

Par conséquent, la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ est équivalente au voisinage de 0 à $\dfrac{x}{6}$ puisque $f(x) = -\dfrac{\sin x - x}{x \sin x}$ et que $\sin x \underset{0}{\sim} x$.

2. La difficulté lorsqu'on utilise les développements limités pour déterminer l'équivalent d'une fonction donnée est de prévoir (deviner ?) à quel ordre il faut calculer le développement limité. Si le développement limité n'est pas effectué à un ordre suffisamment élevé, on n'obtiendra pas l'équivalent cherché. S'il est effectué à un ordre très élevé on aura sans doute l'équivalent recherché mais au prix de calculs inutiles. Ainsi pour trouver l'équivalent en 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{sh}(\sin(x)) - \sin(\mathrm{sh}(x))$, il faut effectuer les développements limités à l'ordre 7.

En utilisant la règle de calcul du développement limité de la composée de 2 fonctions, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(\sin(x)) &= \Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\Big) + \frac{1}{3!}\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\Big)^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!}\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\Big)^5 + \frac{1}{7!}\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\Big)^7 + o_0(x^7) \\
\sin(\mathrm{sh}(x)) &= \Big(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}\Big) - \frac{1}{3!}\Big(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}\Big)^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!}\Big(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}\Big)^5 - \frac{1}{7!}\Big(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}\Big)^7 + o_0(x^7).
\end{aligned}$$

En développant chacune des parenthèses selon la formule du binôme de Newton en ne conservant que les monômes de degré inférieur à 7 on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(\sin(x)) &= x - \frac{x^5}{15} + \frac{x^7}{90} + o_0(x^7), \\
\sin(\mathrm{sh}(x)) &= x - \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{90} + o_0(x^7).
\end{aligned}$$

Copyrighted material

Hidden page

Finalement $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{3!}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

2. On vérifie que le développement limité généralisé à l'ordre 1 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x}$ est $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8x} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

On en conclut que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$$

Remarque Il est souvent inutile de procéder au calcul complet du développement limité d'une fonction pour obtenir sa limite. Par exemple le calcul de la limite en 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{2x}{\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)} - \cos x$$

peut être obtenu de la manière suivante. Au voisinage de 0 on a

$$\ln(1+x) = x + o_0(x) \qquad \text{et} \qquad \ln(1-x) = -x + o_0(x).$$

On a donc

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + o_0(x).$$

On en déduit que

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{0}{\sim} 2x \qquad \text{puis que} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)} = 1.$$

Finalement on obtient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

17.5.3 Étude des branches infinies

On dit que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f possède une branche infinie si l'une des deux situations suivantes a lieu :

1. il existe un réel x_0 tel que $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) ou tel que $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) ; on dit alors que f a une branche infinie en x_0 ;
2. f admet pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ ou lorsque x tend vers $-\infty$; on dit alors que f a une branche infinie en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

Définition 17.6 *Une droite Δ est dite* **asymptote** *à la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f admettant une branche infinie en x_0 (resp. en $+\infty$ ou en $-\infty$) si la distance*[3] *du point de coordonnées $(x, f(x))$ de $\mathcal{C}$ à la droite Δ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 (resp. lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$).*

Copyrighted material

Hidden page

Cette quantité tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) si au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) il existe une fonction ε telle que

$$f(x) = ax + b + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0 \quad \Big(\text{ resp. } \lim_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0\Big).$$

De manière équivalente, la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = ax + b$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ (resp. au voisinage de $-\infty$) si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \Big(\text{ resp. } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a\Big)$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \qquad \Big(\text{ resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = b\Big).$$

On peut résumer les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une asymptote en $+\infty$ par la proposition suivante (on a un résultat analogue en $-\infty$).

Proposition 17.8 *Soient f une application définie au voisinage de $+\infty$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la courbe $\mathcal{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote ;*
2. *$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$;*
3. *$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = ax + b + o_{+\infty}(1)$ au voisinage de $+\infty$.*

Remarques

1. La 3e assertion s'écrit encore :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + o_{+\infty}(1/x).$$

Cette expression constitue le développement limité généralisé à l'ordre 1 de la fonction $x \longmapsto f(x)/x$ au voisinage de $+\infty$.

2. On peut préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote en étudiant le signe de $d(x) = f(x) - (ax + b)$. Si au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) d est négatif alors la courbe se situe au dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Au contraire, si au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) d est positif alors la courbe se situe au dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Si l'on dispose d'un développement limité généralisé de la fonction $x \longmapsto f(x)/x$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) de la forme

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^i} + o_{\pm\infty}(1/x^i)$$

Copyrighted material

avec $i \in \mathbb{N}, i > 1$ et $c \in \mathbb{R}^*$, alors la position de la courbe par rapport à son asymptote est donnée directement par le signe de c. On a

$$f(x) - (ax + b) = \frac{c}{x^{i-1}} + o_{\pm\infty}(1/x^{i-1}).$$

Si c est positif (resp. négatif), la courbe se situe, au voisinage de $+\infty$, au-dessus (resp. au-dessous) de l'asymptote. Si c est positif et i est impair ou si c est négatif et i est pair la courbe se situe, au voisinage de $-\infty$, au-dessus de l'asymptote. Si c est positif et i est pair ou si c est négatif et i est impair la courbe se situe, au voisinage de $-\infty$, au-dessous de l'asymptote.

3. Pour affiner le tracé de la courbe $\mathcal{C}$, il peut être utile de déterminer si l'asymptote Δ coupe ou non $\mathcal{C}$. L'abscisse des éventuels points d'intersection est obtenu en résolvant l'équation $f(x) - (ax + b) = 0$.

Exemples

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; la représentation graphique de la fonction f présente donc une branche infinie en $+\infty$. Regardons si elle admet une asymptote. Pour $x \in]1, +\infty[$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

En utilisant le développement limité d'ordre 2 en 0 de $u \longmapsto (1-u)^{-\frac{1}{2}}$ on obtient le développement limité généralisé à l'ordre 2 suivant pour la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o_{+\infty}\left(1/x^2\right).$$

On en déduit que la représentation graphique de f admet une asymptote d'équation $y = x + 1/2$ en $+\infty$ et qu'au voisinage de $+\infty$, elle se situe au-dessus de son asymptote (la quantité $3/8x^2$ est positive lorsque x est au voisinage de $+\infty$) (voir la fig. 2).

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = 3 - \dfrac{x\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1}$. On a

$$\mathrm{sh}\, x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}\, x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$

On en déduit que

$$\frac{x\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} \underset{+\infty}{\sim} x.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. La représentation graphique de la fonction f présente donc une branche infinie en $+\infty$. Regardons si elle admet une asymptote. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Exemples

1. La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ admet une branche infinie de direction asymptotique de pente 0 au voisinage de $+\infty$.

2. La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto x^2$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$.

17.5.4 Étude des propriétés locales de la représentation graphique d'une application

Une conséquence de la proposition 17.3 est qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f soit dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ est qu'elle admette un développement limité d'ordre 1 en x_0. Le développement limité d'ordre 1 en 0 de f est alors

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

Les développements limités constituent donc un moyen de déterminer si une application est prolongeable par continuité en un point et si ce prolongement est dérivable en ce point.

Considérons à titre d'exemple, l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. Au voisinage de 0 on a

$$e^x - 1 = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o_0(x^3).$$

On en déduit que f admet pour développement limité d'ordre 2 en 0

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o_0(x^2).$$

Cela nous permet d'affirmer que l'application f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. De plus, ce prolongement est dérivable en 0, de nombre dérivée $-1/2$.

ATTENTION Il ne faut surtout pas déduire du développement limité d'ordre 2 en 0 de f que f admet une dérivée seconde en 0 valant $1/12$. Nous avons vu à la proposition 17.3 que l'existence d'un développement limité d'ordre n en 0 n'était équivalent à l'existence d'une dérivée n-ième en 0 que pour $n \in \{0, 1\}$. Si l'on souhaite étudier l'existence d'une dérivée seconde en 0, on le fera en revenant à la définition.

Du développement limité d'ordre 2 en 0 de f, on peut déduire que la tangente à la représentation graphique de f au point $(0, 1)$ est la droite d'équation $y = 1 - x/2$. De plus, comme le terme $x^2/12$ est positif au voisinage de 0, on en déduit que la représentation graphique est au-dessus de sa tangente au point $(0, 1)$ (dans un voisinage de ce point). Une étude complète portant sur la position de la représentation graphique d'une application par rapport à sa tangente en un point a été effectuée à la section 16.5.2 du chapitre 16.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1. Elle est toutefois prolongeable par continuité à droite en 1 en posant $f(1) = 0$.

4. La fonction rationnelle g est dérivable sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$ on a

$$f'(x) = \frac{x^4 + 1}{(1 - x^2)^2}\, \mathrm{e}^{1/(1-x^2)}.$$

5. Puisque la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, on en déduit que f' est strictement positive sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ et par conséquent que f est croissante sur chacun des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Par ailleurs, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a aussi

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = \mathrm{e}.$$

Lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $1 - x^2$ tend vers 0 par valeurs supérieures et par conséquent $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{1 - x^2} = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = +\infty.$$

Lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, $1 - x^2$ tend vers 0 par valeurs inférieures et $1/(1 - x^2)$ tend vers $-\infty$. Or $\lim\limits_{u\to-\infty} u^2\mathrm{e}^u = 0$ donc

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} (x^4 + 1) \times \lim_{x\to1^+} \frac{1}{(1 - x^2)^2}\, \mathrm{e}^{1/(1-x^2)} = 2 \times \lim_{u\to-\infty} u^2\mathrm{e}^u = 0.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1	1		$+\infty$
$f'(x)$	e	$+$	$+\infty$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↗	$+\infty$	0	↗	$+\infty$

La représentation graphique de f au point d'abscisse 1 possède une demi-tangente à droite horizontale.

6. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la représentation graphique de f. Recherchons une éventuelle asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$ en cherchant un développement asymptotique pour f au voisinage de $+\infty$. Pour t au voisinage de 0^+ considérons la fonction f_0 définie par

$$f_0(t) = f(1/t) = \frac{1}{t} \exp\left(\frac{t^2}{t^2 - 1}\right).$$

Copyrighted material

Hidden page

fonction f est par conséquent convexe sur $[0,1[$, convexe sur $]1, \sqrt[4]{3}[$ et concave sur $]\sqrt[4]{3}, +\infty[$.

8. Déterminons les points d'intersection entre la représentation graphique de f et l'asymptote en $+\infty$ en résolvant l'équation $f(x) = x$. On a

$$f(x) = x \iff x\left(\mathrm{e}^{1/(1-x^2)} - 1\right) = 0 \iff \left(x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{1/(1-x^2)} = 1\right).$$

Il n'y a donc qu'un seul point intersection entre la représentation graphique de f et la droite asymptote en $+\infty$ qui est le point $(0,0)$ car l'équation $1/(1-x^2) = 0$ n'a pas de solution.

9. La représentation graphique de f est donnée fig. 3.

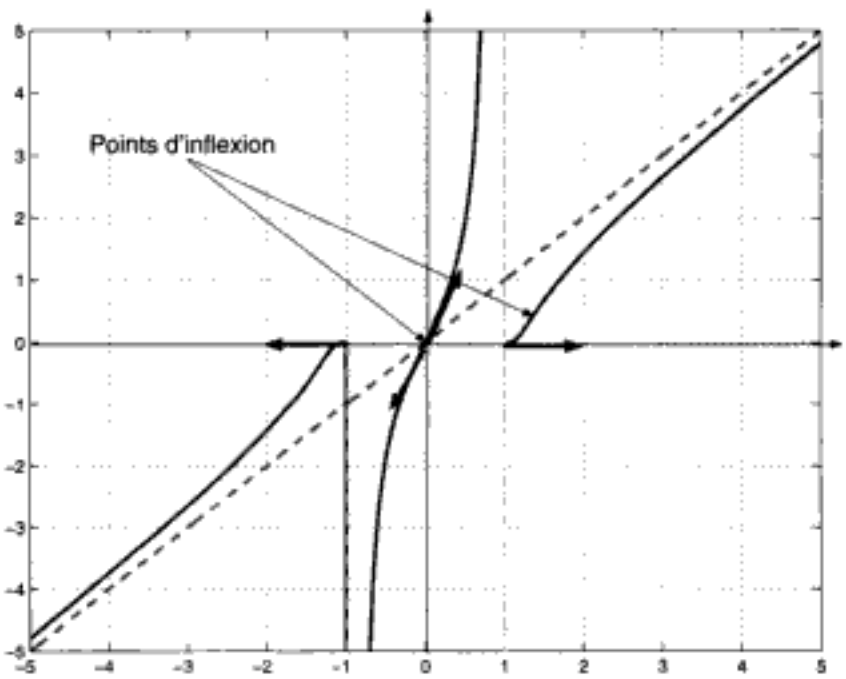


Fig. 3 Représentation graphique de $f : x \longmapsto x \exp\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$.

17.8 Exercices de synthèse

Exercice 8 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

Copyrighted material

Hidden page

17.9 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

Les développements limités d'ordre 3 en 0 de fonctions sinus et cosinus hyperbolique sont

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + o_0(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o_0(x^3)$$

La partie régulière du développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \longmapsto \operatorname{ch} x \sin x$ est obtenue en conservant les monômes de degré inférieur ou égal à 3 dans l'expression du produit des parties régulières de ces deux développements limités. On a

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!}\right) \times \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{12}.$$

La partie régulière du développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \operatorname{ch} x \sin x$ est donc $x + \dfrac{x^3}{3}$.

Solution de l'exercice 2

Le développement limité d'ordre 5 en 0 de tangente s'obtient en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 5 de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction sinus par la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction cosinus, autrement dit en effectuant la division de P_1 par Q_1 où

$$P_1 = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} \quad \text{et} \quad Q_1 = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!}.$$

On obtient

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5).$$

Le développement limité d'ordre 5 en 0 de tangente hyperbolique s'obtient en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 5 de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction sinus hyperbolique par la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction cosinus hyperbolique, autrement dit en effectuant la division de P_2 par Q_2 où

$$P_2 = x + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} \quad \text{et} \quad Q_2 = 1 + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!}.$$

On obtient

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5).$$

Copyrighted material

Le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \longmapsto \tan x / \operatorname{th} x$ ne peut pas s'obtenir en effectuant la division selon les puissances croissantes à l'ordre 5 du polynôme de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente par le polynôme de la partie régulière du développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente hyperbolique car celui-ci est de valuation non nulle. On commence par écrire

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{X + \dfrac{X^3}{3} + \dfrac{2X^5}{15}}{X - \dfrac{X^3}{3} + \dfrac{2X^5}{15}} = \frac{1 + \dfrac{X^2}{3} + \dfrac{2X^4}{15}}{1 - \dfrac{X^2}{3} + \dfrac{2X^4}{15}}$$

puis on effectue la division selon les puissances croissantes à l'ordre 4 (et non pas à l'ordre 5) de P_4 par Q_4 où

$$P_4 = 1 + \frac{X^2}{3} + \frac{2X^4}{15} \quad \text{et} \quad Q_4 = 1 - \frac{X^2}{3} + \frac{2X^4}{15}.$$

On obtient

$$\frac{\tan x}{\operatorname{th} x} = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 + o_0(x^4).$$

On remarquera que la fonction $x \longmapsto \tan x / \operatorname{th} x$ est paire. Donc la partie régulière de ses développements limités ne possède que des monômes de degré pair. On peut ainsi écrire

$$\frac{\tan x}{\operatorname{th} x} = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 + o_0(x^5)$$

ce qui constitue le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction.

Solution de l'exercice 3

Remarquons que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$ et que h est un polynôme de degré 2 donc qu'il constitue son propre développement limité d'ordre n en 0 pour tout entier n supérieur à 2. D'après la proposition 17.5, la partie régulière du développement limité d'ordre 4 en 0 de $g \circ h$ est obtenue en conservant les monômes de degré inférieur ou égal à 4 de la fonction polynomiale $Q \circ P$ où

$$P = 2X + X^2 \quad \text{et} \quad Q = -1 + X - X^2 + X^3 - X^4.$$

On a

$$\begin{aligned} Q \circ P &= -1 + (2X + X^2) - (2X + X^2)^2 + (2X + X^2)^3 - (2X + X^2)^4 \\ &= -1 + 2X + X^2 - 4X^2 + 4X^3 + X^4 + 8X^3 + 12X^4 + 6X^5 + X^6 \\ &\quad -16X^4 - 32X^5 - 24X^6 - 8X^7 - X^8 \\ &= -1 + 2X - 3X^2 + 4X^3 - 5X^4 - 26X^5 - 23X^6 - 8X^7 - X^8. \end{aligned}$$

Copyrighted material

Hidden page

On en déduit, en effectuant la substitution $u = 2t$ et en sommant les deux développements limités, que

$$\frac{1}{2}\cos(2t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t) = \frac{1}{2} - \sqrt{3}t - t^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + o_0(t^4).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}t - t^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4\right)^2 + o_0(t^4) \\ &= \frac{1}{4} - \sqrt{3}t + 2t^2 + \frac{8}{\sqrt{3}}t^3 - \frac{8}{3}t^4 + o_0(t^4). \end{aligned}$$

On en déduit que le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $\pi/6$ de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos^2(2x)$ est

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} - \sqrt{3}\,(x - \pi/6) + 2\,(x - \pi/6)^2 + \frac{8}{\sqrt{3}}\,(x - \pi/6)^3 \\ &\qquad - \frac{8}{3}\,(x - \pi/6)^4 + o_0\left((x - \pi/6)^4\right). \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6

La fonction cotangente hyperbolique n'est pas bornée en 0 ; elle tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Pour x au voisinage de 0 on a (voir l'exercice 2)

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5) = x(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o_0(x^4)).$$

En effectuant la division selon les puissances croissantes de 1 par $1 - \dfrac{X^2}{3} + \dfrac{2X^4}{15}$ à l'ordre 4 on obtient

$$\coth x = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o_0(x^4)\right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o_0(x^3),$$

ce qui constitue le développement asymptotique dans l'échelle $\{1/x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ en 0 à la précision x^3 de la fonction cotangente.

Solution de l'exercice 7

Soit f l'application définie sur $]-\infty, 0]\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$. Il est clair que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; la représentation graphique de la fonction f présente donc une branche infinie en $-\infty$. Recherchons une éventuelle asymptote. Pour $x \in]-\infty, 0[$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = -\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Copyrighted material

Hidden page

On obtient alors en utilisant la règle de calcul du développement limité d'un produit que la partie régulière du développement limité d'ordre n en 1 de f_n est donnée par

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} + \frac{5}{12}(x-1)^2\right) \times \Big(1 + n(x-1) \\ &\qquad + \frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2\Big) + o_0((x-1)^2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)(x-1) + \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n(n-1)\right)(x-1)^2 \\ &\qquad + o_0((x-1)^2). \end{aligned}$$

2 - Nous avons vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f_n admette un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1 est que f_n soit dérivable en ce point. Du développement limité à l'ordre 2 de f_n, on déduit que f_n est continue en 1 et que f_n est dérivable en 1 avec $f_n'(1) = (n-1)/2$.

3 - On déduit de l'expression du développement limité à l'ordre 2 de f_n en 0 que la tangente a pour équation

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)(x-1).$$

La courbe Γ_0 est au dessus de la tangente en 1 puisque

$$f_0(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x-1}{2}\right) = \frac{5}{12}(x-1)^2 + o_0((x-1)^2)$$

et $\dfrac{5}{12}(x-1)^2$ est positif.

Remarque Le polynôme $P = \dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{4}X(X-1)$ admet deux racines réelles

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6} \approx 0.7362373842, \qquad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6} \approx 2.263762616.$$

On en déduit de manière plus générale que les courbes Γ_1 et Γ_2 sont au-dessous de leur tangente respectives en 1 et que pour $n \geqslant 3$ la courbe Γ_n est au-dessus de la tangente en 1.

Solution de l'exercice 9

La fonction $f : x \longmapsto x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, elle est continue et dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. Pour $x \in \mathcal{D}_f$ on a

$$f'(x) = x\left(2\arctan\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+(1+x)^2}\right).$$

Copyrighted material

Le signe de f' dépend du signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$g(x) = \left(2 \arctan \frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+(1+x)^2}\right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a $g'(x) = -\dfrac{(2+x)^2+2}{(1+(1+x)^2)^2}$. On a le tableau de variation suivant pour g,

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'		$-$		$-$	
g	0	$\searrow$ $1-\pi$	$1+\pi$	$\searrow$	0

ce qui permet d'obtenir le tableau de variation pour la fonction f,

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$ $\pi/2-1$	$-\pi/2-1$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $-\pi/2$	$\pi/2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Afin d'étudier les branches infinies de f, calculons le développement limité généralisé de $f(x)/x$ au voisinage de $+\infty$. On considère au voisinage de 0 la fonction f_0 définie par

$$f_0(t) = \frac{f(1/t)}{1/t} = \frac{1}{t} \arctan \frac{1}{1+1/t} = \frac{1}{t} \arctan \frac{t}{1+t}.$$

On a $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t} = t - t^2 + t^3 + o_0(t^3)$ et $\arctan u = u - \dfrac{u^3}{3} + o_0(u^3)$. On en déduit que

$$f_0(t) = 1 - t + \frac{2}{3}t^2 + o_0(t^2)$$

puis que $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{3x^2} + o_{+\infty}(\dfrac{1}{x^2})$.

La droite $y = x-1$ est asymptote en $+\infty$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$. On montre de la même manière que la droite $y = x-1$ est asymptote en $-\infty$ et la courbe est au-dessous de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Or la fonction cosinus hyperbolique est minorée strictement par 1 sur $\mathbb{R}^*$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{sh} x > x$.

2 - On remarque que f est paire : la partie polynomiale du développement limité n'aura que des monômes de degré pair. On a

$$x \operatorname{sh} x = x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x - 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

On obtient

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3).$$

On en déduit, d'après la proposition 17.3, d'une part que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ et d'autre part que ce prolongement est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

3 - Pour x non nul on a

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sh} x - x}{\operatorname{ch} x - 1}.$$

La fonction f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$ car d'une part, d'après la question 1, on a $\operatorname{sh} x < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et d'autre part la fonction cosinus hyperbolique est minorée strictement par 1 sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, on a

$$\operatorname{sh} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^x$$

d'où on déduit que

$$x \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} \underset{+\infty}{\sim} x \quad \text{et que} \quad \frac{\operatorname{sh} x - x}{\operatorname{ch} x - 1} \underset{+\infty}{\sim} 1.$$

Cela permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

On a donc le tableau de variation suivant pour le prolongement de f (qui est paire) :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	-1
$f(x)$	1	↘	$-\infty$

Copyrighted material

4 - Pour montrer que la droite d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$, montrons que $h(x) = f(x) - (-x + 3)$ admet pour limite 0 en $+\infty$. On a

$$h(x) = f(x) - (-x+3) = x\left(1 - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}\right) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}(2\mathrm{e}^{-x} - 1)}{1 + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x} - 1)}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Pour préciser la position de la représentation graphique de f par rapport à son asymptote en $+\infty$, étudions le signe au voisinage de $+\infty$ de

$$h(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}(2\mathrm{e}^{-x} - 1)}{1 + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x} - 1)}.$$

Au voisinage de $+\infty$, le numérateur est négatif, le dénominateur est positif, donc h est négatif et la courbe est sous l'asymptote.

5 - On a

$$\begin{aligned} f(2)f(3) &= \left(3 - \frac{2\operatorname{sh} 2}{\operatorname{ch} 2 - 1}\right) \times \left(3 - \frac{3\operatorname{sh} 3}{\operatorname{ch} 3 - 1}\right) \\ &= \frac{3\Big(3\operatorname{ch} 2 - 3 - 2\operatorname{sh} 2\Big) \times \Big(\operatorname{ch} 3 - \operatorname{sh} 3 - 1\Big)}{\Big(\operatorname{ch} 2 - 1\Big) \times \Big(\operatorname{ch} 3 - 1\Big)}. \end{aligned}$$

Puisque la fonction cosinus hyperbolique est minorée par 1, le dénominateur est toujours positif. Par ailleurs, on a d'une part

$$\operatorname{ch} 3 - \operatorname{sh} 3 - 1 = \mathrm{e}^{-3} - 1 = \mathrm{e}^{-3} - \mathrm{e}^{0} < 0$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante et $-3 < 0$. Et d'autre part,

$$3\operatorname{ch} 2 - 3 - 2\operatorname{sh} 2 = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{2} + 5\mathrm{e}^{-2} - 6\Big) > 0$$

car $\mathrm{e} > 5/2$ d'où $\mathrm{e}^2 > 25/4 > 24/4 = 6$. On a donc bien $f(2)f(3) < 0$.

L'application f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$. Son image est $f(\mathbb{R}^+) =]-\infty, 1[$. D'après la proposition 14.1, page 623, f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $]-\infty, 1[$. On en conclut que 0 admet un unique antécédent par f, autrement dit, qu'il existe un unique réel $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(c) = 0$. Par ailleurs puisque $f(2)f(3) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $c \in]2, 3[$.

Copyrighted material

6 - La représentation graphique de f complétée par parité est donnée ci-dessous.

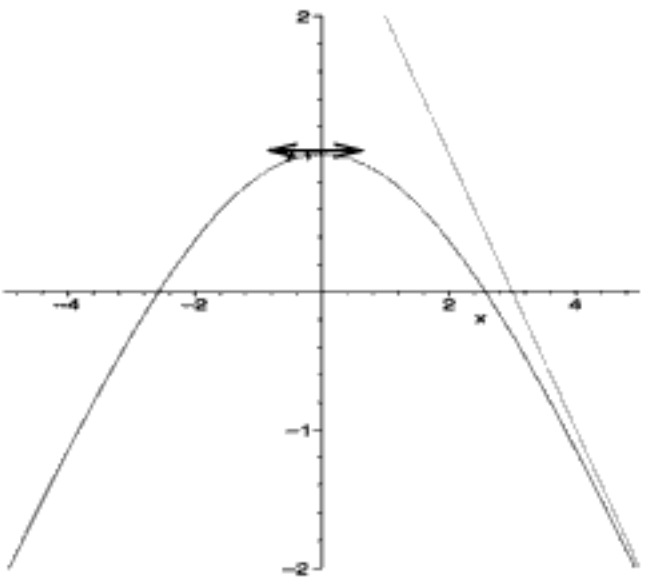


Fig. 5 Représentation graphique de $f : x \longmapsto 3 - x\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$.

Copyrighted material

Copyrighted material

Hidden page

Copyrighted material

CHAPITRE 18

L'intégrale de Riemann

La théorie de l'intégration est issue de la nécessité pratique de calculer des aires et des volumes ; elle est liée à la notion très générale de *mesure* et part du principe que l'intégrale d'une fonction constante sur un ensemble est égale au produit de cette constante par la *mesure* de l'ensemble. Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'intégrale de fonctions définies sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. L'intégrale d'une telle fonction est dite simple par opposition à l'intégrale de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ qualifiée d'intégrale multiple. Il existe plusieurs théories de l'intégration. Nous nous limiterons à la théorie de l'intégrale de Riemann qui est largement suffisante pour les applications courantes.

18.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Sauf indication contraire, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

18.1.1 Fonction en escalier

Définition 18.1 *On appelle* ***subdivision de l'intervalle*** $[a, b]$ *toute famille finie* $(x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ *de réels vérifiant les conditions suivantes :*

1. $\forall i \in \{0, \ldots, n\} \quad x_i \in [a, b]$;
2. $x_0 = a$ *et* $x_n = b$;
3. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad x_{i-1} < x_i$.

Remarques

1. Une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ comprend $n+1$ points (appelés nœuds de la subdivision) et détermine n intervalles non vides $[x_{i-1}, x_i]$. Le réel $h = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} (x_i - x_{i-1})$ est appelé le ***pas de la subdivision***.

2. On dit que la subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ est plus fine que la subdivision $\sigma' = (x'_i)_{i\in\{0,\ldots,m\}}$ si

$$\{x'_i \mid i = 0, \ldots, m\} \subset \{x_i \mid i = 0, \ldots, n\}.$$

Copyrighted material

Exemple La famille $(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ où $x_i = a + i\,(b-a)/n$ définit une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ de pas $h = (b-a)/n$ appelée ***subdivision uniforme*** de l'intervalle $[a,b]$. La famille $(x'_i)_{i\in\{0,\dots,2n\}}$ où $x'_i = a + i\,(b-a)/(2n)$ définit une subdivision de l'intervalle $[a,b]$, de pas $h' = h/2$, plus fine que la subdivision $(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$.

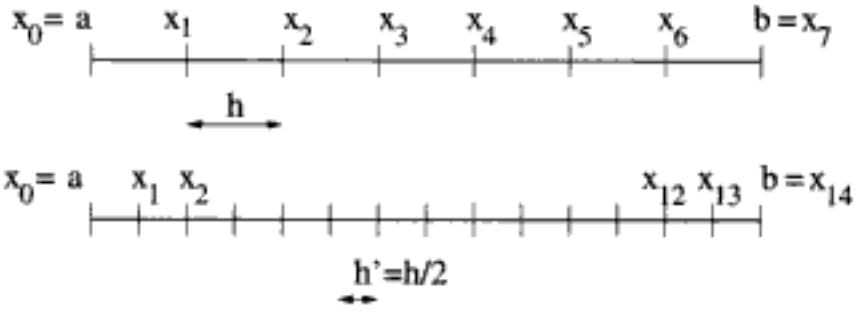


Fig. 1 Exemple d'une subdivision $(x_i)_{i\in\{0,\dots,7\}}$ uniforme de l'intervalle $[a,b]$ et d'une subdivision $(x'_i)_{i\in\{0,\dots,14\}}$ plus fine.

Définition 18.2 *Soit f une application définie sur l'intervalle $[a,b]$.*

✗ *L'application f est dite* ***en escalier***[1] *sur l'intervalle $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1,\dots,n\}$.*

✗ *Une subdivision $\sigma' = (x'_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de l'intervalle $[a,b]$ est dite* ***adaptée*** *à la fonction en escalier f si f est constante sur chaque intervalle $]x'_{i-1}, x'_i[$, $i \in \{1,\dots,n\}$.*

Remarques

1. L'image d'une fonction en escalier sur $[a,b]$ est un ensemble fini (une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs). Une fonction en escalier est donc bornée et ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité.

2. L'ensemble $\mathcal{E}_{[a,b]}$ des fonctions en escalier sur l'intervalle $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{A}([a,b],\mathbb{R})$ des applications définies sur l'intervalle $[a,b]$.

Exemple La fonction partie entière E est une fonction en escalier (voir la fig. 2). Sur l'intervalle $[-2,2]$ la subdivision $\sigma_1 = (-2,-1,0,1,2)$ est une subdivision uniforme adaptée à la fonction partie entière. La subdivision

[1] On dit aussi couramment que f est une fonction en escalier sur $[a,b]$.

Copyrighted material

Hidden page

Remarques

1. On peut montrer que la valeur de $I_\sigma(f)$ est indépendante du choix de la subdivision σ.

2. Les valeurs de f aux nœuds $x_i, i \in \{1, \ldots, n-1\}$ de la subdivision σ n'interviennent pas dans la définition de l'intégrale, seules interviennent les valeurs λ_i prises par f sur les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$.

Interprétation graphique Le réel $\int_a^b f$ représente *l'aire algébrique*[(2)] entre la représentation graphique de la fonction en escalier f sur l'intervalle $[a, b]$ et l'axe des abscisses (voir la fig. 3). La quantité $(x_i - x_{i-1})\ \lambda_i$ est en effet l'aire d'un rectangle de longueur $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur λ_i.

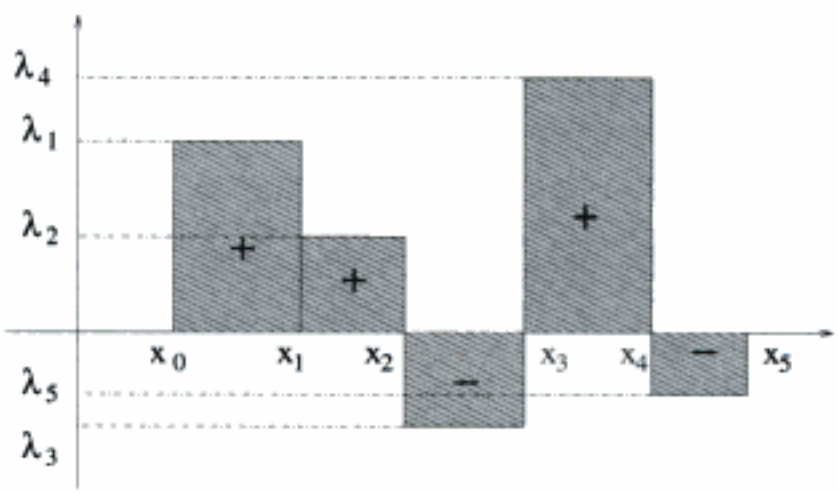


Fig. 3 Le réel $\int_a^b f$ représente l'aire algébrique des rectangles hachurés.

Exemple Considérons la fonction partie entière E sur l'intervalle $[-2, 2]$ et la subdivision adaptée $\sigma_1 = (-2, -1, 0, 1, 2)$ qui est une subdivision uniforme de pas $h = 1$ (voir la fig. 2). Sur l'intervalle $]-2, -1[$ la fonction prend la valeur $\lambda_1 = -2$, sur l'intervalle $]-1, 0[$ elle prend la valeur $\lambda_2 = -1$, sur l'intervalle $]0, 1[$ elle prend la valeur $\lambda_3 = 0$ et enfin sur l'intervalle $]1, 2[$ elle prend la valeur $\lambda_4 = 1$. L'intégrale de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-2, 2]$ vaut donc

$$\int_{-2}^{2} E = \sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i-1})\ \lambda_i = h \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = -2 + (-1) + 0 + 1 + 2 = 0.$$

(2) On considère que l'aire située au-dessus de l'axe des abscisses est positive et que l'aire située sous l'axe des abscisses est négative.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

pour borne inférieure $\int_a^b f$ (qui est élément minimal). Ainsi, si $f \in \mathcal{E}_{[a,b]}$ alors f est Riemann intégrable et l'intégrale de cette fonction en escalier satisfait

$$\int_a^b f = I_+(f) = I_-(f).$$

Notre construction de l'intégrale de Riemann est donc d'une part cohérente avec la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier que nous avons donnée dans la section précédente et d'autre part elle prolonge cette définition.

En résumé, à chaque fonction $f \in \mathcal{A}([a,b],\mathbb{R})$ intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, on peut associer le réel $I(f)$ défini par

$$I(f) = I_-(f) = I_+(f).$$

La fonction $I : f \in \mathcal{A}([a,b],\mathbb{R}) \longmapsto I(f)$ constitue un prolongement de la fonction

$$f \in \mathcal{E}_{[a,b]} \longmapsto \int_a^b f.$$

Cela nous permet d'énoncer la définition suivante.

Définition 18.5 *Soit $f \in \mathcal{A}([a,b],\mathbb{R})$ une application intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le réel $I(f)$ défini comme la borne supérieure de l'ensemble*

$$A_-(f) = \left\{ \int_a^b \phi \;\middle|\; \phi \in \mathcal{E}_{[a,b]} \ , \ \phi \leqslant f \right\}$$

ou de manière équivalente comme la borne inférieure de l'ensemble

$$A_+(f) = \left\{ \int_a^b \psi \;\middle|\; \psi \in \mathcal{E}_{[a,b]} \ , \ \psi \geqslant f \right\}.$$

On note ce réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque Dans la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, la variable t est une « variable muette » et on peut noter également $\int_a^b f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ l'intégrale de f sur $[a,b]$. Cette notation exprime de manière claire par rapport à quelle variable, dont dépend la fonction f, on intègre. C'est très utile dans le cas où f dépend de plusieurs paramètres.

Interprétation graphique Si f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, le réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique[3] de la portion de plan comprise entre

[3] C'est-à-dire que l'on considère que l'aire située au-dessus de l'axe des abscisses est un réel positif et que l'aire située au-dessous de l'axe des abscisses est un réel négatif.

Copyrighted material

Hidden page

18.2.2 Principaux exemples de fonctions Riemann intégrables

Un point important dans l'étude de l'intégrale de Riemann consiste à déterminer des critères, simples à vérifier, permettant d'établir qu'une fonction est Riemann intégrable. Il est en effet malaisé d'utiliser la définition 18.4 pour s'assurer qu'une fonction donnée est Riemann intégrable. Un certain nombre de critères sont donnés dans ce paragraphe.

Proposition 18.2 *Toute application continue sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Démonstration Considérons une application f continue sur un intervalle fermé et borné $[a,b]$. D'après le théorème de Heine (voir le théorème 13.5 p. 599) f est uniformément continue sur $[a,b]$, autrement dit

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall (x,x') \in [a,b] \quad \Big(|x-x'| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(x')| \leqslant \varepsilon \Big). \quad (1)$$

Pour montrer que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ nous devons montrer que pour tout réel $\widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$ il existe deux fonctions $\phi_{\widetilde{\varepsilon}}$ et $\psi_{\widetilde{\varepsilon}}$ en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\phi_{\widetilde{\varepsilon}} \leqslant f \leqslant \psi_{\widetilde{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_{\widetilde{\varepsilon}} - \phi_{\widetilde{\varepsilon}}) \quad < \widetilde{\varepsilon}.$$

Considérons un réel $\widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^*$ et un réel ε vérifiant $0 < \varepsilon < \widetilde{\varepsilon}/(2(b-a))$. Soit $\sigma = (x_i)_{i \in \{0,\dots,n\}}$ une subdivision uniforme de l'intervalle $[a,b]$ de pas h tel que $h \leqslant \eta$ où le réel η est défini par la relation (1) et la donnée de ε. Soient $\phi_{\widetilde{\varepsilon}}$ et $\psi_{\widetilde{\varepsilon}}$ les fonctions en escalier sur $[a,b]$ définies par

1. $\phi_{\widetilde{\varepsilon}}(x) = f(x_i) - \varepsilon$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$;
2. $\psi_{\widetilde{\varepsilon}}(x) = f(x_i) + \varepsilon$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$;
3. $\phi_{\widetilde{\varepsilon}}(b) = \psi_{\widetilde{\varepsilon}}(b) = f(b)$.

Puisque pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$ on a $0 \leqslant |x - x_i| \leqslant h \leqslant \eta$ on en déduit que $|f(x) - f(x_i)| \leqslant \varepsilon$, autrement dit que

$$\underbrace{f(x_i) - \varepsilon}_{= \phi_{\widetilde{\varepsilon}}(x)} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{f(x_i) + \varepsilon}_{= \psi_{\widetilde{\varepsilon}}(x)}.$$

On a ainsi $\phi_{\widetilde{\varepsilon}} \leqslant f \leqslant \psi_{\widetilde{\varepsilon}}$ sur $[a,b]$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_a^b \Big(\psi_{\widetilde{\varepsilon}} - \phi_{\widetilde{\varepsilon}}\Big) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(\psi_{\widetilde{\varepsilon}} - \phi_{\widetilde{\varepsilon}}\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} 2\varepsilon \ = \ 2\varepsilon n h = 2\varepsilon(b-a) < \widetilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

L'application f est donc Riemann intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. □

Copyrighted material

Définition 18.6 *On dit qu'une application f définie sur $[a,b]$ est* **continue par morceaux sur** *$[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que pour tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$ l'application f est continue sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et admet une limite (finie) à droite en x_i et une limite (finie) à gauche en x_{i+1}.*

On admet le résultat suivant.

Proposition 18.3 *Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Exercice 2 *Montrer que toute application monotone sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ (on s'inspirera de la démonstration de la proposition 18.2).*

Remarque Même si l'ensemble des fonctions Riemann intégrables semble vaste et inclut les fonctions habituellement manipulées, il ne faut pas pour autant croire que toute fonction est intégrable au sens de Riemann. Ainsi l'application f définie sur $[a,b]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 1 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

n'est pas Riemann intégrable. Pour l'établir raisonnons par l'absurde. Supposons que f soit intégrable au sens de Riemann. Pour tout réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe deux fonctions $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \in \mathcal{E}_{[a,b]}$ telles que

$$\forall x \in [a,b] \quad \phi_\varepsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_\varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \ < \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = b-a$ et considérons une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ adaptée aux fonctions en escalier ϕ_ε et ψ_ε. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ il existe $t_1 \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ et $t_2 \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap [a,b]$ tels que $t_1, t_2 \in]x_i, x_{i+1}[$. On a donc $\phi_\varepsilon(x) \leqslant 0$ et $\psi_\varepsilon(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$. Cela implique que

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon) \geqslant \int_a^b 1 = b - a = \varepsilon.$$

Cette propriété est en contradiction avec l'hypothèse que f est Riemann intégrable sur $[a,b]$. L'application f n'est donc pas intégrable au sens de Riemann.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Par exemple

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \, \mathrm{d}t \; = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \mathrm{d}t \; = 1.$$

3. L'application $N : f \in \mathcal{C}^0([a,b]) \longmapsto \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$ est une norme[6] sur $\mathcal{C}^0([a,b])$.

Proposition 18.6 (inégalité de Cauchy-Schwarz[7]) *Soient f et g deux fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$. Le produit $f \times g$ est une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\left(\int_a^b f(t) \times g(t) \, \mathrm{d}t \right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2 \, \mathrm{d}t \right) \times \left(\int_a^b g(t)^2 \, \mathrm{d}t \right).$$

Démonstration Considérons l'application T définie sur $\mathbb{R}$ par[8]

$$T(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2 \, \mathrm{d}t.$$

D'après la seconde assertion de la proposition 18.4, l'application T est positive sur $\mathbb{R}$. D'autre part pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda) = \lambda^2 \underbrace{\int_a^b (f(t))^2 \, \mathrm{d}t}_{A} + 2\lambda \underbrace{\int_a^b f(t) \, g(t) \, \mathrm{d}t}_{B} + \underbrace{\int_a^b (g(t))^2 \, \mathrm{d}t}_{C}.$$

L'application T est donc une fonction polynomiale. Puisqu'elle est positive sur $\mathbb{R}$, elle ne peut avoir qu'une racine double ou deux racines complexes. On a donc $\Delta = 4B^2 - 4AC \leqslant 0$. Cela implique que

$$B^2 - AC = \left(\int_a^b f(t) \times g(t) \, \mathrm{d}t \right)^2 - \left(\int_a^b f(t)^2 \, \mathrm{d}t \right) \times \left(\int_a^b g(t)^2 \, \mathrm{d}t \right) \leqslant 0.$$

On a ainsi prouvé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

---

[6] Voir la page 568 pour la définition d'une norme.

[7] CAUCHY, Augustin (1789, Paris - 1857, Sceaux). Voir page 190.
SCHWARZ, Hermann (1843, Hermsdorf (Silésie) - 1921, Berlin).

[8] On mettra cette démonstration en parallèle avec celle de la proposition 3.6 page 101.

Copyrighted material

18.3 Intégrales indéfinies et primitives

18.3.1 Intégrales indéfinies

Soient f une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ et x un élément de $[a,b]$. La fonction f est Riemann intégrable sur $[a,x]$ et l'application

$$F : x \in [a,b] \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est appelée ***intégrale indéfinie*** de f. D'après la relation de Chasles, pour $x_1, x_2 \in [a,b]$ on a

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_a^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_a^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Proposition 18.7 *L'application F est continue sur $[a,b]$.*

Démonstration La fonction f étant Riemann intégrable sur $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$ (voir la remarque de la page 836). Pour montrer que F est continue sur $]a,b[$, montrons que pour tout $x_0 \in]a,b[$, $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$. Soit $M = \sup\limits_{y \in [a,b]} |f(y)|$ et $x \in]a,b[$ avec $x < x_0$. On a

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_x^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_x^{x_0} |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x_0} M\ \mathrm{d}t = (x_0 - x)M. \end{aligned} \tag{2}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to x_0^-} |F(x_0) - F(x)| = 0$. Pour $x \in]a,b[$ avec $x > x_0$ on obtient par un calcul analogue,

$$|F(x_0) - F(x)| \leqslant (x - x_0)M \tag{3}$$

et $\lim\limits_{x \to x_0^+} |F(x_0) - F(x)| = 0$. On en conclut que $\lim\limits_{x \to x_0} |F(x_0) - F(x)| = 0$, ce qui implique que $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$. Par ailleurs, la relation (2) valable pour $x_0 = b$ permet d'établir que $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = F(b)$ et donc que F est continue à gauche en b. De même, la relation (3) valable pour $x_0 = a$ permet d'établir que $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = F(a)$ et donc que F est continue à droite en a. □

Proposition 18.8 (dérivabilité de l'intégrale indéfinie) *Soient f une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ et F son intégrale indéfinie. Si f est continue en $x_0 \in [a,b]$ alors l'application F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Copyrighted material

Démonstration Pour montrer que F est dérivable en x_0 de nombre dérivée $f(x_0)$, montrons que la quantité $(F(x_0+h)-F(x))/h$ tend vers $f(x_0)$ lorsque h tend vers 0, autrement dit, montrons qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 tel que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall h \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$,

$$|h| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit ε un réel strictement positif fixé ; puisque f est continue en $x_0 \in [a,b]$,

$$\exists \widetilde{\eta} \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in [a,b] \qquad \big(|x-x_0| \leqslant \widetilde{\eta} \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon\big).$$

$\trianglerighteq$ Soit h un réel strictement positif tel que $[x_0, x_0+h] \subset [a,b]$. On a

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \quad f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\ \mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{h}\left| \int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\ \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Si $h \leqslant \widetilde{\eta}$ alors pour tout $t \in [x_0, x_0+h]$ on a $|t-x_0| \leqslant \widetilde{\eta}$ et par conséquent $|f(t)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. On a alors,

$$\left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\ \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

$\trianglerighteq$ Soit h un réel strictement négatif tel que $[x_0, x_0+h] \subset [a,b]$. On a

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = -\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} \big(f(t)-f(x_0)\big)\ \mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|h|}\left| \int_{x_0+h}^{x_0} \big(f(t)-f(x_0)\big)\ \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0} |f(t)-f(x_0)|\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Si $|h| \leqslant \widetilde{\eta}$ alors pour tout $t \in [x_0+h, x_0]$ on a $|t-x_0| \leqslant \widetilde{\eta}$ et par conséquent $|f(t)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. On a alors,

$$\left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0} \varepsilon\ \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

□

Copyrighted material

Hidden page

Exemple L'application $\Phi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi'(x) = 2\sqrt{1+16x^4} - \sqrt{1+x^4}$.

18.3.2 Primitives

Définition 18.7 *Soient I un intervalle et f une application définie sur I. On appelle* **primitive** *de f sur I toute application G définie sur I vérifiant*

$$G'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I.$$

Les primitives de f sont notées $\displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int f$.

Exemple Sur l'intervalle $]-1,1[$, la fonction argument tangente hyperbolique est une primitive de la fonction $f : x \longmapsto 1/(1-x^2)$ puisque

$$\big(\operatorname{argth} x\big)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

On écrira donc

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \operatorname{argth} x \qquad \text{sur }]-1,1[.$$

La fonction $x \longmapsto \pi + \operatorname{argth} x$ est aussi une primitive de f sur l'intervalle $]-1,1[$. Attention, bien que f soit définie sur $]1,+\infty[$, sa primitive sur cet intervalle n'est pas la fonction argument tangente hyperbolique (puisque celle-ci n'est pas définie sur $]1,+\infty[$). On obtient aisément la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-1}\right).$$

On en déduit qu'une primitive de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$ est l'application

$$G : x \in]1,+\infty[\longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Proposition 18.10 *Soit f une application continue sur $[a,b]$. L'intégrale indéfinie*

$$F : x \in [a,b] \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est la primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a et toute primitive de f sur $[a,b]$ est de la forme $F + c$ où c est un réel.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

mais il n'y a pas de lien entre les 2 familles de primitives. On n'écrira pas que, sur $\mathbb{R}^*$ les primitives de $x \longmapsto 1/x$ sont les fonctions $x \longmapsto \ln|x| + c$ et on se gardera d'en conclure que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (\ln|1| + c) - (\ln|-1| + c) = 0$$

puisque la fonction $x \longmapsto 1/x$ n'est pas Riemann intégrable sur $[-1, 1]$.

18.3.4 Formule de primitivation par parties

Proposition 18.12 *Soient u et v deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. On a la relation suivante sur I :*

$$\int u'(x) \times v(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \times v(x) - \int u(x) \times v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration Puisque u et v sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, l'application $\Psi : x \in I \longmapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et

$$\Psi'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} u(x) \times v(x) &= \int \Big(u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int u'(x) \times v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x) \times v'(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

d'où la relation cherchée. □

18.3.5 Formules de changement de variable pour une primitive

Proposition 18.13 (première formule du changement de variable) *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, ϕ une application de I dans J dérivable et f une application de J dans $\mathbb{R}$ continue. Si F est une primitive de f sur J alors $F \circ \phi$ est une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur I. Autrement dit,*

$$\forall x \in I \qquad \int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\phi(x)) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$. On écrit aussi

$$\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi(x)} + c.$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable $t = \phi(x)$.

Copyrighted material

Hidden page

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \cos^3 x \sin x$ sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto -(\cos x)^4/4 + c$ où c désigne une constante réelle.

De manière formelle, on peut aussi présenter le calcul ainsi : soit $v = \cos x$; on a $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x\,\mathrm{d}x$. D'où

$$\int \cos^3 x \sin x\,\mathrm{d}x = -\int v^3\,\mathrm{d}v = -\left[\frac{1}{4}v^4\right]_{v=\cos x} = -\frac{1}{4}(\cos x)^4.$$

3. Calculons une primitive de $x \longmapsto 1/\operatorname{ch} x$ sur $\mathbb{R}$. On a[10]

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \frac{2}{(\mathrm{e}^x)^2+1}\,\mathrm{e}^x.$$

Nous allons donc effectuer le changement de variable $\phi : x \longmapsto \mathrm{e}^x$. L'application ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{2}{(\mathrm{e}^x)^2+1}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; \int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

où $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto 2/(t^2+1)$. En utilisant la formule de changement de variable, on obtient

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x = \left[\int f(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\mathrm{e}^x} = \Big[2\arctan(t)\Big]_{t=\mathrm{e}^x} = 2\arctan(\mathrm{e}^x).$$

Les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto 1/\operatorname{ch} x$ sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto 2\arctan(\mathrm{e}^x) + c$ où c désigne une constante réelle.

De manière formelle, on peut aussi présenter le calcul ainsi : soit $v = \mathrm{e}^x$; on a $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x = e^x\,\mathrm{d}x$. D'où

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{(\mathrm{e}^x)^2+1}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v \\ &= 2\Big[\arctan(v)\Big]_{v=\mathrm{e}^x} = 2\arctan(\mathrm{e}^x).\end{aligned}$$

Exercice 4 *Calculer les primitives suivantes en utilisant le changement de variable proposé.*

1 - $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$ *avec* $\phi : x \longmapsto \cos x$ *;*

2 - $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ *avec* $\phi : x \longmapsto \arcsin x$.

---

[10] Voir la proposition 14.12 page 642.

Copyrighted material

Proposition 18.14 (seconde formule du changement de variable)
Soient I et J deux intervalles, ϕ une bijection de I dans J continue dont la bijection réciproque est continue[11] *de J dans I et f une application continue sur J. On suppose que ϕ est dérivable sur I et que ϕ' ne s'annule pas sur I. Si H est une primitive de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur I alors $H \circ \phi^{-1}$ est une primitive de f sur J. Autrement dit,*

$$\forall t \in J \qquad \int f(t)\ \mathrm{d}t = H(\phi^{-1}(t)) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$. On écrit encore,

$$\int f(t)\ \mathrm{d}t = \left[\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\ \mathrm{d}x\right]_{x=\phi^{-1}(t)} + c.$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable $x = \phi^{-1}(t)$.

Démonstration L'application H, qui est la primitive de $(f \circ \phi)\ \phi'$ sur I, est dérivable sur I. Par ailleurs, puisque l'application ϕ est dérivable sur I et que ϕ' ne s'annule pas sur I, sa bijection réciproque ϕ^{-1} est dérivable sur J et (voir la proposition 14.2 p. 624)

$$(\phi^{-1}(x))' = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))} \qquad \forall x \in J.$$

En utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées, on obtient pour tout $x \in J$,

$$\big(H(\phi^{-1}(x))\big)' = (\phi^{-1}(x))'\ H'(\phi^{-1}(x)) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}\ H'(\phi^{-1}(x)).$$

Or H est une primitive de $(f \circ \phi)\ \phi'$ sur I, donc

$$H'(\phi^{-1}(x)) = f(\phi(\phi^{-1}(x)))\ \phi'(\phi^{-1}(x)) = f(x)\ \phi'(\phi^{-1}(x)).$$

Finalement

$$\big(H(\phi^{-1}(x))\big)' = f(x).$$

On en déduit que si H est une primitive de $(f \circ \phi)\ \phi'$ sur I alors $H \circ \phi^{-1}$ est une primitive de f sur J. □

Remarque On peut expliquer la différence entre les deux formules du changement de variable de la façon suivante. Dans la première formule du changement de variable, on fait apparaître dans l'expression de la fonction à intégrer la quantité $\phi(x)$. On détermine donc la primitive $\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\ \mathrm{d}x$ par le biais de la

[11] Une bijection continue de I dans J dont la bijection réciproque est continue sur J est appelée un homéomorphisme de I dans J.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_b^a u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t &= -\int_a^b u(t)\times v'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\Big[u(t)\times v(t)\Big]_a^b+\int_a^b u'(t)\times v(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[u(t)\times v(t)\Big]_b^a-\int_b^a u'(t)\times v(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ce qui permet d'affirmer que la formule est également vraie dans le cas où la seconde borne de l'intégrale est inférieure à la première. □

Remarque Pour que la fonction $g : x \longmapsto u(x)\,v'(x)+u'(x)\,v(x)$ soit définie sur $[a,b]$, il suffit de supposer u et v dérivables sur $[a,b]$. Par contre cette hypothèse n'est pas suffisante pour être certain que le terme $\int_a^b \big(u(t)\times v'(t)+u'(t)\times v(t)\big)\,\mathrm{d}t$ soit toujours défini. Il faut supposer, en plus de la dérivabilité de g sur $[a,b]$, que g est Riemann intégrable sur $[a,b]$. On a vu qu'il était souvent difficile dans le cas général de s'assurer qu'une fonction était Riemann intégrable, mais que toute fonction continue était Riemann intégrable. En supposant u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on s'assure que g est continue sur $[a,b]$ (en tant que produit et somme d'applications continues sur $[a,b]$) et par conséquent qu'elle est Riemann intégrable sur $[a,b]$. Bien entendu l'hypothèse u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ est alors une condition suffisante pour que la formule d'intégration par parties ait un sens. Il ne s'agit pas d'une condition nécessaire.

Cette formule constitue un moyen puissant de calculer des intégrales comme l'illustrent les exemples suivants.

Exemples

1. Calculons $\displaystyle\int_a^b \arctan t\,\mathrm{d}t$ où a et b sont deux réels, $a<b$. Posons

$$u : t \longmapsto \arctan t \quad \text{et} \quad v : t \longmapsto t.$$

Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle $[a,b]$. Par ailleurs, pour $t\in[a,b]$,

$$u'(t)=\frac{1}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad v'(t)=1.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties on obtient,

$$\int_a^b \arctan t\,\mathrm{d}t=\Big[t\arctan t\Big]_a^b-\int_a^b \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\Big[t\arctan t\Big]_a^b-\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_a^b.$$

Ainsi,

$$\int_a^b \arctan t\,\mathrm{d}t=b\arctan b-a\arctan a+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a^2}{1+b^2}\right).$$

Copyrighted material

2. Calculons $I = \displaystyle\int_a^b \cos t\, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$ où a et b sont deux réels, $a < b$. Posons

$$u : t \longmapsto \cos t \quad \text{et} \quad v : t \longmapsto \mathrm{e}^t.$$

Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle $[a, b]$. En utilisant la formule d'intégration par parties on obtient,

$$\int_a^b \cos t\, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \Big[\cos t\, \mathrm{e}^t\Big]_a^b + \int_a^b \sin t\, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

Une seconde intégration par parties permet d'établir que

$$\int_a^b \sin t\, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \Big[\sin t\, \mathrm{e}^t\Big]_a^b - \int_a^b \cos t\, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$I = \Big[\cos t\, \mathrm{e}^t\Big]_a^b + \Big[\sin t\, \mathrm{e}^t\Big]_a^b - I,$$

autrement dit que

$$I = \frac{1}{2}\Big[\cos t\, \mathrm{e}^t\Big]_a^b + \frac{1}{2}\Big[\sin t\, \mathrm{e}^t\Big]_a^b = \frac{1}{2}(\cos b + \sin b)\mathrm{e}^b - \frac{1}{2}(\cos a + \sin a)\mathrm{e}^a.$$

3. Calculons pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $J_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \, \mathrm{d}t$. Appliquons la formule d'intégration par parties en prenant $u : t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ et $v : t \longmapsto t$. Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a,

$$J_n(x) = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \, \mathrm{d}t,$$

puis en remarquant que $t^2 = (1+t^2) - 1$ on obtient,

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \, \mathrm{d}t - 2n \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nJ_n(x) - 2nJ_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Finalement on a établi la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$J_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n(x).$$

Cette expression permet de calculer $J_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ par récurrence à partir de l'expression de $J_1(x) = \arctan x$.

Exercice 6 *Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, \mathrm{d}x$.*

1 - Calculer I_0 et I_1.

2 - Montrer que pour tout entier n non nul, $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

Copyrighted material

Hidden page

– On souhaite calculer $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $t=\phi(y)$ (où ϕ est une fonction donnée ou à déterminer) consiste alors à trouver deux réels a,b tels que $\alpha=\phi(a)$ et $\beta=\phi(b)$ puis à calculer $\displaystyle\int_a^b f(\phi(y))\,\phi'(y)\,\mathrm{d}y$.

Exemples

1. Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} y}\,\mathrm{d}y$. D'après la définition de la fonction cosinus hyperbolique, on a

$$\frac{1}{\operatorname{ch} y}=\frac{2\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^{2y}+1}\qquad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} y}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \frac{2\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^{2y}+1}\,\mathrm{d}y$$

ce qui nous suggère le changement de variable $t=\mathrm{e}^y$. L'application exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et la fonction $f:t\longmapsto\dfrac{2}{1+t^2}$ est continue sur $\phi([0,1])=[1,e]$. La formule du changement de variable nous permet de conclure que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} y}\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 f(\phi(y))\,\phi'(y)\,\mathrm{d}y=\int_1^e f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_1^e \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2\arctan(e)-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

De manière formelle, on peut aussi présenter le calcul ainsi : soit $v=\mathrm{e}^y$; on a $\mathrm{d}v=v'(y)\,\mathrm{d}y=e^y\,\mathrm{d}y$ et $v(0)=1$, $v(1)=\mathrm{e}$. D'où

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} y}\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{2}{(\mathrm{e}^y)^2+1}\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y=2\int_1^e \frac{1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v\\ &= 2\Big[\arctan(v)\Big]_1^e=2\arctan(e)-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

On prendra garde en adoptant ce formalisme à ne pas oublier de modifier les bornes de l'intégrale exprimée avec la nouvelle variable.

2. Calculons $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$ en considérant le changement de variable $t=\mathrm{e}^y$. Ici,

$$f:t\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]\longmapsto\frac{1}{t\ln t}\qquad\text{et}\qquad \phi:y\in[1,2]\longmapsto\mathrm{e}^y\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2].$$

L'application exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ et f est continue sur $\phi([1,2])=[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ car la fonction $t\longmapsto t\ln t$ est continue sur $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. On obtient,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t &= \int_{\phi(1)}^{\phi(2)} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^2 f(\phi(y))\,\phi'(y)\,\mathrm{d}y=\int_1^2 \frac{1}{\mathrm{e}^y\ln\mathrm{e}^y}\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\\ &= \int_1^2 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\Big[\ln y\Big]_1^2=\ln 2.\end{aligned}$$

Copyrighted material

Hidden page

Malheureusement cette dernière expression n'a pas de sens car la fonction $x \longmapsto -2/x$ n'est pas intégrable sur $[-\sqrt{5}, \sqrt{3}]$. Cette erreur est survenue en raison d'une utilisation abusive de la formule du changement de variable. La fonction g n'est pas continue sur l'intervalle fermé borné $\psi([-\sqrt{5}, \sqrt{3}]) = [-1, 4]$ car elle est non bornée en 4. En étudiant la fonction ψ on se convaincra que $\psi([-\sqrt{5}, \sqrt{3}]) \neq [\psi(-\sqrt{5}), \psi(\sqrt{3})]$ et en relisant l'énoncé du théorème 18.2 on prendra garde que la continuité de g doit porter sur l'intervalle $\psi([-\sqrt{5}, \sqrt{3}])$ et non pas seulement sur $[\psi(-\sqrt{5}), \psi(\sqrt{3})]$.

2. Considérons le changement de variable défini par la fonction $\phi : x \longmapsto \sin x$ pour calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

On a $\phi(0) = 0$, $\phi(\pi/2) = 1$ et la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$. Par ailleurs la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur l'intervalle $\phi([0, \pi/2]) = [0, 1]$. En utilisant la formule du changement de variable on obtient,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\phi(0)}^{\phi(\pi/2)} \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} f(\phi(y))\, \phi'(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(\sin y)^2}\, \cos y\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

On a $\sqrt{1-(\sin y)^2} = \sqrt{(\cos y)^2} = |\cos y|$. Puisque la fonction cosinus est positive sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ on en déduit que

$$I = \int_0^{\pi/2} (\cos y)^2\, \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2y)+1}{2}\, \mathrm{d}y = \Big[\frac{1}{4}\sin(2y) + \frac{1}{2}y\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ici la fonction ϕ définit une bijection de $[0, \pi/2]$ dans $[0, 1]$ mais il ne s'agit nullement d'une condition nécessaire pour appliquer la formule du changement de variable. Considérons la fonction ϕ sur l'intervalle $[0, 5\pi/2]$. On a $\phi(0) = 0$ et $\phi(5\pi/2) = 1$, la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 5\pi/2]$ et on a $\phi([0, 5\pi/2]) = [-1, 1]$. On peut appliquer la formule du changement de variable, la fonction f étant continue sur $[-1, 1]$. On obtient

$$I = \int_{\phi(0)}^{\phi(5\pi/2)} \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{5\pi/2} f(\phi(y))\, \phi'(y)\, \mathrm{d}y = \int_0^{5\pi/2} |\cos y|\, \cos y\, \mathrm{d}y.$$

Contrairement au cas précédent, la fonction cosinus n'est pas positive sur tout l'intervalle $[0, 5\pi/2]$. On utilise la relation de Chasles pour écrire

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} (\cos y)^2\, \mathrm{d}y - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cos y)^2\, \mathrm{d}y + \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} (\cos y)^2\, \mathrm{d}y \\ &= \Big[\frac{1}{4}\sin(2y) + \frac{1}{2}y\Big]_0^{\pi/2} - \Big[\frac{1}{4}\sin(2y) + \frac{1}{2}y\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \Big[\frac{1}{4}\sin(2y) + \frac{1}{2}y\Big]_{3\pi/2}^{5\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4} - \pi + \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Cas général

On décompose la fonction rationnelle en la somme d'une fonction polynomiale, d'éléments simples de première espèce et d'éléments simples de seconde espèce.

La fonction polynomiale s'intègre sans grande difficulté.

Un élément simple de première espèce est de la forme $u(x) = \dfrac{\alpha}{(x-\beta)^n}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une primitive U de u est définie par

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{\alpha}{1-n}\,\frac{1}{(x-\beta)^{n-1}} \quad \text{si } n \neq 1; \\ U(x) &= \alpha\,\ln|x-\beta| \quad \text{si } n = 1. \end{aligned}$$

Un élément simple de seconde espèce est de la forme $v(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{(x^2+\gamma x+\delta)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ et $\Delta = \gamma^2 - 4\delta < 0$. On a

$$x^2+\gamma x+\delta = \left(x+\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \underbrace{\delta - \frac{\gamma^2}{4}}_{=-\Delta/4} = \left(x+\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = -\frac{\Delta}{4}\left(1+\left(\frac{2x+\gamma}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right).$$

Le changement de variable $t = \dfrac{2x+\gamma}{\sqrt{-\Delta}}$ conduit au calcul des primitives suivantes

$$I_n(t) = \int \frac{2t}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n(t) = \int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient immédiatement,

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} \quad \text{si } n > 1; \\ I_n(t) &= \ln|1+t^2| \quad \text{si } n = 1. \end{aligned}$$

La fonction J_n est calculée par une formule de récurrence obtenue par intégration par partie (voir la section 18.4.1). On a,

$$J_1(t) = \arctan t \quad \text{et} \quad J_{n+1}(t) = \frac{2n-1}{2n}\,J_n(t) + \frac{t}{2n(1+t^2)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemple Cherchons une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2-3x-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}.$$

On a la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{x^2-3x-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+x+1} + \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Copyrighted material

Il est clair que

$$\int \left(-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right)\,\mathrm{d}x = -\ln|x+1| - \frac{2}{x+1}.$$

Par ailleurs,

$$x^2+x+1 = \frac{3}{4}\left(1+h(x)^2\right) \quad \text{où} \quad h(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,(x+1/2)\,.$$

En effectuant le changement de variable $t = h(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{5}{2}}{\frac{3}{4}(1+t^2)}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right]_{t=h(x)} - \frac{5}{\sqrt{3}}\left[\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right]_{t=h(x)} \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|1+t^2|\right]_{t=h(x)} - \frac{5}{\sqrt{3}}\left[\arctan(t)\right]_{t=h(x)} \\
&= \frac{1}{2}\ln|1+h(x)^2| - \frac{10}{3}\arctan(h(x)).
\end{aligned}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}t - \frac{5}{2}}{\frac{9}{16}(1+t^2)^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[\int \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\right]_{t=h(x)} - \frac{20}{3\sqrt{3}}\left[\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\right]_{t=h(x)} \\
&= 2\left[-\frac{1}{1+t^2}\right]_{t=h(x)} - \frac{20}{3\sqrt{3}}\Big[J_2(t)\Big]_{t=h(x)} \\
&= -\frac{2}{1+h(x)^2} - \frac{10}{3\sqrt{3}}\left(\arctan(h(x)) + \frac{h(x)}{1+h(x)^2}\right) \\
&= -\frac{10}{3\sqrt{3}}\arctan(h(x)) - \frac{4}{9}\,\frac{5x+7}{1+h(x)^2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{2}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) \\
&\quad -\frac{25}{3\sqrt{3}}\arctan((2x+1)/\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\,\frac{5x-7}{x^2+x+1}.
\end{aligned}$$

Cas particulier des primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

Pour des primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$, la procédure de calcul de la primitive d'une fraction rationnelle décrite peut être simplifiée en remarquant

Copyrighted material

que

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}_{D}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$$

Le premier terme a pour primitive $\dfrac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|$. Pour calculer le second terme, trois cas sont à envisager suivant le signe de $\Delta = b^2-4ac$.

1. Si $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$ alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$. On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\alpha}{x-x_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\beta}{x-x_2}\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha\ln|x-x_1| + \beta\ln|x-x_2|\end{aligned}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Si $\Delta = 0$ alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = a\int \left(\frac{1}{x-x_1}\right)^2\,\mathrm{d}x = -a\frac{1}{x-x_1}.$$

3. Si $\Delta < 0$ on écrit,

$$ax^2+bx+c = a\Bigg(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{\frac{c}{a^2}-\frac{b^2}{4a^2}}_{=-\frac{\Delta}{4a^2}}\Bigg) = \frac{-\Delta}{4a}\left(1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right).$$

On effectue alors le changement de variable $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$ qui nous donne

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right]_{t\,=\,(2ax+b)/\sqrt{-\Delta}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right).\end{aligned}$$

Exemples

1. Calculons la primitive $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$ sur l'un des intervalles $]-\infty,1[$ ou $]1,2[$ ou $]2,+\infty[$. On écrit

$$\int \frac{4x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = 2\underbrace{\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x}_{=F_1(x)} + 9\underbrace{\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x}_{=F_2(x)}.$$

Copyrighted material

Si on introduit la fonction $u : x \longmapsto x^2 - 3x + 2$ on obtient

$$F_1(x) = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|u(x)| = \ln|x^2 - 3x + 2|.$$

D'autre part, une décomposition en éléments simples indique que

$$F_2(x) = \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| - \ln|x-1|.$$

Finalement,

$$\int \frac{4x}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x^2 - 3x + 2| + 9\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|.$$

2. Calculons la primitive $\displaystyle\int \frac{6x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$ sur $]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$. On écrit

$$\int \frac{6x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = 3\underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x}_{=F_1(x)} - 3\underbrace{\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x}_{=F_2(x)}.$$

Si on introduit la fonction $u : x \longmapsto x^2 + 2x + 1$ on obtient

$$F_1(x) = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|u(x)| = \ln|x^2 + 2x + 1|.$$

D'autre part

$$F_2(x) = \int \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+x}.$$

Finalement,

$$\int \frac{6x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x^2+2x+1| + \frac{3}{1+x}.$$

3. Calculons la primitive $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$. On écrit

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x}_{=F_1(x)} - 3\underbrace{\int \frac{1}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x}_{=F_2(x)}.$$

Introduisons la fonction $u : x \longmapsto x^2 + 4x + 6$; on a

$$F_1(x) = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|u(x)| = \ln|x^2 + 4x + 6|.$$

Copyrighted material

Hidden page

18.5.3 Intégration d'une fonction rationnelle en $\sin x, \cos x, \tan x$

Cas général

Le changement de variable $x = 2\arctan t$ (ou $t = \tan(x/2)$ conduit au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle en la variable t. On peut alors utiliser la méthode décrite au paragraphe 18.5.1.

Exemple Calculons sur $]0, \pi[$ une primitive de la fonction $f : x \longmapsto 1/\sin x$. La fonction $\phi : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto 2\arctan t$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0, \pi[$. Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée qui est la fonction $t \longmapsto 2/(1+t^2)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. La bijection réciproque est $\phi^{-1} : x \in]0, \pi[\longmapsto \tan(x/2)$. D'après la seconde formule du changement de variable pour une primitive, on a

$$\int \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin \phi(t)}\, \phi'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) = 2\cos^2(\alpha)\tan(\alpha) = 2\frac{\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$$

donc

$$\sin(\phi(t)) = \sin(2\arctan t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

et

$$\int \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t\right]_{t=\tan\frac{x}{2}} = \Big[\ln t\Big]_{t=\tan(x/2)} = \ln\left(\tan(x/2)\right).$$

On vérifie que sur chaque intervalle de la forme $]n\pi, (n+1)\pi[$ les primitives de $x \longmapsto 1/\sin x$ sont les fonctions $x \longmapsto \ln|\tan(x/2)| + c_n$ où $c_n \in \mathbb{R}$.

Formules de Bioche

On peut, dans certains cas, simplifier les calculs de $\int f(x)\, \mathrm{d}x$ par un changement de variable adapté aux propriétés de la fonction f à intégrer.

- Si f est impaire, on fait le changement de variable $t = \cos x$.
- Si f vérifie $f(\pi - x) = -f(x)$, on fait le changement de variable $t = \sin x$.
- Si f est π périodique, on fait le changement de variable $t = \tan x$.

Cas d'une fonction polynomiale en $\sin x, \cos x$

Pour calculer une primitive de $\sin^p x \cos^q x$ on effectue un changement de variable qui dépend de la parité de p et q.

- Si p est pair et q impair, on fait le changement de variable $t = \sin x$.
- Si p et q sont impairs, on fait le changement de variable $t = \sin x$ ou $t = \cos x$.

Copyrighted material

Hidden page

3. Si $\Delta > 0$ et $a < 0$ alors

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\Bigg(\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 \underbrace{-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}_{-\frac{\Delta}{4a^2}}\Bigg) = -\frac{\Delta}{4a}\left(\frac{-4a^2}{\Delta}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1\right) \\ &= -\frac{\Delta}{4a}\left(1-\left(\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}x+\frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $t = \dfrac{2a}{\sqrt{\Delta}}x + \dfrac{b}{\sqrt{\Delta}}$. On est amené à considérer la primitive $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ qui est $\arcsin t$.

4. Si $\Delta < 0$ alors

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\Bigg(\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 \underbrace{-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}_{-\frac{\Delta}{4a^2}}\Bigg) = \frac{-\Delta}{4a}\left(\frac{4a^2}{-\Delta}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+1\right) \\ &= \frac{-\Delta}{4a}\left(\left(\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}x+\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right). \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $t = \dfrac{2a}{\sqrt{-\Delta}}x + \dfrac{b}{\sqrt{-\Delta}}$. On est amené à considérer la primitive $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$ qui est $\operatorname{argsh} t$.

Exemple Calculons la primitive $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.

On a

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,\mathrm{d}x.$$

La première primitive se calcule par le changement de variable défini par la fonction $\phi : x \longmapsto x^2+4x+6$,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+6}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{\phi(x)}}\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi(x)} \\ &= \left[2\sqrt{t}\right]_{t=\phi(x)} = 2\sqrt{x^2+4x+6}. \end{aligned}$$

Intéressons-nous à la seconde primitive. On a

$$x^2+4x+6 = (x+2)^2+2 = 2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^2+1\right).$$

Copyrighted material

Hidden page

18.6.1 Principe des méthodes d'intégration numérique

On considère une application f continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ (avec $a < b$) et on souhaite obtenir une valeur approchée de l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Pour cela on introduit une subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ de pas h dont les $n+1$ nœuds $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ sont

$$x_i = a + ih \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

On a : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

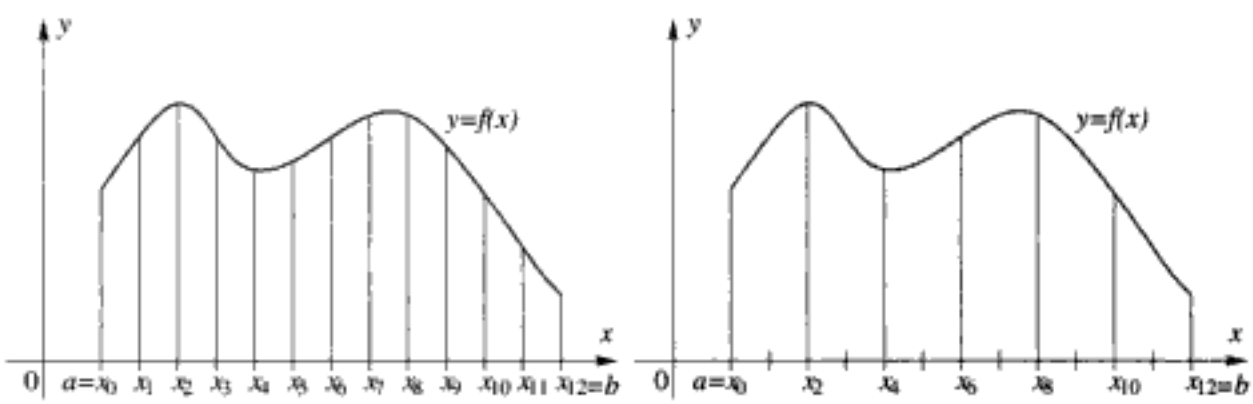


Fig. 9 Subdivisions utilisées dans la méthode des Trapèzes (à gauche) et de Simpson (à droite).

D'après la formule de Chasles, l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ peut se décomposer en une somme d'intégrales prises sur les sous-intervalles issus de la subdivision (voir la définition 18.1) de l'intervalle $[a, b]$.

Dans le cas de la méthode des trapèzes, on considère les n sous-intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ et on écrit

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Dans le cas de la méthode de Simpson, on considère les $n/2$ sous-intervalles $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{n-2}, x_n]$ (ce qui suppose que n soit un entier pair) et on écrit

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Copyrighted material

Hidden page

et que

$$a_1 = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

L'expression de la fonction polynomiale P_1 est par conséquent

$$P_1(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\,(x - x_i)\,.$$

La méthode des trapèzes consiste à approcher l'intégrale de f sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par l'intégrale de la fonction polynomiale P_1 sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Autrement dit, à effectuer l'approximation

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)\ \mathrm{d}x.$$

L'intégrale de la fonction polynomiale P_1 se calcule aisément. On a

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\,(x - x_i) \right) \mathrm{d}x \\
&= f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathrm{d}x + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)\ \mathrm{d}x \\
&= f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \left[\frac{1}{2}\,(x - x_i)^2 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&= \frac{h}{2}\,(f(x_i) + f(x_{i+1}))\,,
\end{aligned}$$

où $h = x_{i+1} - x_i$. La valeur de cette intégrale est l'aire algébrique sous la représentation graphique de la fonction polynomiale P_1 (voir la fig. 10). Puisque le polynôme P_1 est de degré 1, la représentation graphique de P_1 est une droite. L'aire considérée est celle d'un trapèze, ce qui donne son nom à la formule de quadrature.

On en déduit la ***formule de quadrature des trapèzes***

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\,(f(x_i) + f(x_{i+1}))\,.}$$

Le paramètre h désigne la longueur de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ sur lequel on intègre.

Formule de quadrature de Simpson

La méthode de Simpson[14] consiste à approcher (voir la fig. 11) la fonction f sur l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ (de longueur $2h$) par l'unique fonction polynomiale P_2 de degré 2 vérifiant :

$$P_2(x_{2i}) = f(x_{2i}), \quad P_2(x_{2i+1}) = f(x_{2i+1}) \quad \text{et} \quad P_1(x_{2i+2}) = f(x_{2i+2}). \quad (5)$$

[14] Simpson, Thomas (1710, Market Bosworth (Angleterre) - 1761, Market Bosworth).

Copyrighted material

Hidden page

On obtient l'expression suivante pour la fonction polynomiale P_2 sur l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$:

$$P_2(x) = f(x_{2i}) + C_1 (x - x_{2i}) + \frac{(x - x_{2i})(x - x_{2i+1})}{x_{2i+2} - x_{2i}} C_2.$$

La méthode de Simpson consiste à approcher l'intégrale de f sur l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ par celle de la fonction polynomiale P_2 sur l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Autrement dit, à effectuer l'approximation

$$\int_{x_i}^{x_{2i+2}} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \int_{x_i}^{x_{2i+2}} P_2(x)\ \mathrm{d}x.$$

L'intégrale de la fonction polynomiale P_2 se calcule sans difficulté. On a

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{2i+2}} P_2(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{x_i}^{x_{2i+2}} \Big(f(x_{2i}) + C_1 (x - x_{2i}) \\
&\qquad + \frac{(x - x_{2i})(x - x_{2i+1})}{x_{2i+2} - x_{2i}} C_2 \Big)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{x_i}^{x_{2i+2}} f(x_{2i})\ \mathrm{d}x + C_1 \int_{x_i}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i})\ \mathrm{d}x \\
&\qquad + \frac{C_2}{x_{2i+2} - x_{2i}} \int_{x_i}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i})(x - x_{2i+1})\ \mathrm{d}x \\
&= 2h f(x_{2i}) + C_1 \Big[\frac{1}{2} (x - x_{2i})^2 \Big]_{x_i}^{x_{2i+2}} \\
&\qquad + \frac{C_2}{2h} \Big[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} (x_{2i+1} + x_i) x^2 + x_{2i} x_{2i+1} \Big]_{x_i}^{x_{2i+2}} \\
&= \frac{h}{3} \left(f(x_i) + 4 f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right),
\end{aligned}$$

où $h = x_{2i+2} - x_{2i+1} = x_{2i+1} - x_i$. On en déduit la formule de quadrature de Simpson

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{2i+2}} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3} \left(f(x_i) + 4 f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right).}$$

18.6.3 Méthodes composites d'intégration numérique

Il serait maladroit de vouloir utiliser la formule de quadrature des trapèzes ou la formule de quadrature de Simpson sur l'intervalle $[a, b]$ en entier. En effet, l'approximation d'une fonction par un polynôme de degré 1 ou 2 sur un intervalle arbitrairement grand, ne peut pas être précise. C'est la raison pour laquelle on introduit une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. On applique la formule de quadrature sur chacun des sous-intervalles $[x_\alpha(j), x_\alpha(j+1)]$ qui peuvent être rendus arbitrairement petits en diminuant le pas de la subdivision. Sur un petit intervalle, l'approximation d'une fonction par un polynôme de degré 1 ou 2 est en général précise. L'approximation de l'intégrale de la fonction le sera aussi. On parle de méthode composite d'intégration numérique.

Copyrighted material

Méthode composite des trapèzes

Sur chacun des n intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, on approche l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x$ par la formule de quadrature des trapèzes. On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) = \tilde{I}_h^{(\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Pour une valeur de n donnée, le calcul de $\tilde{I}_h^{(\mathcal{T})}$ conduit à effectuer $2n-1$ additions, une multiplication et une division, soit un nombre total d'opérations de l'ordre de $2n$. On peut réécrire $\tilde{I}_h^{(\mathcal{T})}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{I}_h^{(\mathcal{T})} &= \frac{h}{2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \right) = \frac{h}{2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \right) \\ &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \end{aligned}$$

En ayant recours à cette dernière expression, on réduit le nombre d'additions : il est égal à n.

Méthode composite de Simpson

Sur chacun des $n/2$ intervalles $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{n-2}, x_n]$, on remplace l'intégrale $\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\ \mathrm{d}x$ par la formule de quadrature de Simpson (n doit être pair). On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\ \mathrm{d}x \\ &\approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right) = \tilde{I}_h^{(\mathcal{S})}. \end{aligned}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

pour dérivée sur $]0,1[$ l'application ψ' définie par

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{2h}{3}\Big(f(x_{2i+1}+th)+f(x_{2i+1}-th)\Big)-\frac{4h}{3}f(x_{2i+1})\\ &\quad -\frac{th^2}{3}\Big(f'(x_{2i+1}+th)-f'(x_{2i+1}-th)\Big)-5kt^4h^5.\end{aligned}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}\psi''(t) &= \frac{h^2}{3}\Big(f'(x_{2i+1}+th)-f'(x_{2i+1}-th)\Big)\\ &\quad -\frac{th^3}{3}\Big(f''(x_{2i+1}+th)+f''(x_{2i+1}-th)\Big)-20kt^3h^5\end{aligned}$$

et

$$\psi^{(3)}(t)=-\frac{th^4}{3}\Big(f^{(3)}(x_{2i+1}+th)-f^{(3)}(x_{2i+1}-th)\Big)-60kt^2h^5. \qquad (7)$$

Remarquons que l'on a $\psi(0)=0$. D'après le théorème de Rolle (voir le théorème 16.1 p. 729) il existe un réel $c_1\in]0,1[$ tel que $\psi'(c_1)=0$. L'application f étant de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[x_{2i},x_{2i+2}]$, l'application ψ' est continue et dérivable sur $[0,1]$ et puisque $\psi'(0)=0$, d'après le théorème de Rolle il existe un réel $c_2\in]0,c_1[$ tel que $\psi''(c_2)=0$. On a également $\psi''(0)=0$ et une troisième utilisation du théorème de Rolle nous assure l'existence d'un réel $c_3\in]0,c_2[$ tel que $\psi^{(3)}(c_3)=0$.

D'après la relation (7) on a

$$\psi^{(3)}(c_3)=-\frac{c_3h^4}{3}\Big(f^{(3)}(x_{2i+1}+c_3h)-f^{(3)}(x_{2i+1}-c_3h)\Big)-60kc_3^2h^5$$

et par conséquent

$$k=-\frac{f^{(3)}(x_{2i+1}+c_3h)-f^{(3)}(x_{2i+1}-c_3h)}{180c_3h}.$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[x_{2i},x_{2i+2}]$, l'application $f^{(3)}$ est continue et dérivable sur $[x_{2i},x_{2i+2}]$. D'après le théorème des accroissements finis (voir le théorème 16.2 p. 731) il existe un réel $c_4\in]x_{2i+1}-c_3h,x_{2i+1}+c_3h[$ tel que

$$f^{(3)}(x_{2i+1}+c_3h)-f^{(3)}(x_{2i+1}-c_3h)=2c_3hf^{(4)}(c_4).$$

On a alors $k=-\dfrac{f^{(4)}(c_4)}{90}$. Pour obtenir l'estimation d'erreur annoncée, il suffit de remarquer que l'on a

$$\psi(1)=\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{h}{3}\big(f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})\big)-kh^5=\mathcal{E}_i^{(S)}-kh^5$$

et que $\psi(1)=0$ par le choix qui a été fait pour la constante k. On a donc

$$\mathcal{E}_i^{(S)}=kh^5=-\frac{h^5f^{(4)}(c_4)}{90}$$

Copyrighted material

et

$$\left|\mathcal{E}_i^{(\mathcal{S})}\right| \leqslant \frac{K_i h^5}{90} \qquad \text{où} \quad K_i = \sup_{x\in[x_{2i},x_{2i+2}]} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

□

Remarque On peut démontrer le lemme 18.1 en exploitant les mêmes idées que celles introduites dans la démonstration du lemme 18.2 à partir de l'application ϕ définie sur $[0,1]$ par

$$\phi(t) = \int_{x_i}^{x_i+th} f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{th}{2}\big(f(x_i+th)+f(x_i)\big) - kt^3h^3$$

où la constante k est choisie pour que $\phi(x_{i+1}) = 0$.

Proposition 18.18 *Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ alors*

$$\left|\tilde{I}_h^{(\mathcal{S})} - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant K\frac{(b-a)^5}{180n^4} \qquad \textit{où} \quad K = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Démonstration Sur chacun des $\frac{n}{2}$ intervalles $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i \in \{0,\ldots,\frac{n}{2}-1\}$, on commet une erreur d'intégration élémentaire $\mathcal{E}_i^{(\mathcal{S})}$ qui d'après le lemme 18.2 vérifie

$$\left|\mathcal{E}_i^{(\mathcal{S})}\right| \leqslant \frac{K_i h^5}{90} \qquad \text{où} \quad K_i = \sup_{x\in[x_{2i},x_{2i+2}]} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

L'erreur globale qui est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_h^{(\mathcal{S})} &= \tilde{I}_h^{(\mathcal{S})} - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\left\{\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_2(x)\ \mathrm{d}x - \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\ \mathrm{d}x\right\} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \mathcal{E}_i^{(\mathcal{T})},\end{aligned}$$

vérifie donc

$$\left|\mathcal{E}_h^{(\mathcal{S})}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\left|\mathcal{E}_i^{(\mathcal{S})}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{K_i h^5}{90} \leqslant \frac{nh^5K}{180}$$

où $K = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$. Puisque $h = (b-a)/n$, on a bien

$$\left|\mathcal{E}_h^{(\mathcal{S})}\right| \leqslant K\frac{(b-a)^5}{180n^4}.$$

□

Copyrighted material

Remarque L'erreur d'intégration commise en remplaçant l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la formule de Simpson vérifie $E_h^{(S)} = \mathcal{O}(1/n^4)$. La méthode de Simpson possède une convergence d'ordre 4. Elle est donc plus efficace que la méthode des trapèzes puisque cette fois-ci, si l'on multiplie par deux le nombre de nœuds de la subdivision, l'erreur d'intégration est divisée par un facteur 16 (au lieu d'un facteur 4 pour la méthode des trapèzes).

18.7 Exercices de synthèse

Exercice 10 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application J_n qui au réel x associe*

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \ \cos(tx)\ \mathrm{d}t.$$

Dans cet exercice on s'intéresse aux propriétés de l'application J_n au voisinage de 0.

1 - Montrer que l'application J_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle atteint son maximum en 0.

2 - a) Établir la relation de récurrence $(2n+1)J_n(0) = 2nJ_{n-1}(0)\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que pour tout entier n on a $J_n(0) = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3 - a) Montrer que pour $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ on a $0 \leqslant 1 - \cos(y) \leqslant y^2/2$.

b) En déduire que pour tout entier n, l'application J_n est continue en 0 (on pourra considérer la quantité $J_n(0) - J_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$).

4 - Montrer que pour tout entier n, l'application J_n est dérivable en 0 et donner la valeur de $J_n'(0)$.

Exercice 11 *On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\ \mathrm{d}t$.*

1 - Calculer I_0, I_1 et I_2 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\ \mathrm{d}t$.

2 - En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n non nul on a $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$. En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$ on a

$$I_{2p} = \frac{P_1(p)}{P_2(p)}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{P_2(p)}{P_1(p+1)}$$

où $P_1(p) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ et $P_2(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.

3 - Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \pi/2]$ on a $\cos^n t \leqslant \cos^{n-1} t$. En déduire que la suite $(I_n)_n$ est positive et décroissante.

Copyrighted material

Hidden page

18.8 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - Représentation graphique des fonctions f, ϕ et ψ pour $n = 10$.

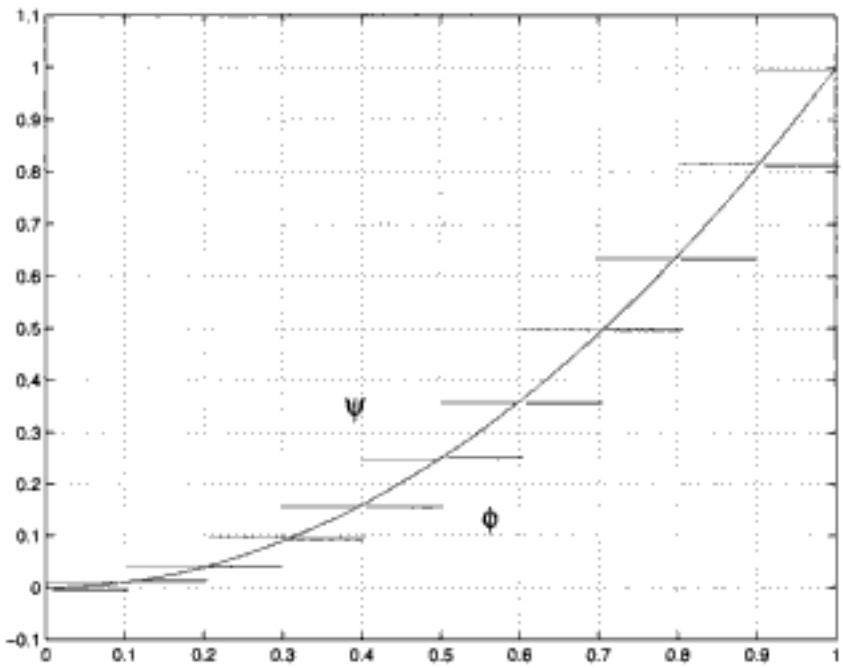


Fig. 13

2 - On a[16]

$$I_n = \int_0^1 \phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i) = h\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2$$
$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}.$$

De même, on a

$$J_n = \int_0^1 \psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_{i+1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i+1}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

3 - Pour montrer que f est Riemann intégrable, considérons les réels

$$I_-(f) = \sup\left\{\int_0^1 \phi \;\mid\; \phi \in \mathcal{E}_{[0,1]}\ ,\ \phi \leqslant f\right\}$$

---

[16] On rappelle que pour tout entier k non nul, $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Copyrighted material

et

$$I_+(f) = \inf\left\{\int_0^1 \psi \;\mid\; \psi \in \mathcal{E}_{[0,1]}\ ,\ \psi \geqslant f\right\}.$$

Par définition de la borne inférieure, on a $I_-(f) \leqslant J_n$ et par définition de la borne supérieure, on a $I_+(f) \geqslant I_n$. Par ailleurs, on a $I_+(f) \leqslant I_-(f)$ car pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{E}_{[0,1]}$

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \quad \Longrightarrow \int_0^1 \phi \ \leqslant \int_0^1 \psi\ .$$

On en déduit que pour tout entier n non nul,

$$I_n \leqslant I_+(f) \leqslant I_-(f) \leqslant J_n.$$

Or, on a clairement,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{1}{3}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$I_+(f) = I_-(f) = \frac{1}{3}.$$

Cela implique (voir la p. 839) que f est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et que

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Solution de l'exercice 2

Supposons que f soit croissante et non constante sur $[a,b]$ (le cas où f est décroissante sur $[a,b]$ se ramène au cas considéré en remarquant qu'alors $-f$ est croissante ; si f est constante sur $[a,b]$, f est clairement Riemann intégrable car il s'agit alors d'une fonction en escalier). Sous cette hypothèse, on a $f(b) > f(a)$ et pour ε réel strictement positif fixé, on peut considérer une subdivision uniforme $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de $[a,b]$ de pas h vérifiant $h < \varepsilon/(f(b) - f(a))$. Introduisons les fonctions en escalier sur $[a,b]$ ϕ_ε et ψ_ε définies par

1. $\phi_\varepsilon(x) = f(x_i)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$;
2. $\psi_\varepsilon(x) = f(x_{i+1})$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$;
3. $\phi_\varepsilon(b) = \psi_\varepsilon(b) = f(b)$.

Puisque f est croissante sur $[a,b]$ on a pour tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$ $f(x_i) \leqslant f(x_{i+1})$ et par conséquent pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$ on a $\phi_\varepsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_\varepsilon(x)$. Ainsi $\phi_\varepsilon \leqslant f \leqslant \psi_\varepsilon$ sur $[a,b]$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big(\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\Big) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} h\Big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\Big) = h\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right) \\
&= h(f(b) - f(a)) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Copyrighted material

L'application f est donc Riemann intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.

Solution de l'exercice 3

1 - L'application $v : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 + 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est une application polynomiale, elle est donc indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$) à valeurs dans $J = [1, +\infty[$. L'application $f : t \in [1, +\infty[\longmapsto \ln t$ est continue sur J. D'après la proposition 18.9, on en conclut que l'application Φ est dérivable sur J de dérivée en $x \in J$,

$$\Phi'(x) = v'(x) \times \Phi(v(x)) = 2x \ln(x^2 + 1).$$

2 - L'application ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction logarithme est dérivable sur cet ensemble. On a $\psi' : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln t$. On en déduit que ψ est une primitive de la fonction logarithme. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t \, \mathrm{d}t = \Big[t \ln t - t\Big]_1^{1+x^2} = (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) - x^2.$$

Dérivons,

$$\begin{aligned} \Big((x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) - x^2\Big)' &= 2x \ln(x^2 + 1) + (x^2 + 1)\frac{2x}{x^2 + 1} - 2x \\ &= 2x \ln(x^2 + 1). \end{aligned}$$

On retrouve l'expression de la première question.

Solution de l'exercice 4

1 - L'application tangente est 2π périodique et elle est continue sur chacun des intervalles $]-\pi/2, \pi/2[$ et $]\pi/2, 3\pi/2[$. Nous allons donc calculer les primitives de la fonction tangente en deux temps.

L'application $\phi : x \in]-\pi/2, \pi/2[\longmapsto \cos x$ est à valeurs dans $J =]0, 1]$ et elle est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On a pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\, \phi'(x) \, \mathrm{d}x$$

où $f : t \in]0, 1] \longmapsto -1/t$. En utilisant la formule du changement de variable, on obtient

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = \Big[\int -\frac{1}{t} \, \mathrm{d}t\Big]_{t=\cos x} = \Big[-\ln t\Big]_{t=\cos x} = -\ln(\cos x).$$

L'application $\phi : x \in]\pi/2, 3\pi/2[\longmapsto \cos x$ est à valeurs dans $J = [-1, 0[$ et elle est dérivable sur $]\pi/2, 3\pi/2[$. On a pour $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$,

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\, \phi'(x) \, \mathrm{d}x$$

Copyrighted material

où $f : t \in [-1, 0[\longmapsto -1/t$. En utilisant la formule du changement de variable, on obtient

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = \Big[\int -\frac{1}{t} \, \mathrm{d}t\Big]_{t=\cos x} = \Big[-\ln|t|\Big]_{t=\cos x} = -\ln|\cos x|.$$

$\trianglerighteq$ On en déduit que les primitives de la fonction tangente sont, sur chaque intervalle où la fonction tangente est continue, c'est-à-dire sur chaque intervalle de la forme $]k\pi/2, k\pi/2 + \pi[$ les fonctions

$$x \longmapsto \ln \frac{1}{|\cos x|} + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

2 - La fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$. L'application $\phi : x \in [-1, 1] \longmapsto \arcsin x$ est à valeurs dans $J = [-\pi/2, \pi/2]$ et elle est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée $x \longmapsto 1/\sqrt{1-x^2}$. On a pour $x \in]-1, 1[$,

$$\int \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \int (1-x^2) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\, \phi'(x) \, \mathrm{d}x$$

où $f : t \in]-\pi/2, \pi/2[\longmapsto 1 - \sin^2 t$. Or

$$1 - \sin^2 t = \cos^2 t = 1/2(1 + \cos 2t).$$

En utilisant la formule du changement de variable, on obtient donc

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x &= \Big[\int \frac{1+\cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t\Big]_{t=\arcsin x} = \Big[\frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big]_{t=\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x). \end{aligned}$$

Puisque pour tout $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ on a

$$\sin 2u = 2\sin u \cos u = 2\sin u\sqrt{1-\sin^2 u},$$

on en déduit que

$$\int \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

Les primitives de $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$ sont donc les applications

$$x \in]-1, 1[\longmapsto \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Copyrighted material

Hidden page

est continue sur $]0,+\infty[$. D'après la seconde formule du changement de variable, on a sur $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t &= \left[\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\phi^{-1}(t)} = \left[\int \frac{1}{\operatorname{sh}(\ln x)}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{e}^t}\\ &= -2\left[\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right]_{x=\mathrm{e}^t}.\end{aligned}$$

On prendra garde que sur l'intervalle $]1,+\infty[$, une primitive de la fonction $x \longmapsto 1/(1-x^2)$ n'est pas la fonction argument tangente hyperbolique (puisque celle-ci n'est définie que sur $]-1,1[$). On obtient aisément la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}\right).$$

On en déduit qu'une primitive de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$ est l'application

$$G : x \in]1,+\infty[\longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Par conséquent, sur $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t &= -\ln\left(\frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t-1}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t+1}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{t/2}-\mathrm{e}^{-t/2}}{\mathrm{e}^{t/2}+\mathrm{e}^{-t/2}}\right)\\ &= \ln\left(\operatorname{th}\frac{t}{2}\right) = \ln\left|\operatorname{th}\frac{t}{2}\right|.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6

1 - On a

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

et en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \frac{2}{3}\left[-\frac{2}{5}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

2 - Soit n un entier non nul. On obtient, en intégrant par parties,

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}x^n\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

Copyrighted material

Or

$$\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}x^n\right]_0^1 = 0$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)(1-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n(1-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x \\ &= I_{n-1} - I_n.\end{aligned}$$

Ainsi, $I_n = \dfrac{2n}{3}\Big(I_{n-1} - I_n\Big)$ et par conséquent : $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

Solution de l'exercice 7

1 - La fonction sinus hyperbolique est continue sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sh} t \underset{0}{\sim} t$. On en déduit que la fonction

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et par conséquent, pour tout réel x non nul, sur l'intervalle fermé borné d'extrémités 0 et x (cet intervalle est $[0,x]$ si $x > 0$ et $[x,0]$ si $x < 0$). Ainsi f est Riemann intégrable sur l'intervalle fermé borné d'extrémités 0 et x pour tout réel x non nul et par conséquent que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ (voir la proposition 18.7).

2 - Supposons $x > 0$; puisque f est continue sur $[0,x]$, d'après la première formule de la moyenne, il existe un réel c_x dans l'intervalle $]0,x[$ tel que $F(x) = f(c_x)$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+} c_x = 0$ et f est continue en 0 avec $f(0) = 1$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = 1.$$

Supposons maintenant $x < 0$; puisque f est continue sur $[x,0[$, d'après la première formule de la moyenne, il existe un réel c_x dans l'intervalle $]x,0[$ tel que $F(x) = f(c_x)$. Or $\lim\limits_{x\to 0^-} c_x = 0$ et f est continue en 0 avec $f(0) = 1$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = 1.$$

Finalement,

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 1$$

et F est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $F(0) = 1$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

On peut également utiliser la première formule de la moyenne pour conclure à la continuité de J_n en 0. Il existe un réel $c \in]0,1[$ tel que

$$J_n(0) - J_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \ (1-\cos(tx)) \ \mathrm{d}t = (1-c^2)^n \ (1-\cos(cx))$$

et $\lim_{x\to 0}(1-c^2)^n \ (1-\cos(cx)) = 0$.

4 - J_n est dérivable en 0 si $\lim_{x\to 0} \dfrac{J_n(x)-J_n(0)}{x}$ existe. On a montré que pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ on avait

$$0 \leqslant J_n(0) - J_n(x) \leqslant \frac{x^2}{2} \int_0^1 t^2(1-t^2)^n \ \mathrm{d}t.$$

On en déduit que pour $x \in]0, \pi/2]$,

$$0 \leqslant \frac{J_n(0)-J_n(x)}{x} \leqslant \frac{x}{2} \int_0^1 t^2(1-t^2)^n \ \mathrm{d}t$$

et par conséquent que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{J_n(x)-J_n(0)}{x} = 0$. Pour $x \in [-\pi/2, 0[$ on a

$$\frac{x}{2} \int_0^1 t^2(1-t^2)^n \ \mathrm{d}t \leqslant \frac{J_n(0)-J_n(x)}{x} \leqslant 0$$

et par conséquent $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{J_n(x)-J_n(0)}{x} = 0$. Finalement $\lim_{x\to 0} \dfrac{J_n(x)-J_n(0)}{x} = 0$ et $J_n'(0) = 0$.

Solution de l'exercice 11

1 - $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1 \ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t \ \mathrm{d}t = \Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = 1.$

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \ \mathrm{d}t = 1/2 \int_0^{\pi/2} 1+\cos(2t) \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$

Considérons le changement de variable $\phi : x \in [0,\pi/2] \longmapsto \pi/2 - x$. L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$. On a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n t \ \mathrm{d}t = \int_{\phi(\pi/2)}^{\phi(0)} \cos^n t \ \mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 -\cos^n(\pi/2-x) \ \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\pi/2}^0 \sin^n x \ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Copyrighted material

2 - Intégrons par parties, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^n t \ \sin t \ \mathrm{d}t \\ &= \left[-\cos t \sin^n t\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} n \sin^{n-1} t \ \cos^2 t \ \mathrm{d}t \\ &= n \int_0^{\pi/2} n \sin^{n-1} t \ (1 - \sin^2 t) \ \mathrm{d}t \\ &= n \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \ \mathrm{d}t \right) \\ &= n(I_{n-1} - I_{n+1}). \end{aligned}$$

On en déduit la relation $(\mathcal{R})$ $\quad (n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$.

Vérifions par un raisonnement par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2p} = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} \frac{\pi}{2}$$

La relation est vraie pour $p = 1$ puisque

$$I_2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{P_1(1)}{P_2(1)} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \ \frac{\pi}{2}.$$

Supposons la relation vraie pour un entier p donné. On a alors d'après la relation de récurrence $(\mathcal{R})$

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)} &= I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} \ I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{2p+1}{2p+2} \ \frac{P_1(p)}{P_2(p)} \\ &= \frac{\pi}{2} \ \frac{2p+1}{2p+2} \ \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{p} 2k-1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p} 2k} = \frac{\pi}{2} \ \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{p+1} (2k-1)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p+1} 2k} = \frac{\pi}{2} \ \frac{P_1(p+1)}{P_2(p+1)}. \end{aligned}$$

La relation

$$I_{2p+1} = \frac{P_2(p)}{P_1(p+1)}$$

se démontre de la même manière par une récurrence.

3 - Pour tout $t \in [0, \pi/2]$ on a $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$. On en déduit que

$$0 \leqslant \cos^n t = \cos t \cos^{n-1} t \leqslant \cos^{n-1} t.$$

Cela implique que

$$0 \leqslant I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \ \mathrm{d}t = I_n.$$

Copyrighted material

La suite $(I_n)_n$ est donc décroissante minorée par 0. On en déduit qu'elle converge vers un réel ℓ.

4 - Puisque la suite $(I_n)_n$ converge, il en est de même de toutes ses suites extraites. En particulier la suite extraite des termes d'indices pairs $(I_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et la suites des termes d'indices impairs $(I_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers ℓ. On en déduit que la suite de terme général $u_p = \dfrac{I_{2p-1}}{I_{2p}}$ converge vers 1. Or

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{I_{2p-1}}{I_{2p}} = \frac{\dfrac{P_2(p-1)}{P_1(p)}}{\dfrac{P_1(p)}{P_2(p)}\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\frac{P_2(p-1)P_2(p)}{P_1(p)^2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2p}\left(\frac{P_2(p)}{P_1(p)}\right)^2 \\ &= \frac{1}{p\pi}\left(\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{p} 2k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k-1)}\right)^2. \end{aligned}$$

Comme la suite $(u_p)_p$ converge vers 1, on en déduit la formule de Wallis,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}\right)^2 = \pi.$$

5 - Considérons la suite de terme général $w_n = (n+1)I_nI_{n+1}$. On a d'après la relation de récurrence $(\mathcal{R})$

$$w_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}I_n\right) = (n+1)I_nI_{n+1} = w_n.$$

La suite $(w_n)_n$ est donc une suite constante. On a $w_0 = I_0I_1 = \pi/2$, donc pour tout entier n, $w_n = \pi/2$. Par ailleurs

$$w_n = (n+1)I_nI_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} nI_n^2.$$

On en déduit que

$$\frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} nI_n^2$$

autrement dit que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 12

1 - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{\ln(1+tx)}{1+t^2}$ est continue sur l'intervalle $[0,x]$ en tant que quotient de deux fonctions continues sur $[0,x]$, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas. On en déduit par la première formule de la moyenne qu'il existe un réel $c \in]0,x[$ tel que

$$f(x) = \int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t = x\ g(c) = x\ \frac{\ln(1+cx)}{1+c^2}.$$

Lorsque x tend vers 0, c tend vers 0 et, puisque $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} xg(c) = 0.$$

L'application f est donc bien continue à droite en 0.

2 - a) On a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{x+h} \frac{\ln(1+t(x+h))}{1+t^2}\ \mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^x \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^x \frac{\ln(1+t(x+h))}{1+t^2}\ \mathrm{d}t + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{\ln(1+t(x+h))}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^x \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\Big(\ln(1+(x+h)t) - \ln(1+xt)\Big)\ \mathrm{d}t \\
&\quad +\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{\ln(1+(x+h)t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= I_2(h) + I_1(h).
\end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $h > -x$ la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+(x+h)t)}{1+t^2}$ est continue sur $[x,x+h]$ en tant que quotient de deux fonctions continues sur $[x,x+h]$, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas. On en déduit par la première formule de la moyenne qu'il existe un réel $c \in]x,x+h[$ tel que

$$I_1(h) = \frac{\ln(1+(x+h)c)}{1+c^2}.$$

Lorsque h tend vers 0, le réel c tend vers x et par conséquent

$$\lim_{h\to 0} I_1(h) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}.$$

c) La fonction rationnelle $t \longmapsto \dfrac{t}{(1+t^2)(1+xt)}$ admet une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} = \frac{\alpha t+\beta}{1+t^2} + \frac{\gamma}{1+xt},$$

Copyrighted material

où les coefficients α, β, γ sont déterminés en utilisant les techniques présentées au chapitre 7. On obtient

$$\gamma = -\frac{x}{x^2+1}, \quad \beta = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{x^2+1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \alpha \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \beta \int_0^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t + \gamma \int_0^x \frac{1}{1+xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\alpha}{2}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^x + \beta\Big[\arctan(t)\Big]_0^x + \frac{\gamma}{x}\Big[\ln(1+xt)\Big]_0^x \\
&= \frac{\alpha}{2}\ln(1+x^2) + \beta\arctan(x) + \frac{\gamma}{x}\ln(1+x^2) \\
&= \frac{x}{x^2+1}\arctan(x) - \frac{1}{2(1+x^2)}\ln(1+x^2).
\end{aligned}$$

d) Considérons, pour $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, l'application $\psi_t : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \ln(1+xt)$. L'application ψ_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\psi_t'(x) = \frac{t}{1+xt}, \quad \psi_t''(x) = -\frac{t^2}{(1+xt)^2}.$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, il existe un réel $c \in]x, x+h[$ tel que

$$\psi_t(x+h) - \psi_t(x) = h\,\psi_t'(x) + \frac{h^2}{2}\,\psi_t''(c),$$

autrement dit, il existe un réel $c \in]x, x+h[$ tel que

$$\ln(1+(x+h)t) - \ln(1+xt) = \frac{th}{1+xt} - \frac{t^2h^2}{2(1+ct)^2}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned}
I_2(h) &= \frac{1}{h}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\Big(\ln(1+(x+h)t) - \ln(1+xt)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\Big(\psi_t(x+h) - \psi_t(x)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\Big(\frac{th}{1+xt} - \frac{t^2h^2}{2(1+ct)^2}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\,\mathrm{d}t - \frac{h}{2}\int_0^x \frac{t}{(1+ct)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \phi(x) - \frac{h}{2}R(h)
\end{aligned}$$

où $R(h) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+ct)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Puisque $x > 0$, $h > -x$ et que $c \in]x, x+h[$, $t \in]0, x[$, on a $1+ct \geqslant 1$ et $1+t^2 \geqslant 1$. On en déduit que

$$0 \leqslant \frac{t^2}{(1+ct)^2(1+t^2)} \leqslant t^2$$

Copyrighted material

et donc que

$$0 \leqslant R(h) \leqslant \int_0^x t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}.$$

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = I_1(h) + I_2(h)$. Des questions précédentes, on déduit que :

- $\lim\limits_{h\to 0} I_2(h) = \phi(x)$ car $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{2} R(h) = 0$ puisqu'il s'agit du produit d'une fonction tendant vers 0 par une fonction bornée ;
- $\lim\limits_{h\to 0} I_1(h) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$.

Ainsi, la quantité $(f(x+h)-f(x))/h$ a une limite lorsque h tend vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée en $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \phi(x).$$

3 - Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \phi(x).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} + \phi(t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \left(\frac{t}{t^2+1} \arctan(t) + \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \big(u'(t)\, v(t) + u(t)\, v'(t) \big) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

où $u : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{1}{2} \arctan(t)$ et $v : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \ln(1+t^2)$. On a donc

$$f(x) = \int_0^x (u(t)\, v(t))' \, \mathrm{d}t = u(x)v(x) - u(0)v(0) = \frac{1}{2} \arctan(x) \ln(1+x^2).$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Remarque Soit f une fonction dont le domaine de définition est l'intervalle $]a,b[$ privé d'un nombre fini de valeurs $\{c_i\}_{i=1,\dots,n}$ avec

$$c_0 = a < c_1 < \cdots < c_n < b = c_{n+1}.$$

Si, pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$, f est localement intégrable sur chacun des intervalles $]c_i, c_{i+1}[$ et si les intégrales $\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent alors on dit que f admet une intégrale généralisée sur $]a,b[$ convergente et on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemples

1. L'application $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. On a pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$,

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

L'intégrale de f sur $[0,+\infty[$ est donc convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

2. L'application $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto 1/\sqrt{x}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0,1]$. On a pour tout réel $x \in]0,1]$,

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} F(x) = 2.$$

L'intégrale de f sur $]0,1]$ est donc convergente et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2$.

3. L'application $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sin x$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. On a pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$,

$$F(x) = \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t = \left[-\cos t\right]_0^x = 1 - \cos x$$

et cosinus n'a pas de limite en $+\infty$. L'intégrale de f sur $[0,+\infty[$ est donc divergente.

4. L'application $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. On a pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\arctan t\right]_0^x = \arctan x \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale de f sur $[0,+\infty[$ est donc convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

De même, f est continue, donc localement intégrable sur $]-\infty,0]$. On a pour tout réel $x \in \mathbb{R}_-$,

$$F(x) = \int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\arctan t\right]_x^0 = -\arctan x \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Copyrighted material

Hidden page

divergentes. Un calcul sans précaution pourrait conduire à écrire

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln|t|\Big]_{-1}^{1} = 0.$$

Proposition 19.1 *Soit f une fonction localement Riemann intégrable sur $[a,+\infty[$ (resp. $]-\infty,a]$). Si f admet une limite non nulle en $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ $\left(\text{resp. } \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ diverge.*

Démonstration Supposons que la fonction f localement Riemann intégrable sur $[a,+\infty[$ admette pour limite ℓ en $+\infty$. Montrons qu'alors l'intégrale indéfinie $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ si $\ell>0$ et vers $-\infty$ si $\ell<0$.

Puisque f admet pour limite ℓ en $+\infty$ on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \tau_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]a,+\infty[\quad \Big(x \geqslant \tau_\varepsilon \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Soit ε un réel strictement positif fixé et $\hat{\tau}_\varepsilon = \max\{a,\tau_\varepsilon\}$. Pour tout $x \in [\hat{\tau}_\varepsilon,+\infty[$ on a $-\varepsilon+\ell \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon+\ell$ et par conséquent

$$(\ell-\varepsilon)(x-\hat{\tau}_\varepsilon) = \int_{\hat{\tau}_\varepsilon}^{x} (\ell-\varepsilon)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\hat{\tau}_\varepsilon}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\hat{\tau}_\varepsilon}^{x} (\varepsilon+\ell)\,\mathrm{d}t = (\varepsilon+\ell)(x-\hat{\tau}_\varepsilon)$$

Si on désigne par C l'intégrale (prise au sens de Riemann) de f entre a et $\hat{\tau}_\varepsilon$ on a pour tout $x \in [\hat{\tau}_\varepsilon,+\infty[$

$$F(x) = \int_a^{\hat{\tau}_\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\hat{\tau}_\varepsilon}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = C + \int_{\hat{\tau}_\varepsilon}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et par conséquent,

$$(\ell-\varepsilon)(x-\hat{\tau}_\varepsilon)+C \leqslant F(x) \leqslant (\varepsilon+\ell)(x-\hat{\tau}_\varepsilon)+C.$$

Cet encadrement est valable pour tout réel ε strictement positif. Supposons que $\ell>0$ et prenons $\varepsilon=\ell/2$. Pour tout $x \in [\hat{\tau}_{\ell/2},+\infty[$ on a

$$\frac{\ell}{2}(x-\hat{\tau}_{\ell/2})+C \leqslant F(x)$$

et donc F admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell(x-\hat{\tau}_{\ell/2}) = +\infty$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est par conséquent divergente. Si on suppose que $\ell<0$ alors en prenant $\varepsilon=-\ell/2>0$ on obtient que pour tout $x \in [\hat{\tau}_{-\ell/2},+\infty[$ on a

$$F(x) \leqslant \frac{-\ell}{2}(x-\hat{\tau}_{-\ell/2})+C$$

Copyrighted material

et donc F admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} -\ell(x-\hat{\tau}_{2\ell}) = -\infty$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est par conséquent divergente. Le cas où la fonction g est localement Riemann intégrable sur $]-\infty, a]$ se démontre en remarquant que la fonction $f : t \longmapsto g(-t)$ est localement Riemann intégrable sur $[-a, +\infty[$ et que l'intégrale indéfinie $G(x) = \int_x^a g(t)\,\mathrm{d}t$ s'écrit,

$$G(x) = -\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{-x} g(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si g admet une limite ℓ non nulle en $-\infty$, la fonction f admet également le réel non nul ℓ pour limite en $+\infty$ et d'après la première partie de la démonstration

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{-a}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to+\infty}\int_{-a}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \ell > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \ell < 0 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \ell > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \ell < 0 \end{cases}$$

et par conséquent que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. □

Remarque En prenant la contraposée de l'assertion énoncée à la proposition 19.1, on établit que si une fonction f localement intégrable sur $[a, +\infty[$ (resp.$]-\infty, a[$) et de signe constant admet une intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (resp. $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$) convergente alors nécessairement f a pour limite 0 en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

19.2 Calcul des intégrales généralisées

On retrouve pour l'intégrale généralisée les propriétés de l'intégrale de Riemann données au paragraphe 18.2.3 du chapitre 18. Nous ne les redonnons pas. On peut également établir pour l'intégrale généralisée une formule de changement de variable et une formule d'intégration par parties. Nous présentons dans ce paragraphe ces deux formules.

19.2.1 Formule de changement de variable

Proposition 19.2 (formule du changement de variable) *Soit ϕ une bijection de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$ de classe $\mathcal{C}^1$ et f une application continue sur $]\alpha, \beta[$. L'intégrale de f sur $]\alpha, \beta[$ est convergente si et seulement si l'intégrale de $(f \circ \phi)\phi'$ est convergente sur $]a, b[$. On a alors,*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t)) \times \phi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Copyrighted material

Démonstration Remarquons que puisque ϕ est une bijection de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$, il s'agit nécessairement d'une application strictement monotone. D'après la proposition 14.1, page 623, sa bijection réciproque est une application continue et strictement monotone sur $]\alpha,\beta[$ (de même sens de variation que ϕ). Supposons que ϕ soit strictement croissante (le cas où ϕ est strictement décroissante se démontre de manière analogue) ; on a alors

$$\lim_{\tau_1 \to a^+} \phi(\tau_1) = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{\tau_2 \to b^-} \phi(\tau_2) = \beta.$$

$\trianglerighteq$ Supposons que l'intégrale de f soit convergente sur $]\alpha,\beta[$ et considérons un réel $c \in]a,b[$. On a alors

$$\int_a^b f(\phi(t)) \times \phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(\phi(t)) \times \phi'(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(\phi(t)) \times \phi'(t)\ \mathrm{d}t$$

En utilisant la formule de changement de variable pour l'intégrale de Riemann (voir le théorème 18.2 p. 863) on obtient

$$\int_{\tau_1}^c f(\phi(t)) \times \phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\phi(\tau_1)}^{\phi(c)} f(x)\ \mathrm{d}x$$

et

$$\int_c^{\tau_2} f(\phi(t)) \times \phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\phi(c)}^{\phi(\tau_2)} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Puisque $\lim_{\tau_1 \to a^+} \phi(\tau_1) = \alpha$, que $\phi(c) \in]\alpha,\beta[$ et que l'intégrale de f est convergente sur $]\alpha,\beta[$, on en déduit que l'intégrale généralisée $\int_a^c f(\phi(t)) \times \phi'(t)\ \mathrm{d}t$ converge et qu'elle est égale à $\int_\alpha^{\phi(c)} f(x)\ \mathrm{d}x$. De même, puisque $\lim_{\tau_2 \to b^-} \phi(\tau_2) = \beta$, l'intégrale généralisée $\int_c^b f(\phi(t)) \times \phi'(t)\ \mathrm{d}t$ converge et est égale à $\int_{\phi(c)}^\beta f(x)\ \mathrm{d}x$. On a donc montré que si l'intégrale de f est convergente sur $]\alpha,\beta[$ alors l'intégrale de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur $]a,b[$ est convergente et que

$$\int_a^b f(\phi(t)) \times \phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_\alpha^{\phi(c)} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\phi(c)}^\beta f(x)\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\ \mathrm{d}x.$$

$\trianglerighteq$ Réciproquement, supposons que l'intégrale de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur $]a,b[$ soit convergente et considérons un réel $\gamma \in]\alpha,\beta[$. On a alors

$$\int_\alpha^\beta f(x)\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\gamma f(x)\ \mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Soit $\chi_1 \in]\alpha,\gamma[$; puisque ϕ est une bijection (croissante) de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$, il existe un unique réel $c \in]a,b[$ tel que $\gamma = \phi(c)$ et il existe un unique réel

Copyrighted material

$\tau_1 \in]a, c[$ tel que $\chi_1 = \phi(\tau_1)$. En utilisant la formule de changement de variable pour l'intégrale de Riemann, voir le théorème 18.2 page 863, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\chi_1}^{\gamma} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\phi(\tau_1)}^{\phi(c)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\tau_1}^{c} f(\phi(t)) \times \phi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\phi^{-1}(\chi_1)}^{c} f(\phi(t)) \times \phi'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{\chi_1 \to \alpha^+} \phi^{-1}(\chi_1) = a$ et que l'intégrale de $(f \circ \phi) \times \phi'$ sur $]a, c[$ converge, on en déduit que l'intégrale $\int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers $\int_a^c f(\phi(t)) \times \phi'(t)\,\mathrm{d}t$. On vérifie par des arguments analogues que l'intégrale $\int_\gamma^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers $\int_c^b f(\phi(t)) \times \phi'(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, si l'intégrale de $(f \circ \phi)\phi'$ sur $]a, b[$ est convergente alors l'intégrale de f sur $]\alpha, \beta[$ est convergente et

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^c f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

Exemple Considérons l'intégrale généralisée $\int_0^1 \sin(1/x)\,\mathrm{d}x$ et le changement de variable $x = 1/t$. L'application $\phi : t \in [1, +\infty[\longmapsto 1/t \in]0, 1]$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$. L'intégrale $\int_0^1 \sin(1/x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Nous établirons à la section 19.4 que cette dernière intégrale converge.

En pratique, on utilisera les changements de variable dans une intégrale généralisée avec prudence. On effectuera plutôt le changement de variable pour l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t$ et on étudiera ensuite le comportement de l'intégrale lorsque x_1 tend vers α et x_2 tend vers β.

Exercice 2 *Calculer l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

D'après la proposition 19.3, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et on a alors

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Nous établirons au paragraphe 19.4 que cette dernière intégrale converge.

19.2.3 Exemples de référence

Les exemples qui suivent sont très importants car ils permettront, par comparaison, d'établir des règles de convergence pour les intégrales généralisées. Dans cette section α et β désignent deux réels.

Intégrales de Riemann[2]

① $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$	converge	si $\alpha < 1$
	diverge	si $\alpha \geqslant 1$
② $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$	converge	si $\alpha > 1$
	diverge	si $\alpha \leqslant 1$

En effet, pour tout réel α la fonction $f_\alpha : x \longmapsto 1/x^\alpha$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. Si $\alpha \neq 1$ une primitive de f_α est $F_\alpha : x \longmapsto \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. Or F_α admet une limite en 0 si et seulement si $\alpha < 1$ et F admet une limite en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. Par ailleurs, une primitive de $x \longmapsto 1/x$ est $x \longmapsto \ln x$ et la fonction logarithme n'a pas de limite ni en 0, ni en $+\infty$.

③ $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ converge		
④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$	converge	si $\alpha < 0$
	diverge	si $\alpha \geqslant 0$

La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ a été établie à l'exercice 1. L'application $x \in [0,+\infty[\longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est continue, donc elle est localement intégrable sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale indéfinie

$$G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} x & \text{si } \alpha = 0 \\ \left[\dfrac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\right]_0^x = \dfrac{1}{\alpha}\,(\mathrm{e}^{\alpha x} - 1) & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

[2] On ne confondra pas les intégrales de Riemann définies ici avec la notion d'intégrale au sens de Riemann introduite au chapitre précédent.

Copyrighted material

a une limite en $+\infty$ si et seulement si $\alpha < 0$.

⑤ $\forall a > 1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$	converge	si $\alpha > 1$
	diverge	si $\alpha \leqslant 1$
⑥ $\forall a \in]0,1[$, $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x\,\lvert\ln x\rvert^\alpha}\,\mathrm{d}x$	converge	si $\alpha > 1$
	diverge	si $\alpha \leqslant 1$

En effet, l'application $\phi : x \in]a, +\infty[\longmapsto \ln x$ est une bijection de $]a, +\infty[$ dans $]\ln a, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la formule du changement de variable (voir la proposition 18.1 p. 835) pour $a \in]1, +\infty[$, l'intégrale sur $]a, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ (\ln x)^\alpha}$ converge si et seulement si l'intégrale sur $]\ln a, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto 1/x^\alpha$ converge. Or cette dernière intégrale est une intégrale de Riemann. On en déduit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.

Le changement de variable défini par l'application $\phi : x \in]0, a[\longmapsto |\ln x|$ permet de montrer, par un raisonnement analogue, que pour $a \in]0, 1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x\,\lvert\ln x\rvert^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.
D'une manière plus générale on peut montrer le résultat suivant.

Intégrales de Bertrand

⑦ $\forall a > 1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\beta(\ln x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$	converge	si	$\beta > 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$
		ou si	$\beta = 1,\ \alpha > 1$

et diverge dans les autres cas.

⑧ $\forall a \in]0, 1[$, $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x^\beta\,\lvert\ln x\rvert^\alpha}\,\mathrm{d}x$	converge	si	$\beta < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$
		ou si	$\beta = 1,\ \alpha > 1$

et diverge dans les autres cas.

Dans le cas où $\beta = 1$ on retrouve les exemples 5 et 6. L'étude de la nature de ces intégrales généralisées dans le cas où $\beta \neq 1$ sera abordé page 935.

19.3 Critères de convergence

19.3.1 Remarques préliminaires

Soient f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $]a, b[$, $c \in]a, b[$ et $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On a vu que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to b^-} F(x)$ existent. L'étude de la convergence d'une intégrale généralisée se ramène donc à l'étude de l'existence de limites lorsque l'on connaît une primitive de f. Toutefois il est intéressant de disposer

Copyrighted material

de critères permettant de conclure à la convergence ou à la divergence d'une intégrale généralisée lorsqu'une primitive de f n'est pas facilement calculable (par exemple pour $\int_0^{+\infty} (\cos t)/t^2 \, \mathrm{d}t$). Nous allons présenter dans ce paragraphe un certain nombre de ces critères.

Pour simplifier l'exposé des critères, on considère dans la suite une intégrale généralisée de la forme $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f est localement intégrable sur $[a, b[$. Si f est localement intégrable sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on se ramène à la situation précédente par le changement de variable $x = -t$. Si f est localement intégrable sur $]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, on se ramène à la situation précédente en étudiant la convergence des deux intégrales $\int_a^c f(t) \, \mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t) \, \mathrm{d}t$ où $c \in]a, b[$.

Proposition 19.4 *Soient f et g deux applications localement intégrables sur $[a, b[$ et soient α, β deux réels. Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t$ convergent alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) \, \mathrm{d}t$ converge.*

Démonstration Pour $x \in [a, b[$, on a par linéarité de l'intégrale de Riemann

$$H(x) = \int_a^x (\alpha f + \beta g)(t) \, \mathrm{d}t = \alpha \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t + \beta \int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Comme les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t$ convergent, on en déduit que H admet une limite finie à gauche en b et par conséquent que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) \, \mathrm{d}t$ converge. □

ATTENTION La réciproque est fausse : la fonction $h = \alpha f + \beta g$ peut avoir une intégrale généralisée convergente sur $[a, b[$ sans pour autant que les fonctions f et g aient des intégrales généralisées convergentes sur $[a, b[$. Par exemple $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2}{1 - t^2} \, \mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée convergente puisque

$$\int_2^x \frac{2}{1 - t^2} \, \mathrm{d}t = \left[\ln \frac{t - 1}{t + 1} \right]_2^x \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x - 1}{x + 1} = 0.$$

On a $\dfrac{2}{1 - t^2} = \dfrac{1}{1 - t} - \dfrac{1}{1 + t}$, mais on n'écrira pas

$$\int_2^{+\infty} \frac{2}{1 - t^2} \, \mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{1}{1 - t} \, \mathrm{d}t - \int_2^{+\infty} \frac{1}{1 + t} \, \mathrm{d}t$$

car les deux intégrales généralisées du membre de droite divergent.

Copyrighted material

Hidden page

Le résultat suivant est appelé « critère de Cauchy ». Peu pratique pour montrer qu'une intégrale généralisée est convergente, il se révèle néanmoins très utile pour établir d'autres critères plus simples, eux, à manipuler.

Théorème 19.1 (critère de Cauchy) *Soit f une application localement intégrable sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si,*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad \forall (u,v) \in [a,b[^2 \quad \Big(X_\varepsilon < u < v < b \Longrightarrow \left|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\Big).$$

Démonstration Remarquons que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si l'application F définie sur $[a,b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite en b, c'est-à-dire (voir la définition 13.2 p. 569) s'il existe un réel I tel que

$$\forall \widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in [a,b[\quad (|x-b| < \eta \Longrightarrow |F(x) - I| < \widetilde{\varepsilon}). \tag{2}$$

⊵ Supposons dans un premier temps que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et établissons le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad \forall (u,v) \in [a,b[^2 \quad \Big(X_\varepsilon < u < v < b \Longrightarrow \left|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\Big). \tag{3}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, d'après (2) l'assertion suivante est vraie :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in [a,b[\quad \Big(|x-b| < \eta \Longrightarrow |F(x) - I| < \frac{\varepsilon}{2}\Big). \tag{4}$$

Soient $(u,v) \in [a,b[^2, u < v$, vérifiant $|u-b| < \eta$ et $|v-b| < \eta$. On a d'après (4),

$$\left|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t\right| = |F(u) - F(v)| \leqslant |F(u) - I| + |F(v) - I| < \varepsilon.$$

Soit $X_\varepsilon = b - \eta$. Si $(u,v) \in [a,b[^2$ vérifie $X_\varepsilon < u < v < b$ alors on a $u < v$, $|u-b| < \eta$ et $|v-b| < \eta$. On en conclut que l'assertion (3) est vraie.

⊵ Supposons maintenant que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists X_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad \forall (u,v) \in [a,b[^2 \quad \Big(X_\varepsilon < u < v < b \Longrightarrow \left|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\Big).$$

Soit $(x_n)_n$ une suite quelconque de réels de l'intervalle $[a,b[$ convergeant vers b. Pour montrer que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il suffit d'après la proposition 19.5 de montrer que la suite de terme général $F(x_n)$ converge.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Démonstration Rappelons que pour $a \in]0,+\infty[$ l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. D'après le corollaire 19.1, si $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C}{t^\alpha}$ alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes. □

Corollaire 19.3 (critère de Riemann) *Soit f une application localement intégrable sur $]0,a]$ à valeurs positives.*

✗ *S'il existe $\alpha < 1$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{C}{t^\alpha}$ alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

✗ *S'il existe $\alpha \geqslant 1$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{C}{t^\alpha}$ alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.*

Démonstration Rappelons que pour $a \in]0,+\infty[$ l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. D'après le corollaire 19.1, si $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{C}{t^\alpha}$ alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes. □

Remarques

1. Il résulte de la proposition 19.7 que si f est une application localement intégrable sur $[a,+\infty[$, à valeurs positives, telle qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2. De même, si f est une application localement intégrable sur $]0,a]$, à valeurs positives, telle qu'il existe $\alpha < 1$ vérifiant $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$ alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 4 *Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :*

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\,\ln(\tan t)\,\mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

19.5 Semi-convergence

Définition 19.5 *Soit f une application localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est* **semi-convergente** *s'il s'agit d'une intégrale généralisée convergente mais pas d'une intégrale généralisée absolument convergente.*

Remarque Si f est une application localement intégrable sur $[a, b[$ de signe constant et si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente alors l'intégrale généralisée est absolument convergente. La notion d'intégrale semi-convergente n'a d'intérêt que pour des fonctions qui ne sont pas de signe constant.

Exemple Nous avons vu que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ ne converge pas absolument. Montrons qu'elle converge, autrement dit qu'il s'agit d'une intégrale semi-convergente. La fonction $t \longmapsto \sin(t)/t$ est prolongeable par continuité en 0, donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. En utilisant la formule d'intégration par partie pour les intégrales généralisées on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = -\underbrace{\left(\lim_{t\to+\infty} \frac{\cos t}{t}\right)}_{=0} + \cos(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $\left|\cos(t)/t^2\right| \leqslant 1/t^2$. Puisque l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente et que par conséquent elle converge. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ converge et il s'agit donc d'une intégrale semi-convergente puisqu'elle ne converge pas absolument.

Il n'existe pas de critère simple pour établir qu'une intégrale est semi-convergente. Le théorème d'Abel, que nous admettrons, permet de traiter certains cas de semi-convergence.

Théorème 19.4 (théorème d'Abel) *Soient f et g deux applications localement intégrables sur $[a, +\infty[$. Si les deux conditions suivantes sont satisfaites,*

1. l'application f est positive, décroissante sur $[a, +\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

2. il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a, +\infty[$, on ait

$$\left|\int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant M;$$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ g(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Copyrighted material

Hidden page

2 - Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant 1+x$. *En déduire que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in [0, \sqrt{n}] \quad \mathrm{e}^{-t^2} \geqslant \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n}.$$

3 - En considérant le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin x$ *montrer que*

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \, \mathrm{d}t = \sqrt{n}\, I_{2n+1}.$$

4 - En considérant le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan x$ *montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}t = \sqrt{n}\, I_{2n-2}.$$

5 - En déduire, en utilisant le résultat rappelé en début d'exercice, que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 8 *On considère la fonction* Γ *définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

1 - Montrer que le domaine de définition de la fonction Γ *est* $\mathbb{R}_+^*$.

2 - Montrer que pour tout réel x *strictement positif,* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. *En déduire que pour tout entier* n *non nul,* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3 - Montrer que pour tout réel t *strictement positif fixé, l'application* $g_t : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto t^{x-1}$ *est convexe. En déduire que l'application* Γ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+^*$.

4 - On admet que l'application Γ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Montrer que* $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

---

est la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Ce résultat permet de montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_N(t) \, \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f_N(t) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2} \, \mathrm{d}s = 1.$$

Autrement dit, que f_N est bien une loi de probabilité (il est en effet évident que f_N est positive). Mentionnons enfin que cette vérification peut se faire de manière beaucoup plus rapide en utilisant des résultats concernant l'intégrale double.

Copyrighted material

Exercice 9 *On considère les fonctions F et G définies par*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

1 - Déterminer les ensembles de définition de F et G. Étudier la parité de ces fonctions.

2 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) = |x|F(1)$.

3 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant F(x) - G(x) \leqslant \pi/2$. En déduire un équivalent de G au voisinage de $+\infty$.

19.7 Solution des exercices

Solution de l'exercice 1

1 - L'application logarithme est continue sur $]0,1]$, donc elle est localement intégrable sur $]0,1]$ et l'intégrale indéfinie

$$F(x) = \int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_x^1 = -x\ln x + x - 1$$

admet pour limite -1 à droite en 0. Donc l'intégrale $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ converge et vaut -1.

2 - La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ est continue sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$. Elle est donc localement intégrable sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$. Pour tout $x \in [0,1[$ on a

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\operatorname{argth} t\Big]_0^x = \operatorname{argth} x$$

et $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$. On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge et qu'il en va donc de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3 - La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}$ est continue sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$. Elle est donc localement intégrable sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$. Pour tout $x \in [0,1[$ on a

$$F_1(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \Big[\arcsin t\Big]_0^x = \arcsin x$$

et $\lim\limits_{x\to 1^-} F_1(x) = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\,\mathrm{d}t$ converge. Soient $a \in]1,+\infty[$ et $x \in]1,a[$. On a

$$F_2(x) = \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^a \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \Big[\operatorname{argch} t\Big]_x^a = \operatorname{argch} a - \operatorname{argch} x$$

Copyrighted material

et $\lim_{x\to 1^+} F_2(x) = \operatorname{argch} a$. On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\,\mathrm{d}t$ converge. Pour $x \in]a, +\infty[$ on a

$$F_3(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \Big[\operatorname{argch} t\Big]_a^x = \operatorname{argch} x - \operatorname{argch} a$$

et $\lim_{x\to+\infty} F_3(x) = +\infty$. On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\,\mathrm{d}t$ diverge et qu'il en est donc de même de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\,\mathrm{d}t$.

Solution de l'exercice 2

Considérons la fonction de changement de variable $\phi : t \in [0, +\infty[\longmapsto \arctan t$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ (elle est même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$) de dérivée l'application

$$t \in [0, +\infty[\longmapsto \frac{1}{1+t^2}.$$

Il s'agit d'une bijection dont la bijection réciproque est $x \in [0, \pi/2[\longmapsto \tan x$. On a donc par la formule de changement de variable,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \phi(t)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Solution de l'exercice 3

1 - Si $\lim_{t\to b^-} \dfrac{f(t)}{g(t)} = +\infty$, alors

$$\forall \kappa \in \mathbb{R} \quad \exists \eta_\kappa \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t \in [a, b[\quad \Big(|t-b| \leqslant \eta_\kappa \implies \frac{f(t)}{g(t)} \geqslant \kappa\Big).$$

Prenons $\kappa = 1$. Il existe alors un réel η_1 strictement positif tel que pour tout $t \in [b-\eta, b[$ on a $f(t) \geqslant g(t)$. D'après le principe de comparaison[(5)], on déduit de cette majoration que si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

2 - Soient $a \in]1, +\infty[$ et $\beta < 1$. Il existe un réel ε strictement positif tel que $\beta = 1 - 2\varepsilon$. Soit f la fonction à valeurs positives définie sur $[a, +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{t^\beta\,(\ln t)^\alpha}.$$

[(5)] Voir le théorème 19.2.

Copyrighted material

Hidden page

On a l'équivalent suivant :

$$\cos t \ \ln(\tan t) \underset{0^+}{\sim} \ln t.$$

On peut conclure à la convergence de l'intégrale généralisée par le corollaire 19.1, p. 936, puisque $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln t \ \mathrm{d}t$ est une intégrale de Bertrand convergente.

2 - La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. Elle est strictement positive sur cet intervalle. On a

$$f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t}$$

donc, d'après le corollaire 19.3, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) \ \mathrm{d}t$ diverge. On peut remarquer que

$$f(t) = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

et par conséquent, d'après le corollaire 19.2, en déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t) \ \mathrm{d}t$ converge.

3 - Pour tout réel α, la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$, donc elle est localement intégrable sur cet intervalle. Cette fonction est positive sur $]0, 1]$ et on a

$$f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{t^2/2}{t^\alpha} = \frac{1}{2t^{2-\alpha}}.$$

On en déduit, d'après le corollaire 19.3, que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t) \ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha - 2 < 1$, autrement dit si $\alpha < 3$.

Solution de l'exercice 5

1 - La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^{3/2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$; elle est donc localement intégrable sur cet intervalle. La fonction f est positive sur $]0, \pi]$ et

$$f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

On en déduit, d'après le corollaire 19.1, que l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi} f(t) \ \mathrm{d}t$ converge puisque l'intégrale $\int_0^{\pi} 1/\sqrt{t} \ \mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente. Par ailleurs pour tout $t \in [\pi, +\infty[$ on a

$$|f(t)| \leqslant \frac{1}{t^{3/2}}.$$

Copyrighted material

D'après le théorème 19.4, l'intégrale généralisée $\int_\pi^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} 1/t^{3/2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente.

2 - La fonction $f : t \longmapsto \cos t \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^3$ est continue sur $]0,+\infty[$. Elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. La fonction f est donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$|f(t)| = |\cos t| \left|\frac{\sin t}{t}\right|^3 \leqslant \frac{1}{t^3}.$$

D'après le théorème 19.4, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car l'intégrale $\int_1^{+\infty} 1/t^3\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente.

3 - La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{ch}(\sqrt{t}) - \cos(\sqrt{t})}{t^3/2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Elle est positive puisque la fonction cosinus hyperbolique est minorée par 1 alors que la fonction cosinus est majorée par 1. En utilisant les développements limités d'ordre 2 en 0 de cosinus et cosinus hyperbolique, on obtient

$$\mathrm{ch}\,\sqrt{t} - \cos\sqrt{t} = \left(1 + \frac{(\sqrt{t})^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{(\sqrt{t})^2}{2}\right) + o_0(t) = t + o_0(t)$$

donc

$$f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

On en déduit, d'après le corollaire 19.3, que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\mathrm{ch}(\sqrt{t}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{2} \quad \text{et} \quad \cos(\sqrt{t}) = o_{+\infty}(\mathrm{ch}(\sqrt{t})).$$

On a donc

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{2}.$$

Or pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^{\sqrt{t}} \geqslant 1$. Puisque $\int_1^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t$ diverge, on en déduit par le théorème 19.2 qu'il en est de même de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{2}\,\mathrm{d}t$. Finalement, d'après le corollaire 19.1, on peut conclure que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Copyrighted material

Solution de l'exercice 6

Considérons l'application $f : t \in]0,+\infty[\longmapsto e^{-\alpha t}\ln(1+t)/t^{\beta}$. Cette application est continue, donc localement Riemann intégrable sur $]0,+\infty[$. Elle est clairement positive.

Intéressons-nous au comportement de f au voisinage de 0. Quelle que soit la valeur de α, on a $e^{-t\alpha} \underset{0^+}{\sim} 1$ et $\ln(1+t) \underset{0^+}{\sim} t$ donc $f(t) \underset{0^+}{\sim} 1/t^{\beta-1}$. Or l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\gamma}}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\gamma < 1$; une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge est donc que $\beta < 2$.

Intéressons-nous maintenant au comportement de f au voisinage de $+\infty$.

1. Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge d'après la proposition 19.1.
2. Si $\alpha = 0$, puisque $\ln(1+t) \underset{+\infty}{\sim} \ln(t)$ on a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \ln(t)/t^{\beta}$. Or l'intégrale généralisée de Bertrand $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^{\beta}}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$. Donc, une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge est que $\beta > 1$.
3. Si $\alpha > 0$ alors d'après la proposition 19.7, l'intégrale généralisée converge quelle que soit la valeur de β car on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)t^2 = 0$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\ln(1+t)}{t^{\beta}}\,\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 0$ et $\beta \in]-\infty, 2[$ ou si $\alpha = 0$ et $\beta \in]1, 2[$. Elle diverge dans les autres cas.

Solution de l'exercice 7

1 - La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc est localement intégrable sur $[0,+\infty[$. Elle est positive et $\mathrm{e}^{-t^2} = \mathcal{O}_{+\infty}\left(1/t^2\right)$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée convergente, on en déduit par la proposition 19.7 que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

2 - Appliquons la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction exponentielle (qui est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$) : pour tout réel x, il existe un réel c dans l'intervalle d'extrémités 0 et x tel que

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 + x\,\mathrm{e}^0 + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^c.$$

Copyrighted material

Puisque $\dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^c$ est toujours positif, on a

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x. \tag{6}$$

Soient t un réel et n un entier non nul. Appliquons la relation (6) en prenant $x = t^2/n$. On obtient la majoration

$$\mathrm{e}^{t^2/n} \geqslant 1 + \frac{t^2}{n}$$

et puisque les fonctions puissances entières sont croissantes sur $[0, +\infty[$,

$$\mathrm{e}^{t^2} \geqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n.$$

Finalement,

$$\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

Appliquons la relation (6) en prenant $x = -t^2/n$. On obtient la majoration

$$\mathrm{e}^{-t^2/n} \geqslant 1 - \frac{t^2}{n}.$$

Si $t \in [0, \sqrt{n}]$ alors $1 - t^2/n \geqslant 0$ et puisque les fonctions puissances entières sont croissantes sur $[0, +\infty[$,

$$\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n.$$

3 - Considérons l'application

$$\phi : x \in [0, \pi/2] \longmapsto \sqrt{n}\sin x.$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et

$$\phi' : x \in [0, \pi/2] \longmapsto \sqrt{n}\cos x.$$

En utilisant la formule de changement de variable dans une intégrale de Riemann, (voir le théorème 18.4 p. 844) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t &= \int_{\phi(0)}^{\phi(\pi/2)} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(1 - \sin^2(x)\right)^n}_{= f(\phi(x))} \underbrace{\sqrt{n}\cos x}_{= \phi'(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n+1} \,\mathrm{d}x \;=\; \sqrt{n}\, I_{2n+1}.
\end{aligned}$$

Copyrighted material

4 - Considérons l'application

$$\psi : x \in [0, \pi/2] \longmapsto \sqrt{n} \tan x.$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et

$$\psi' : x \in [0, \pi/2] \longmapsto \sqrt{n}(1 + \tan^2 x).$$

En utilisant la formule de changement de variable dans une intégrale généralisée (voir la proposition 19.2) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}t &= \int_{\psi(0)}^{\psi(\pi/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(1 + \tan^2(x)\right)^{-n}}_{= f(\psi(x))} \underbrace{\sqrt{n}(1 + \tan^2 x)}_{= \psi'(x)} \, \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (1 + \tan^2 x)^{-n+1} \, \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2(n-1)} \, \mathrm{d}x \;=\; \sqrt{n}\, I_{2n-2}.
\end{aligned}$$

5 - On déduit des calculs précédents les majorations suivantes

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}t = \sqrt{n}\, I_{2n-2},$$

et

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, \mathrm{d}t = \sqrt{n}\, I_{2n+1},$$

en utilisant le fait que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est positive sur $[0, +\infty[$. On en conclut que pour tout entier n non nul,

$$\sqrt{n}\, I_{2n+1} \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}. \tag{7}$$

Or $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, donc

$$I_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \quad \text{et} \quad I_{2n-2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

et par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, I_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, I_{2n+1} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

Copyrighted material

Hidden page

La fonction $u \times v$ admet pour limite 0 en 0^+ et en $+\infty$ donc

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^x \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, x t^{x-1} \,\mathrm{d}t = x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

On a donc établi que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Vérifions par récurrence que pour tout entier n non nul on a $\Gamma(n) = (n-1)!$. La relation est vraie pour $n = 1$ puisque

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!.$$

Supposons la relation vraie pour un entier n donné. On a alors

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

La récurrence est achevée.

3 - Considérons pour tout réel t strictement positif fixé, l'application $g_t : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto t^{x-1}$. Cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$g_t'' : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto (\ln t)^2\, t^{x-1}.$$

La dérivée seconde de g_t est donc une application positive. D'après la proposition 16.11, page 739, on peut en déduire que g_t est une application convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Vérifions maintenant que Γ est une application convexe sur R_+^*. On ne peut pas utiliser le même raisonnement que pour g_t car nous ne savons pas si Γ est dérivable et nous ne connaissons de toute façon pas sa dérivée. On revient donc à la définition de la convexité (définition 16.7 p. 737). Soient $\lambda \in [0,1]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, g_t(x) \,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, puisque g_t est convexe sur R_+^* on a

$$g_t(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\, g_t(x) + (1-\lambda)\, g_t(y).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, g_t(\lambda x + (1-\lambda)y) \,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left(\lambda\, g_t(x) + (1-\lambda)\, g_t(y)\right) \mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, g_t(x) \,\mathrm{d}t + (1-\lambda) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, g_t(y) \,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\, \Gamma(x) + (1-\lambda)\, \Gamma(y).
\end{aligned}$$

Copyrighted material

Hidden page

Les fonctions F et G sont paires puisque

$$F(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(-tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t = F(x)$$

$$G(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(-tx)}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = G(x).$$

2 - Supposons $x > 0$ et considérons le changement de variable défini par la bijection $\phi : t \in [0, +\infty[\longmapsto tx \in [0, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\phi(t))}{\phi(t)^2}\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = x\,F(1). \end{aligned}$$

On a donc $F(x) = |x|F(1)$ pour tout réel x positif. Par ailleurs $F(0) = 0 = 0 \times F(1)$. Puisque F est une application paire, on a pour $x < 0$,

$$F(x) = F(-\underbrace{(-x)}_{>0}) = F(-x) = -x\,F(1) = |x|\,F(1).$$

La relation est donc vraie pour tout réel x.

3 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, +\infty[$ on a

$$f_x(t) - g_x(t) = \frac{\sin^2(tx)}{t^2} - \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)} = \frac{\sin^2(tx)}{t^2}.$$

On en déduit, puisque $0 \leqslant \sin^2(tx) \leqslant 1$, que

$$0 \leqslant f_x(t) - g_x(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$$

puis, d'après la proposition 18.4, page 844, que

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \big(f_x(t) - g_x(t)\big)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ d'où l'encadrement

$$0 \leqslant F(x) - G(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Puisque $F(x) = |x|\,F(1)$, on a pour $x \in]0, +\infty[$

$$0 \leqslant 1 - \frac{G(x)}{xF(1)} \leqslant \frac{\pi}{2x\,F(1)}.$$

Copyrighted material

Hidden page

Copyrighted material

CHAPITRE 20

Équations différentielles linéaires

20.1 Définitions et terminologie

Beaucoup de problèmes physiques se ramènent à la recherche d'une fonction donnée de manière implicite par une relation la liant à ses dérivées successives. Une relation liant une fonction d'une variable réelle à ses dérivées est appelée ***équation différentielle***. Il est d'usage de noter y la fonction inconnue dans l'équation différentielle. On note habituellement t la variable réelle dont dépend la solution de l'équation différentielle (cette notation est justifiée par le fait que dans de nombreux problèmes physiques la solution de l'équation différentielle considérée est une fonction du temps). L'ordre de dérivation le plus élevé de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation différentielle est appelé ***ordre de l'équation différentielle***. D'une manière générale, une équation différentielle d'ordre n est de la forme

$$\text{(E)} \qquad F\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)\right) = 0$$

où F est une application définie sur une partie de $\mathbb{R}^{n+2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On appelle ***solution sur l'intervalle*** I de l'équation différentielle (E) toute application ϕ définie sur I, admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n sur I et dont les dérivées $\phi', \ldots, \phi^{(n)}$ vérifient

$$F\left(t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n-1)}(t), \phi^{(n)}(t)\right) = 0 \qquad \forall t \in I.$$

Exemple Selon la loi de Hooke[1], la force f requise pour allonger un ressort de ℓ mètres au-delà de sa longueur naturelle est donnée par $f(\ell) = k \times \ell$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$ est le coefficient d'élasticité du ressort. Si la position d'un corps de masse m suspendu au ressort est repéré sur un axe vertical orienté positivement vers le bas dont l'origine correspond à la position d'équilibre, le mouvement de celui-ci en fonction du temps t, après avoir été tiré vers le bas puis relâché, est donné par la fonction $t \longmapsto y(t)$ solution de l'équation différentielle

$$(\text{E}_1) \qquad y''(t) + \frac{k}{m}\, y(t) = 0.$$

[1] HOOKE, Robert (1635, Île de Wight - 1703, Londres).

Copyrighted material

Ici, l'équation différentielle est d'ordre 2 et on a

$$F : (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto x_4 + \frac{k}{m}\, x_2.$$

L'application $\phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \cos\left(\sqrt{k/m}\, t\right)$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_1) puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi''(t) + \frac{k}{m}\, \phi(t) = -\left(\sqrt{k/m}\right)^2 \cos\left(\sqrt{k/m}\, t\right) + \frac{k}{m} \cos\left(\sqrt{k/m}\, t\right) = 0.$$

Par un calcul analogue, on peut vérifier que toutes les fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 \cos\left(\sqrt{k/m}\, t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{k/m}\, t\right)$$

où C_1 et C_2 désignent deux constantes réelles, sont solutions de l'équation différentielle (E_1).

Par le terme ***solution générale*** d'une équation différentielle, on désigne un représentant de l'ensemble des solutions. L'une des solutions de l'équation différentielle sera appelée ***solution particulière***. On appelle ***courbes intégrales*** d'une équation différentielle les courbes représentatives des solutions de l'équation.

Les lois de la physique conduisent à considérer des équations différentielles, mais ces équations ne suffisent pas pour déterminer complètement la solution du problème physique. Pour choisir entre les différentes solutions d'une équation différentielle, il faut posséder d'autres données qui dépendent de la nature du problème, par exemple des ***conditions initiales***. Ainsi pour l'exemple précédent, la solution est déterminée si l'on impose qu'à l'instant initial $t = 0$ le ressort est tiré de 20 cm vers le bas puis relâché avec une vitesse ascensionnelle de 2 m/s. On a alors les conditions initiales $y(0) = 1/5$ et $y'(0) = -2$ et il existe une seule solution de l'équation différentielle (E_1) qui satisfait ces deux conditions initiales. Il s'agit de la fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{5} \cos\left(\sqrt{k/m}\, t\right) - 2\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{k/m}\, t\right).$$

Une équation différentielle est également caractérisée par son caractère linéaire ou non. L'équation différentielle $F\big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)\big) = 0$ est dite ***linéaire*** lorsque pour $t \in \mathbb{R}$ fixé,

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto F\big(t, x_1, \ldots, x_{n+1}\big)$$

est une forme linéaire (voir la définition 9.1, p. 355). Dans ce cas, l'équation différentielle est de la forme

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$$

où $a_0, \ldots, a_n$ et g sont des fonctions réelles d'une variable réelle. Les deux propriétés caractéristiques d'une équation différentielle linéaire sont :

Copyrighted material

1. l'équation est combinaison linéaire de la fonction inconnue y et de ses dérivées ;
2. les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ de la combinaison linéaire ne dépendent que de la variable t et pas de l'inconnue y.

Une équation différentielle linéaire d'ordre n est dite ***normalisée*** si $a_n = 1$.

Une équation différentielle qui n'est pas linéaire est dite ***non linéaire***. Par exemple, les équations

$$\big(1 + y(t)\big) \times y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^t, \quad y''(t) + \sin\big(y(t)\big) = 0, \quad y''(t) + y^2(t) = 0,$$

sont des équations différentielles non linéaires.

L'étude d'une équation différentielle inclut l'étude de l'existence d'une solution. Nous n'aborderons pas cet aspect. Pour les équations différentielles que nous étudierons, l'existence de solutions résultera de leurs calculs. Nous nous restreindrons dans ce cours à l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre et des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

20.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans l'étude théorique des équations différentielles linéaires du premier ordre que nous allons effectuer, nous considérerons des équations différentielles normalisées. Nous nous intéresserons d'abord aux équations différentielles homogènes (c'est-à-dire dont « le second membre » est nul) puis aux équations différentielles non homogènes. Cette démarche est également celle qui est suivie lors de la résolution effective d'une équation différentielle.

20.2.1 Normalisation d'une équation différentielle

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et α, β, γ trois applications continues de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'application α n'est pas identiquement nulle. L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(\mathrm{E}) \quad \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$$

admet pour forme ***normalisée*** l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(\mathrm{E}_n) \quad y'(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}y(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}.$$

L'équation différentielle (E) est définie pour tout $t \in I$ alors que l'équation différentielle (E_n) n'est définie que pour les valeurs de t pour lesquelles α ne s'annule pas. Si l'application α est de signe constant sur I, les deux équations sont définies sur I. Par contre si l'application α admet des zéros, l'équation différentielle (E_n) n'est pas définie sur tout l'intervalle I mais sur un sous-ensemble J de I. Remarquons que toute solution de l'équation (E) est solution

Copyrighted material

de l'équation (E_n) sur le sous-ensemble J de I où celle-ci est définie. Par contre, une fois déterminées les solutions de l'équation (E_n) sur J, se pose le problème de l'existence sur I d'une solution de l'équation (E).

Supposons, pour simplifier, que l'application $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ s'annule en une seule valeur t_0 (dans l'intérieur) de I, autrement dit, qu'il existe $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ tel que $\alpha(t_0) = 0$ et $\forall t \in I \setminus \{t_0\}\ \alpha(t) \neq 0$. Désignons par I_1 l'intervalle $]-\infty, t_0[\cap I$ et par I_2 l'intervalle $]t_0, +\infty[\cap I$. Le problème de l'existence d'une solution sur I à l'équation (E) consiste à étudier s'il existe une application ϕ continue sur I

1. dont la restriction à l'intervalle I_1 soit solution de l'équation différentielle (E_n) considérée sur I_1,
2. dont la restriction à l'intervalle I_2 soit solution de l'équation différentielle (E_n) considérée sur I_2,
3. qui soit dérivable en t_0.

On aura alors automatiquement $\alpha(t_0)\phi'(t_0) + \beta(t_0)\phi(t_0) = \gamma(t_0)$. En effet, d'après l'équation (E), on a

$$\phi'(t) = \frac{\gamma(t) - \beta(t)\phi(t)}{\alpha(t)} \qquad \forall t \in I \setminus \{t_0\}$$

et puisque $\alpha(t_0) = 0$, si $\gamma(t_0) - \beta(t_0)\phi(t_0) \neq 0$ alors ϕ ne serait pas dérivable en t_0 car on aurait

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I_k}} \phi'(t) = \pm\infty \qquad k \in \{1, 2\}.$$

Remarquons que l'on a aussi

$$\phi'(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\phi(t) \qquad \forall t \in I \setminus \{t_0\}.$$

Par conséquent, si les deux applications γ/α et β/α ont une limite quand t tend vers t_0 alors ϕ est dérivable en t_0 et fournit une solution de l'équation différentielle (E).

Exemple L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E_2) \quad 2t\,y'(t) + y(t) = 0$$

admet pour équation normalisée associée l'équation différentielle

$$(E_{2,n}) \quad y'(t) + \frac{1}{2t}\,y(t) = 0.$$

L'équation (E_2) est définie pour $t \in \mathbb{R}$ alors que l'équation $(E_{2,n})$ est définie pour $t \in \mathbb{R}^*$. On recherchera dans un premier temps les solutions de l'équation $(E_{2,n})$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$. On étudiera ensuite l'existence d'une fonction ϕ dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation $(E_{2,n})$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Démonstration L'application $t \longmapsto a(t)$ étant continue sur I, elle admet une primitive A sur I qui est une application continue sur I. L'application $t \longmapsto b(t)$ étant continue sur I, l'application $t \longmapsto b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ est également continue et admet donc une primitive B_1 sur I. Pour démontrer la proposition 20.2, il suffit, d'après le théorème 20.2, de montrer que l'application $y_1 : t \in I \longmapsto B_1(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E). Pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \left(B_1(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\right)' = B_1'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} - A'(t)B_1(t)\mathrm{e}^{-A(t)} \\ &= b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\mathrm{e}^{-A(t)} - a(t)B_1(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = b(t) - a(t)B_1(t)\mathrm{e}^{-A(t)}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$y_1'(t) + a(t)y_1(t) = b(t) - a(t)B_1(t)\mathrm{e}^{-A(t)} + a(t)B_1(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = b(t),$$

ce qui montre que l'application y_1 est bien une solution particulière de l'équation différentielle (E). □

Exemple Considérons à nouveau sur $]0, \pi/2[$ l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_4) \qquad y'(t) + \frac{y(t)}{\tan t} = 2\cos t.$$

On a $a : t \in]0, \pi/2[\longmapsto 1/\tan t$ et $b : t \in]0, \pi/2[\longmapsto 2\cos t$. Une primitive de a est

$$A(t) = \int a(t)\ \mathrm{d}t = \ln(\sin t)$$

et on en déduit que pour tout $t \in]0, \pi/2[$,

$$b(t)e^{A(t)} = 2\cos t\ \mathrm{e}^{\ln(\sin t)} = 2\cos t \sin t = \sin(2t).$$

Une primitive de $t \in]0, \pi/2[\longmapsto b(t)e^{A(t)}$ est

$$B_1 : t \in]0, \pi/2[\longmapsto -\frac{1}{2}\cos(2t).$$

On déduit de la proposition 20.2 que les solutions de (E_4) sont toutes les fonctions de la forme

$$y : t \in]0, \pi/2[\longmapsto \frac{\kappa}{\sin t} - \frac{\cos(2t)}{2\sin t}$$

où κ désigne un réel. Remarquons que $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$ et, par conséquent, que

$$\frac{\kappa}{\sin t} - \frac{\cos(2t)}{2\sin t} = \frac{\kappa - 1/2}{\sin t} + \sin t = \frac{C}{\sin t} + \sin t$$

où $C = \kappa - 1/2$ désigne un réel. On retrouve bien le même ensemble de solutions que celui obtenu dans l'exemple précédent.

Copyrighted material

Hidden page

où A désigne une primitive de a sur I. On peut se demander s'il existe une solution particulière de (E) de la forme

$$y_1(t) = C(t)\, g_0(t) \quad \text{pour tout } t \in I$$

où C est une application dérivable sur I. Dans ce cas, on disposerait d'un moyen commode pour calculer une solution particulière de l'équation différentielle (E) sans avoir à retenir le résultat de la proposition 20.2. Nous allons voir que (E) admet effectivement une telle solution particulière. Si $y_1 = C\, g_0$ est solution de (E), on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
& \forall t \in I \quad y_1'(t) + a(t)y_1(t) = b(t) \\
\iff \quad & \forall t \in I \quad \big(C(t)g_0(t)\big)' + a(t)C(t)g_0(t) = b(t) \\
\iff \quad & \forall t \in I \quad C'(t)g_0(t) + C(t)g_0'(t) + a(t)C(t)g_0(t) = b(t) \\
\iff \quad & \forall t \in I \quad C'(t)g_0(t) + C(t) \underbrace{\Big(g_0'(t) + a(t)g_0(t)\Big)}_{\text{nul car } g_0 \text{ sol. de } (\mathrm{E}_0)} = b(t) \\
\iff \quad & \forall t \in I \quad C'(t)g_0(t) = b(t) \\
\iff \quad & \forall t \in I \quad C(t) = \int \frac{b(t)}{g_0(t)}\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

car la fonction g_0 ne s'annule pas sur I. L'équation différentielle (E) admet donc bien une solution particulière de la forme $y_1 = Cg_0$ où

$$C(t) = \int \frac{b(t)}{g_0(t)}\, \mathrm{d}t = \int b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\, \mathrm{d}t = B_1(t) \qquad \forall t \in I.$$

On dispose ainsi d'un moyen calculatoire simple pour déterminer une solution particulière y_1 de (E) : on cherche une solution particulière de la forme

$$y_1 : t \in I \longmapsto C(t)\, g_0(t)$$

où la fonction inconnue $t \longmapsto C(t)$ est déterminée en exprimant que la fonction $t \longmapsto C(t)\, g_0(t)$ doit satisfaire l'équation différentielle (E) (comme cela a été fait dans les équivalences précédentes).

Cette méthode de calcul d'une solution particulière de (E) à partir de la solution générale de (E_0) est appelée **méthode de la variation de la constante**. Cette dénomination tire son origine du fait que si $y_0 : t \in I \longmapsto \kappa \mathrm{e}^{-A(t)}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, est la solution générale de l'équation différentielle homogène associée à (E), on cherche une solution particulière de l'équation (E) qui soit de la forme $y_1 : t \in I \longmapsto C(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)}$ où C est une application dérivable sur I. Formellement, on remplace la constante κ par une application dérivable C, autrement dit « on suppose que la constante κ varie en fonction de t ».

Nous détaillons dans l'exemple suivant la manière d'utiliser la méthode de la variation de la constante.

Copyrighted material

Exemple Considérons sur $]0, \pi/2[$ l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_4) \qquad y'(t) + \frac{y(t)}{\tan t} = 2\cos t.$$

Nous avons vu que la solution générale de l'équation homogène associée est

$$y_0 : t \in]0, \pi/2[\longmapsto \frac{\kappa}{\sin t}$$

où $\kappa \in \mathbb{R}$. Utilisons la méthode de la variation de la constante pour calculer une solution particulière de cette équation. On cherche une solution y_1, définie sur $]0, \pi/2[$, qui soit de la forme suivante :

$$y_1(t) = \frac{C(t)}{\sin t} \qquad \forall t \in]0, \pi/2[.$$

On a pour tout $t \in]0, \pi/2[$,

$$y_1'(t) = \frac{C'(t)\sin t - C(t)\cos t}{\sin^2 t} = \frac{C'(t)}{\sin t} - \frac{1}{\tan t}\frac{C(t)}{\sin t}.$$

Puisque y_1 est supposée être une solution particulière de l'équation (E_4), on doit avoir pour tout $t \in]0, \pi/2[$,

$$y_1'(t) + \frac{y_1(t)}{\tan t} = 2\cos t,$$

autrement dit la fonction C doit vérifier

$$\frac{C'(t)}{\sin t} - \frac{1}{\tan t}\frac{C(t)}{\sin t} + \frac{1}{\tan t}\frac{C(t)}{\sin t} = 2\cos t.$$

Pour que y_1 soit solution de l'équation différentielle (E_4), on doit donc avoir

$$C'(t) = 2\cos t \sin t \qquad \forall t \in]0, \pi/2[,$$

ce qui impose

$$C : t \in]0, \pi/2[\longmapsto \sin^2 t + K, \qquad K \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Puisqu'on est intéressé par une seule solution particulière, on choisit généralement $K = 0$. On a alors pour tout $t \in]0, \pi/2[$, $y_1(t) = C(t)/\sin t = \sin t$. Finalement, une solution particulière de l'équation différentielle est

$$y_1 : t \in]0, \pi/2[\longmapsto \sin t$$

et la solution générale est

$$y : t \in]0, \pi/2[\longmapsto \sin t + \frac{\kappa}{\sin t} \qquad \text{où } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Signalons qu'en pratique il est possible de simplifier notablement les calculs en conservant, sans l'expliciter, l'expression de la solution particulière y_1 en

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

variable pour une primitive (voir la proposition 18.13, p. 855) on a

$$\begin{aligned} C(t) &= \int \frac{\phi'(t)}{1-\phi^2(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right]_{x=\phi(t)} \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_{x=\phi(t)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right| \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right). \end{aligned}$$

On obtient donc pour solution particulière de l'équation (E_n) sur $]-\infty,-1[$ la fonction y_1 définie par

$$y_1(t) = \frac{C(t)}{\sqrt{-t}} = \frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right).$$

$\trianglerighteq$ *Recherche d'une solution particulière sur* $]-1,0[$.

On recherche une solution particulière de l'équation (E_n) sur $]-1,0[$ qui soit de la forme

$$y_1 : t \in]-1,0[\longmapsto C(t)g_0(t)$$

où $g_0 : t \in]-\infty,-1[\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{-t}}$ et C désigne ici une fonction dérivable inconnue. On est amené à faire un calcul analogue à celui effectué dans le cas précédent. On obtient que la fonction inconnue C doit donc avoir pour dérivée en $t \in]-1,0[$,

$$C'(t) = \frac{1}{2t(t+1)g_0(t)} = \frac{\sqrt{-t}}{2t(t+1)} = -\frac{1}{2\sqrt{-t}(1+t)}.$$

Pour obtenir l'expression de C il faut déterminer une primitive de

$$t \longmapsto -\frac{1}{2\sqrt{-t}(1+t)}.$$

Pour calculer cette primitive, considérons le changement de variable défini par $\phi : t \in]-1,0[\longmapsto \sqrt{-t}$. D'après la première formule de changement de variable pour une primitive on a

$$\begin{aligned} C(t) &= \int \frac{\phi'(t)}{1-\phi^2(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right]_{x=\phi(t)} \\ &= [\operatorname{argth} x]_{x=\phi(t)} = \operatorname{argth}(\sqrt{-t}). \end{aligned}$$

On obtient donc pour solution particulière de l'équation (E_n) sur $]-1,0[$ la fonction y_1 définie par

$$y_1(t) = \frac{C(t)}{\sqrt{-t}} = \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} = \frac{1}{2\sqrt{-t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}}\right).$$

Copyrighted material

Hidden page

$\trianglerighteq$ *Solution générale sur* $]0,+\infty[$.

La solution générale de l'équation (E_n) sur $]0,+\infty[$ est

$$y : t \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}} + \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \qquad \kappa_3 \in \mathbb{R}.$$

Étude des solutions de l'équation (E)

Les équations (E) et (E_n) ne sont pas équivalentes puisqu'elles n'ont pas le même domaine de validité. Une solution de (E), si elle existe, sera solution de (E_n) sur les trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. On a déterminé les solutions de l'équation (E_n) sur ces trois intervalles. Se pose maintenant la question de savoir si à partir des solutions de (E_n) sur les trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$ on peut trouver (construire) une solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$. Autrement dit : peut-on trouver une application ϕ définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que ϕ restreinte à $]-\infty,-1[$ soit solution de (E_n) sur $]-\infty,-1[$, ϕ restreinte à $]-1,0[$ soit solution de (E_n) sur $]-1,0[$ et ϕ restreinte à $]0,+\infty[$ soit solution de (E_n) sur $]0,+\infty[$?

Si une telle solution ϕ existe, elle est nécessairement de la forme :

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{\kappa_1}{\sqrt{-t}} + \dfrac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left(\dfrac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) & \text{pour } t \in]-\infty,-1[\\ \dfrac{\kappa_2}{\sqrt{-t}} + \dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} & \text{pour } t \in]-1,0[\\ \dfrac{\kappa_3}{\sqrt{t}} + \dfrac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{pour } t \in]0,+\infty[\end{cases}$$

où $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ désignent trois constantes réelles. Pour que cette fonction soit solution, il faut qu'elle soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Il nous faut donc regarder si elle est prolongeable par continuité en 0 et en -1 et si le prolongement ainsi défini est dérivable en 0 et en -1.

$\trianglerighteq$ *Étude du raccord en* 0.

On a $\arctan u \underset{0}{\sim} u$ et $\operatorname{argth} u \underset{0}{\sim} u$, donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{argth}\sqrt{-t}}{\sqrt{-t}} = 1.$$

Par ailleurs $t \longmapsto 1/\sqrt{|t|}$ n'est pas bornée en 0. On en déduit que ϕ est continue en 0 si, et seulement si, $\kappa_3 = \kappa_2 = 0$. Regardons maintenant la dérivabilité de ϕ en 0. On a

$$\Delta_0(h) = \frac{\phi(h)-\phi(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{\arctan(\sqrt{h}) - \sqrt{h}}{h^{3/2}} & \text{si } h > 0 \\ -\dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{-h}) - \sqrt{-h}}{(-h)^{3/2}} & \text{si } h < 0 \end{cases}.$$

Copyrighted material

On a le développement limité suivant à droite de 0

$$\frac{\arctan(u)-u}{u^3} = -\frac{1}{3} + o_{0^+}(u)$$

et on a le développement limité suivant à gauche de 0

$$\frac{\operatorname{argth}(u)-u}{u^3} = \frac{1}{3} + o_{0^-}(u).$$

On en déduit que

$$\lim_{h\to 0^+} \Delta_0(h) = \lim_{h\to 0^-} \Delta_0(h) = -\frac{1}{3}.$$

Par conséquent, la solution ϕ avec $\kappa_3 = \kappa_2 = 0$ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = -1/3$.

$\trianglerighteq$ *Étude du raccord en* -1.

La fonction ϕ ne peut pas être prolongée par continuité en -1 car quelle que soit la valeur de κ_3, elle n'est pas bornée en -1 puisque

$$\lim_{t\to -1^-} \ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right) = +\infty.$$

$\trianglerighteq$ *Conclusion.*

L'équation (E) admet des solutions sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$ qui sont respectivement les applications

$$t\in]-\infty,-1[\longmapsto \frac{\kappa_1}{\sqrt{-t}} + \frac{1}{2\sqrt{-t}} \ln\left(\frac{\sqrt{-t}+1}{\sqrt{-t}-1}\right)$$

$$t\in]-1,0[\longmapsto \frac{\kappa_2}{\sqrt{-t}} + \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}}$$

$$t\in]0,+\infty[\longmapsto \frac{\kappa_3}{\sqrt{t}} + \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

avec $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$.

Elle admet une unique solution sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ qui est

$$\phi : t\in]-1,+\infty[\longmapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}} & \text{si } t\in]-1,0[\\ \dfrac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t\in]0,+\infty[\end{cases}.$$

Elle n'admet pas de solution définie sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 2 *Résoudre l'équation différentielle* $ty'(t) + (3t+1)y(t) = \mathrm{e}^{-3t}$.

Copyrighted material

Hidden page

Équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients complexes constants

Considérons une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients complexes de la forme

$$(\mathrm{E}) \qquad y'(t) + ay(t) = 0 \qquad \text{où } a \in \mathbb{C}.$$

La solution est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_1(t) + \mathrm{i}y_2(t)$$

avec

$$y_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_1(t) \in \mathbb{R}, \qquad y_2 : t \in \mathbb{R} \longmapsto y_2(t) \in \mathbb{R}.$$

Désignons par γ la partie réelle de a et par β sa partie imaginaire et considérons l'application $\Psi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{at}y(t)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= \mathrm{e}^{\gamma t}\big(\cos(\beta t) + \mathrm{i}\sin(\beta t)\big) \times \big(y_1(t) + \mathrm{i}y_2(t)\big) \\
&= \mathrm{e}^{\gamma t}\Big(\cos(\beta t)y_1(t) - \sin(\beta t)y_2(t)\Big) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\gamma t}\Big(\sin(\beta t)y_1(t) + \cos(\beta t)y_2(t)\Big).
\end{aligned}$$

L'application Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= \gamma\mathrm{e}^{\gamma t}\Big(\cos(\beta t)y_1(t) - \sin(\beta t)y_2(t) + \mathrm{i}\sin(\beta t)y_1(t) + \mathrm{i}\cos(\beta t)y_2(t)\Big) \\
&\quad + \mathrm{e}^{\gamma t}\Big(-\beta\sin(\beta t)y_1(t) + \cos(\beta t)y_1'(t) - \beta\cos(\beta t)y_2(t) - \sin(\beta t)y_2'(t)\Big) \\
&\quad + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\gamma t}\Big(\beta\cos(\beta t)y_1(t) + \sin(\beta t)y_1'(t) + \beta\sin(\beta t)y_2(t) + \cos(\beta t)y_2'(t)\Big) \\
&= \gamma\mathrm{e}^{at}\Big(y_1(t) + \mathrm{i}y_2(t)\Big) + \mathrm{e}^{at}\Big(\mathrm{i}\beta y_1(t) + y_1'(t) - \beta y_2(t) + \mathrm{i}y_2'(t)\Big) \\
&= \mathrm{e}^{at}\Big(y_1'(t) + \mathrm{i}y_2'(t)\Big) + a\mathrm{e}^{at}\Big(y_1(t) + \mathrm{i}y_2(t)\Big) \\
&= \mathrm{e}^{at}\Big(y'(t) + ay(t)\Big).
\end{aligned}$$

Puisque y est solution de l'equation différentielle (E) on a $\Psi'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que l'application Ψ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ constante : il existe $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^{at}\, y(t) = \kappa \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On en conclut que la solution générale de l'equation différentielle (E) est

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto \kappa\mathrm{e}^{-at},$$

où κ désigne une constante complexe. On remarquera que les solutions sont de la même forme que celles trouvées dans le cas où a est un réel (voir le théorème 20.1) avec cette fois-ci une constante κ qui est complexe.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Mais là encore, une matrice n'est pas nécessairement diagonalisable dans $\mathbb{C}$. On est donc amené à considérer les cas suivants : le cas où la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Bien entendu, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors la solution du système différentiel (S_0) est réelle et, le cas échéant, le passage dans $\mathbb{C}$ pour diagonaliser la matrice et ainsi en déduire les solutions, est uniquement un artifice de calcul. On peut faire un parallèle avec la factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ où dans certains cas il est avantageux d'avoir recours à l'inclusion $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ pour établir, dans un premier temps, les résultats dans $\mathbb{C}[X]$, avant de les exprimer dans $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 20.3 (cas d'une matrice diagonalisable) *Soient* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice diagonalisable et* $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *les vecteurs propres de* A *associés respectivement aux valeurs propres (non nécessairement distinctes)* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. *La solution générale du système différentiel homogène* (S_0) *est la fonction* $t \in \mathbb{R} \longmapsto Y(t) \in \mathbb{K}^n$ *définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t) = \kappa_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \ldots + \kappa_n e^{\lambda_n t} U_n = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i e^{\lambda_i t} U_i$$

où $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{K}$ *sont des constantes scalaires.*

Démonstration D'après la définition 12.8 (voir p. 534), la matrice A étant supposée diagonalisable dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{K})$ telles que

$$D = P^{-1} A P$$

où les colonnes de P sont les vecteurs propres $U_1, \ldots, U_n$ de A associés respectivement aux valeurs propres (non nécessairement distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On a :

$$P = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ U_1 & \cdots & U_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Le système $Y'(t) = A\,Y(t)$ s'écrit encore

$$Y'(t) = P\,D\,P^{-1}\,Y(t),$$

autrement dit en multipliant à gauche par P^{-1} :

$$P^{-1}Y'(t) = DP^{-1}Y(t).$$

Le vecteur $X(t) = P^{-1}\,Y(t)$ est donc le vecteur solution recherché dans la base $(U_1, \ldots, U_n)$. Il vérifie

$$X'(t) = D\,X(t).$$

Copyrighted material

La matrice D étant diagonale, les composantes $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ du vecteur $\mathrm{X}(t)$ sont solutions des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

$$x_i'(t) - \lambda_i\, x_i(t) = 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

D'après les résultats de la section 20.2, on en déduit[(5)] que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$x_i(t) = \kappa_i\, \mathrm{e}^{\lambda_i t} \qquad \text{où } \kappa_i \in \mathbb{K}$$

et, par conséquent, que

$$\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} \kappa_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \kappa_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Finalement, la solution générale du système différentiel (S_0) est

$$\mathrm{Y}(t) = \mathrm{P}\,\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ \mathrm{U}_1 & \cdots & \mathrm{U}_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \kappa_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire : $\mathrm{Y}(t) = \kappa_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, \mathrm{U}_1 + \ldots + \kappa_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n t}\, \mathrm{U}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa_i\, \mathrm{e}^{\lambda_i t}\, \mathrm{U}_i.$ □

Remarque Même si on est conduit à considérer la matrice A dans $\mathbb{C}$ pour appliquer le théorème 20.3, si cette matrice est à coefficients réels, on pourra exprimer la solution comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ car les valeurs propres complexes d'une matrice à coefficients réels sont conjuguées deux à deux, de même que les vecteurs propres U_i qui leur sont associés (voir l'exemple ci-dessous).

Exemples

1. Considérons le système différentiel

$$(\mathrm{S}_1) \qquad \begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t) + 3y_2(t) \\ y_2'(t) &= 2y_1(t) + \ y_2(t) \end{cases}.$$

On vérifie aisément que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$. Les vecteurs propres associés à ces deux

(5) On utilise le théorème 20.1 si λ_i est une valeur propre réelle ou la proposition 20.5 si λ_i est une valeur propre complexe.

Copyrighted material

valeurs propres sont respectivement $\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. On en déduit que la solution générale du système (S_1) est

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\mathrm{e}^{-t}\mathrm{U}_1 + C_2\mathrm{e}^{4t}\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{-t} + 3C_2\mathrm{e}^{4t} \\ -C_1\mathrm{e}^{-t} + 2C_2\mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}$$

où C_1 et C_2 désignent deux constantes réelles. Ainsi

$$y_1(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + 3C_2\mathrm{e}^{4t} \quad \text{et} \quad y_2(t) = -C_1\mathrm{e}^{-t} + 2C_2\mathrm{e}^{4t}.$$

2. Considérons le système différentiel

$$(\mathrm{S}_2) \qquad \begin{cases} y_1'(t) &= ay_2(t) \\ y_2'(t) &= -ay_1(t) \end{cases}$$

où a est un réel non nul. La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres complexes distinctes $\lambda_1 = \mathrm{i}a$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}a$. Les vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres sont respectivement $\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$. La solution générale du système est donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\mathrm{U}_1 + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}\mathrm{U}_2 \\ &= C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}at} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at} \\ \mathrm{i}C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}at} - \mathrm{i}C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 désignent deux constantes complexes. Ainsi,

$$y_1(t) = C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}at} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at} \quad \text{et} \quad y_2(t) = \mathrm{i}C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}at} - \mathrm{i}C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}.$$

Remarquons que l'on peut exprimer y_1 et y_2 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (C_1 + C_2)\cos(at) + \mathrm{i}(C_1 - C_2)\sin(at) \\ y_2(t) &= -(C_1 + C_2)\sin(at) + \mathrm{i}(C_1 - C_2)\cos(at) \end{aligned}$$

de sorte que les deux applications $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{Z}_1(t) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{Z}_2(t) \in \mathbb{R}^2$ définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{Z}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(at) \\ -\sin(at) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(at) \\ \cos(at) \end{pmatrix}$$

forment aussi une base de l'espace vectoriel des solutions. Pour avoir toutes les solutions réelles du système différentiel (S_2), il suffit de considérer les fonctions

Copyrighted material

Hidden page

Remarques

1. Toutes les fonctions de la forme $t \longmapsto \sum_{i=1}^{p} \mathrm{e}^{\lambda_i t}\ R_i(t)$ ne sont pas solution. Il faut rechercher les solutions parmi les fonctions ayant cette forme.

2. Si la matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ n'a que des valeurs propres réelles, le résultat de la proposition 20.7 est valable dans $\mathbb{R}$. Par contre, si les valeurs propres de la matrice à coefficients réels A ne sont pas toutes réelles, il est nécessaire de se placer dans $\mathbb{C}$.

Exemple Considérons le système différentiel

$$(\mathrm{S}_3) \quad \begin{cases} x'(t) &= 2x - y + 2z \\ y'(t) &= 10x - 5y + 7z \\ z'(t) &= 4x - 2y + 2z \end{cases} .$$

La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ admet pour valeur propre double $\lambda_1 = 0$ et pour valeur propre simple $\lambda_2 = -1$. Un vecteur propre associé à λ_2 est $\mathrm{U}_2 = (1, -1, -2)^T$. Le sous-espace propre associé à λ_1 est de dimension 1 (il est engendré par le vecteur $(1, 2, 0)^T$) ; la matrice n'est donc pas diagonalisable.

Les solutions du système sont des fonctions de la forme

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 + c_1 \mathrm{e}^{-t} \\ a_2 t + b_2 + c_2 \mathrm{e}^{-t} \\ a_3 t + b_3 + c_3 \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ désignent des réels. On a

$$\mathrm{Y}'(t) = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \mathrm{e}^{-t} \\ a_2 - c_2 \mathrm{e}^{-t} \\ a_3 - c_3 \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 + c_1 \mathrm{e}^{-t} \\ a_2 t + b_2 + c_2 \mathrm{e}^{-t} \\ a_3 t + b_3 + c_3 \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} .$$

Copyrighted material

Par identification, on obtient le système linéaire formé des neuf équations que doivent satisfaire les réels $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ pour que Y soit solution du système différentiel $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a_1 - a_2 + 2a_3 & = & 0 \\ 10a_1 - 5a_2 + 7a_3 & = & 0 \\ 4a_1 - 2a_2 + 2a_3 & = & 0 \\ 2b_1 - b_2 + 2b_3 & = & a_1 \\ 10b_1 - 5b_2 + 7b_3 & = & a_2 \\ 4b_1 - 2b_2 + 2b_3 & = & a_3 \\ 2c_1 - c_2 + 2c_3 & = & -c_1 \\ 10c_1 - 5c_2 + 7c_3 & = & -c_2 \\ 4c_1 - 2c_2 + 2c_3 & = & -c_3 \end{array}\right. .$$

Ce système se scinde de manière évidente en trois sous-systèmes de trois équations à trois inconnues et sa résolution ne pose pas de difficulté. On obtient les relations suivantes : $a_3 = 0$, $a_2 = 2a_1$, le paramètre a_1 restant arbitrairement choisi ; $b_2 = 2b_1, b_2 = a_1$, le paramètre b_1 restant arbitrairement choisi ; et $c_2 = -c_1, c_3 = -2c_1$, le paramètre c_1 restant arbitrairement choisi. Finalement, les solutions sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & a_1 t + b_1 + c_1 \mathrm{e}^{-t} \\ y(t) & = & a_1(2t+1) + 2b_1 - c_1 \mathrm{e}^{-t} \\ z(t) & = & a_1 - 2c_1 \mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

où a_1, b_1 et c_1 sont trois constantes réelles.

20.3.3 Systèmes différentiels non homogènes

Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et B une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse au système différentiel non homogène

$$(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t) + \mathrm{B}(t)$$

dont le système différentiel homogène associé est le système

$$(\mathrm{S}_0) \qquad \mathrm{Y}'(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{Y}(t).$$

Commençons par énoncer un résultat fort utile dans la pratique puisqu'il permet, lorsque le second membre a une expression compliquée, de scinder la résolution du système en plusieurs problèmes aux seconds membres plus simples. Ce résultat est la généralisation dans le cas des systèmes différentiels de la proposition 20.3 concernant les équations différentielles.

Copyrighted material

Hidden page

Pour résoudre un système différentiel linéaire du premier ordre non homogène, on procédera donc comme pour une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène en recherchant la solution générale du système différentiel homogène et en l'ajoutant à une solution particulière (quelconque) du système non homogène. On peut là encore déterminer une solution particulière par la méthode de la variation de la constante. Nous ne justifierons pas cette affirmation dans le cas général. Nous nous contentons de donner un exemple d'utilisation de la méthode de la variation de la constante pour les systèmes différentiels. Bien entendu si une solution particulière évidente existe, on la retiendra pour appliquer le théorème 20.4 et on s'épargnera des calculs inutiles.

Exemple Considérons le système différentiel

$$(\mathrm{S}_4)\quad \begin{cases} x'(t) &= 2x(t) - y(t) + 2z(t) + te^t \\ y'(t) &= 10x(t) - 5y(t) + 7z(t) + \cos t \\ z'(t) &= 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) + t^2 \end{cases}.$$

Nous avons montré que le système homogène associé

$$(\mathrm{S}_3)\quad \begin{cases} x'(t) &= 2x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= 10x(t) - 5y(t) + 7z(t) \\ z'(t) &= 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

admettait pour solution générale

$$\begin{cases} x(t) &= at + b + ce^{-t} \\ y(t) &= a(2t+1) + 2b - ce^{-t} \\ z(t) &= a - 2ce^{-t} \end{cases}$$

où a, b et c sont trois constantes réelles. La méthode de la variation de la constante appliquée à ce système consiste à rechercher une solution particulière du système (S_4) qui soit de la forme

$$(\Sigma_1)\quad \begin{cases} x(t) &= a(t)t + b(t) + c(t)e^{-t} \\ y(t) &= a(t)(2t+1) + 2b(t) - c(t)e^{-t} \\ z(t) &= a(t) - 2c(t)e^{-t} \end{cases}$$

où a, b et c sont trois fonctions inconnues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$(\Sigma_2)\quad \begin{cases} x'(t) &= a(t) + a'(t)t + b'(t) + c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} \\ y'(t) &= 2a(t) + a'(t)(2t+1) + 2b'(t) + c(t)e^{-t} - c'(t)e^{-t} \\ z'(t) &= a'(t) - 2c'(t)e^{-t} + 2c(t)e^{-t} \end{cases}.$$

Puisque $(x, y, z)^T$ est solution du système (S_4), on doit avoir

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + 2z(t) + te^t \\ y'(t) = 10x(t) - 5y(t) + 7z(t) + \cos t \\ z'(t) = 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) + t^2 \end{cases}$$

Copyrighted material

ce qui impose, d'après (Σ_1) et (Σ_2), que les trois fonctions inconnues a, b et c doivent satisfaire

$$\begin{cases} a'(t)t + b'(t) + c'(t)\mathrm{e}^{-t} = t\mathrm{e}^t \\ a'(t)(2t+1) + 2b'(t) - c'(t)\mathrm{e}^{-t} = \cos t \\ a'(t) - 2c'(t)\mathrm{e}^{-t} = t^2 \end{cases}.$$

En résolvant ce système linéaire on obtient

$$\begin{cases} a'(t) = 3t^2 - 2\cos t + 4t\mathrm{e}^t \\ b'(t) = -t^2(3t+1) + (2t+1)\cos t - (4t+1)t\mathrm{e}^t \\ c'(t) = \mathrm{e}^t(t^2 - \cos t + 2t\mathrm{e}^t) \end{cases}.$$

Pour obtenir l'expression des trois fonctions inconnues a, b et c il suffit de calculer les primitives des fonctions définies dans les membres de droite. On obtient[(7)]

$$\begin{aligned} a(t) &= \int (3t^2 - 2\cos t + 4t\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t = t^3 - 2\sin t + 4(t-1)\mathrm{e}^t, \\ b(t) &= \int (-t^2(3t+1) + (2t+1)\cos t - (4t+1)t\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t \\ &= -t^3\left(\frac{3}{4}t + \frac{1}{3}\right) + 2\cos t + (2t+1)\sin t + \mathrm{e}^t(7t - 7 - 4t^2), \\ c(t) &= \int \mathrm{e}^t(t^2 - \cos t + 2t\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^t(t^2 - 2t + 2) - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^t(\cos t + \sin t) + \left(t - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2t}. \end{aligned}$$

Finalement, une solution particulière du système (S_4) est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 2t + 2\right) + \left(4t - \frac{15}{2}\right)\mathrm{e}^t + \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ y(t) = \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t - 2\right) + \left(9t - \frac{35}{2}\right)\mathrm{e}^t + \frac{9}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ z(t) = \left(t^3 - 2t^2 + 4t - 4\right) + (2t-3)\,\mathrm{e}^t + \cos t - \sin t \end{cases}.$$

On peut également établir des résultats généraux donnant la forme d'une solution particulière du système non homogène en fonction de la forme du second membre B. La proposition suivante, que nous admettons, indique sous quelle forme chercher une solution particulière lorsque le second membre est constitué d'un produit de fonctions trigonométriques, exponentielles et polynomiales.

[(7)] On vérifie, en utilisant une intégration par parties, que

$$\int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t, \qquad \int t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t^2 - 2t + 2)\mathrm{e}^t, \qquad \int t\cos t\,\mathrm{d}t = t\sin t + \cos t.$$

Par ailleurs, une double intégration par parties, permet d'établir que

$$\int \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)\mathrm{e}^t.$$

Copyrighted material

Hidden page

D'après le principe de superposition (voir la proposition 20.8) une solution particulière du système (S_4) est $Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t)$ où pour $i \in \{1,2,3\}$, Y_i est une solution particulière du système

$$(S_{4,i}) \quad Y'(t) = A\,Y(t) + B_i(t).$$

D'après la proposition 20.9, une solution particulière du système $(S_{4,1})$ est à rechercher sous la forme $Y_1(t) = e^t R(t)$ où R est un vecteur-colonne dont chacune des trois composantes est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus 1 (car 1 n'est pas valeur propre de A). Autrement dit, on recherche $Y_1(t)$ sous la forme

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t(\alpha_1 t + \beta_1) \\ e^t(\alpha_2 t + \beta_2) \\ e^t(\alpha_3 t + \beta_3) \end{pmatrix} \qquad \text{avec } (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2, \forall i \in \{1,2,3\}.$$

Une solution particulière du système $(S_{4,2})$ est à rechercher sous la forme $Y_2(t) = R_1(t)\cos t + R_2(t)\sin t$ où R_1 et R_2 sont des vecteurs colonnes dont chacune des trois composantes est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus 0 (car i n'est pas valeur propre de A). Autrement dit, on recherche $Y_2(t)$ sous la forme

$$Y_2(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}\cos t + \gamma_{12}\sin t \\ \gamma_{21}\cos t + \gamma_{22}\sin t \\ \gamma_{31}\cos t + \gamma_{32}\sin t \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \gamma_{i,j} \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\}, \forall j \in \{1,2\}.$$

Enfin, une solution particulière du système $(S_{4,3})$ est à rechercher sous la forme $Y_3(t) = R(t)$ où R est un vecteur colonne dont chacune des trois composantes est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus 4 car $\lambda = 0$ est valeur propre double de A. On détermine ensuite la valeur des différents réels inconnus par identification (on écrit que Y_i est solution du système $(S_{4,i})$ si, et seulement si, on a l'égalité $Y_i'(t) = A\,Y_i(t) + B_i(t)$) comme dans l'exemple donné en page 986.

Remarquons que la forme proposée pour rechercher une solution particulière est identique à la forme de la solution particulière obtenue par la méthode de la variation de la constante dans l'exemple précédent. En général, cette seconde méthode est plus rapide que la méthode de la variation de la constante.

20.3.4 Équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants une équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b(t)$$

où $a_k, k \in \{0,\ldots,n-1\}$, sont des réels et où b est une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

D'une manière générale, l'étude d'une telle équation différentielle se ramène à l'étude du système différentiel du premier ordre de dimension n

$$Y'(t) = AY(t) + B(t)$$

Copyrighted material

en posant

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Il est donc inutile de développer d'une manière générale un cadre théorique propre à ce type d'équation. Toutefois, on rencontre très fréquemment dans les applications issues de la physique des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Nous détaillons dans le paragraphe suivant les propriétés de ces équations différentielles.

20.4 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre non homogène à coefficients constants une équation différentielle de la forme

$$(\mathrm{E}) \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$$

où g est une application réelle définie sur un intervalle I et a, b sont deux réels.

Nous allons déduire des résultats généraux concernant les systèmes différentiels du premier ordre les propriétés de ce type d'équations. Introduisons la fonction inconnue $z = y'$. L'équation différentielle (E) s'écrit alors

$$z'(t) + az(t) + by(t) = g(t).$$

Ainsi, résoudre l'équation différentielle (E) revient à résoudre le système différentiel

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} y'(t) &= z(t) \\ z'(t) &= -az(t) - by(t) + g(t) \end{cases}$$

que l'on peut exprimer sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Copyrighted material

Hidden page

2. Si $\Delta = 0$, la matrice A possède pour valeur propre réelle double $\lambda = -a/2$. D'après la proposition 20.7, les solutions du système (S_0) sont

$$Y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} R_{1,1}(t) \\ R_{1,2}(t) \end{pmatrix}$$

où $R_{1,1}$ et $R_{1,2}$ sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Les solutions de l'équation (E_0) sont donc les fonctions

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\lambda t}(\kappa_1 t + \kappa_2)$$

où κ_1 et κ_2 désignent deux constantes réelles.

3. Si $\Delta < 0$, la matrice A possède deux valeurs propres complexes conjuguées λ_1 et λ_2 qui sont

$$\lambda_1 = \frac{-a + i\sqrt{4b - a^2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-a - i\sqrt{4b - a^2}}{2} = \overline{\lambda_1}.$$

La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et on vérifie aisément qu'une base de vecteurs propres est (U_1, U_2) où

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 20.3, on en déduit que les solutions du système (S_0) sont

$$Y(t) = \kappa_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \kappa_2 e^{\lambda_2 t} U_2 = \kappa_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \kappa_2 e^{\overline{\lambda_1} t} \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

où κ_1 et κ_2 désignent deux constantes complexes. Désignons par α la partie réelle de λ_1 et par β sa partie imaginaire. On a

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \kappa_1 e^{i\beta t} + \kappa_2 e^{-i\beta t} \\ \kappa_1 \lambda_1 e^{i\beta t} + \kappa_2 \lambda_2 e^{-i\beta t} \end{pmatrix} \\ &= (\kappa_1 + \kappa_2) \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ \alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{pmatrix} \\ &\quad + i(\kappa_1 - \kappa_2) \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ \beta e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'une autre base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{C}$ est formée des deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ \alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ \beta e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Sur $\mathbb{R}$, la première composante du vecteur $Y(t)$ a alors pour expression

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

où C_1 et C_2 désignent deux constantes réelles. Finalement, les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions réelles de la forme

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)),$$

où C_1 et C_2 désignent deux constantes réelles.

Copyrighted material

On a donc établi le résultat suivant.

Théorème 20.5 *Soient a et b deux réels. Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants*

$$(\mathrm{E}_0) \qquad y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

dépendent du signe du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$ de l'équation caractéristique

$$(\mathcal{C}) \qquad x^2 + ax + b = 0.$$

✗ *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$ admet deux solutions réelles distinctes r_1, r_2 et les solutions de (E_0) sont les applications*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

où A, B désignent deux constantes réelles.

✗ *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$ admet une unique solution réelle r_0 et les solutions de (E_0) sont les applications*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto (At + B)\, e^{r_0 t}$$

où A, B désignent deux constantes réelles.

✗ *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$ admet deux solutions réelles complexes conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\beta, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^*$ et les solutions de (E_0) sont les applications*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha t}\,(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$$

où A, B désignent deux constantes réelles.

Remarque Il résulte du théorème 20.5 que la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ est 2. On en déduit qu'il existe une unique solution à l'équation différentielle (E_0) vérifiant les conditions $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$ où α et β sont deux réels fixés.

Exercice 3 *Trouver la solution de l'équation différentielle proposée vérifiant les conditions données.*

1 - (E_1) $y''(t) - 2\sqrt{2}y'(t) + 2y(t) = 0$ *et* $y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$

2 - (E_2) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$ *et* $y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = 1.$

3 - (E_3) $y''(t) + y'(t) - 12y(t) = 0$ *et* $y(0) = 1,\ y'(0) = 4.$

Copyrighted material

20.4.2 Équation différentielle non homogène

Il résulte du théorème 20.4 que la solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre non homogène à coefficients constants

$$(\mathrm{E}) \quad y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = g(t)$$

est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène

$$(\mathrm{E}_0) \quad y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0$$

et d'une solution particulière de l'équation (E).

Cette solution particulière de l'équation (E) peut être une solution « évidente ». Le résultat suivant, qui est un corollaire de la proposition 20.8, peut alors être utile dans la quête d'une solution évidente.

Proposition 20.11 (principe de superposition) *Soient a, b deux réels et $g_1, \ldots, g_n$ des applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si y_k est une solution particulière de l'équation différentielle*

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = g_k(t)$$

alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t).$$

ATTENTION On prendra garde au fait que la méthode de la variation de la constante telle qu'elle a été présentée ici ne s'applique pas pour la recherche d'une solution particulière de l'équation (E). Cette méthode n'est valable que pour des équations ou des systèmes du premier ordre. Par contre, il est tout à fait licite de considérer le système différentiel (S) d'ordre 1 et de dimension 2 associé à l'équation du second ordre (E) et d'appliquer la méthode de la variation de la constante à ce système pour déterminer une solution particulière de (E).

Il est possible d'obtenir la forme d'une solution particulière de l'équation (E) dans les quelques cas particuliers usuels. Ces résultats découlent de manière directe de la proposition 20.9.

✗Si $g(t) = P(t)$ où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n, une solution particulière est de la forme $y(t) = Q(t)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré

- n si 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
- $n+1$ si 0 est racine simple de l'équation caractéristique ;
- $n+2$ si 0 est racine double de l'équation caractéristique.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

4. L'équation $y'(t) + \dfrac{t+2}{t}\, y(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^2}$ admet pour solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$y : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\mathrm{e}^t}{2t^2} + \kappa \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Elle admet pour solution générale sur $\mathbb{R}_-^*$

$$y : t \in \mathbb{R}_-^* \longmapsto \frac{\mathrm{e}^t}{2t^2} + \kappa \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

5. L'équation $y'(t) + y(t) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$ admet pour solution générale

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-t} \ln(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) + \kappa\, \mathrm{e}^{-t}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

6. L'équation $y'(t) = (10 - y(t))\, \mathrm{ch}\, t$ admet pour solution générale

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto 10 + \kappa\, \mathrm{e}^{-\mathrm{sh}\, t}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 2

L'équation (E) $ty'(t) + (3t+1)\, y(t) = \mathrm{e}^{-3t}$ admet pour équation normalisée

$$(\mathrm{E}_n) \quad y'(t) + \frac{3t+1}{t}\, y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{t}$$

qui doit être considérée sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

$\trianglerighteq$ Résolution de l'équation homogène associée.

L'équation (E_n) admet pour équation homogène associée,

$$(\mathrm{E}_0) \quad y'(t) + \frac{3t+1}{t}\, y(t) = 0.$$

$\triangleright$ Sur $]-\infty, 0[$.

L'application $a : t \in]-\infty, 0[\longmapsto \dfrac{3t+1}{t}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et admet pour primitive

$$A : t \in]-\infty, 0[\longmapsto 3t + \ln(-t).$$

L'équation (E_0) admet donc pour solution générale sur $]-\infty, 0[$

$$y_0 : t \in]-\infty, 0[\longmapsto \kappa \exp(-3t - \ln(-t)) = -\frac{\kappa}{t}\, \mathrm{e}^{-3t} \qquad \kappa \in \mathbb{R}$$

soit encore

$$y_0 : t \in]-\infty, 0[\longmapsto \frac{\widetilde{\kappa}}{t}\, \mathrm{e}^{-3t} \qquad \widetilde{\kappa} \in \mathbb{R}.$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

3 - L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (E_3) est

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

Elle admet deux racines réelles distinctes : 3 et -4. La solution générale de l'équation différentielle (E_3) sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{-4t} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Les valeurs des constantes A et B correspondant à l'unique solution vérifiant $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$ sont

$$A = \frac{8}{7} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{7}.$$

L'unique solution de l'équation différentielle (E_3) vérifiant $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$ est l'application

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{8}{7}e^{3t} - \frac{1}{7}e^{-4t}.$$

Solution de l'exercice 4

1 - L'équation caractéristique associée à l'équation homogène

$$(E_0) \quad y''(t) + y(t) = 0$$

est $x^2 + 1 = 0$. Elle admet pour solutions i et $-i$. On en déduit, d'après le théorème 20.5, que la solution générale de l'équation (E_0) est

$$y_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 \cos t + C_2 \sin t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2 - Considérons l'équation non-homogène

$$(E_1) \quad y''(t) + y(t) = \sin t.$$

Puisque i est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière qui soit de la forme $y_1(t) = A(t)\cos t + B(t)\sin t$ où A et B sont deux polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à 1. On a donc

$$y_1(t) = (a_1 t + a_2)\cos t + (b_1 t + b_2)\sin t, \quad \text{où } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

On vérifie que

$$y_1'(t) = (a_1 + b_1 t + b_2)\cos t + (b_1 - a_1 t - a_2)\sin t$$

et

$$y_1''(t) = (2b_1 - a_1 t - a_2)\cos t + (-2a_1 - b_1 t - b_2)\sin t.$$

On a donc

$$y_1''(t) + y_1(t) = 2b_1 \cos t - 2a_1 \sin t,$$

Copyrighted material

et y_1 est solution de (E_1) si

$$\begin{cases} 2b_1 &= 0 \\ -2a_1 &= 1 \end{cases}.$$

On en déduit qu'une solution particulière de (E_1) est $y_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{1}{2}t\cos t$. La solution générale de l'équation (E_1) est donc

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{1}{2}t\cos t + C_1\cos t + C_2\sin t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3 - Considérons l'équation non-homogène

$$(E_2) \quad y''(t) + y(t) = \sin 3t.$$

Puisque $3i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière qui soit de la forme $y_2(t) = A\cos t + B\sin t$ où A et B sont deux polynômes constants à coefficients réels. En utilisant la même méthode que celle qui vient d'être détaillée, on trouve pour solution générale de l'équation (E_2),

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto -\frac{1}{8}\sin 3t + C_1\cos t + C_2\sin t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4 - On linéarise l'expression $\sin^3 t$, par exemple en utilisant les formules de Moivre et d'Euler, (voir le chp. 4). On obtient,

$$\sin^3 t = -\frac{1}{4}\sin 3t + \frac{3}{4}\sin t.$$

D'après le principe de superposition (voir la proposition 20.11 p. 997) on en déduit que la solution générale de l'équation

$$(E) \quad y''(t) + y(t) = \sin^3 t$$

est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{32}\sin 3t - \frac{3}{8}t\cos t + C_1\cos t + C_2\sin t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 5

1 - L'équation homogène $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$ associée à l'équation différentielle (E_2) admet pour équation caractéristique

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Cette équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes : -2 et -1. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{-t} + Be^{-2t} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Copyrighted material

Hidden page

Par identification (deux polynômes sont égaux s'ils ont mêmes coefficients), il vient $a = 1$ (b pouvant être quelconque). On en déduit qu'une solution particulière de l'équation (E_2) est

$$y_1 : t \in \mathbb{R} \longmapsto te^{-t}.$$

La solution générale de l'équation différentielle (E_2) est donc

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{-t} + (t+B)e^{3t} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice 6

1 - Désignons par F une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto e^{\alpha t}\cos\beta t$. En intégrant par parties, on obtient pour $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int e^{\alpha t}\cos\beta t \, dt = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos\beta t + \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha t}\sin\beta t \, dt.$$

En intégrant une seconde fois par parties, il vient

$$F(t) = \int e^{\alpha t}\cos\beta t \, dt = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos\beta t + \frac{\beta}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin\beta t - \frac{\beta}{\alpha}\underbrace{\int e^{\alpha t}\cos\beta t \, dt}_{F(t)}\Big).$$

On en déduit que

$$F(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\Big(\alpha\cos\beta t + \beta\sin\beta t\Big).$$

2 - Dans le cas où $L = 0$, l'équation (E) devient

$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{\omega\nu}{R}\cos\omega t.$$

L'équation homogène associée admet pour solution

$$q_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \kappa e^{-t/(RC)}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète, on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution de la forme

$$q_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto \kappa(t)e^{-t/(RC)}.$$

On a $q_0'(t) = -\dfrac{\kappa(t)}{RC}e^{-t/(RC)} + \kappa'(t)e^{-t/(RC)}$ et en reportant dans l'équation différentielle, on obtient que la fonction κ doit satisfaire

$$\kappa'(t) = \frac{\omega\nu}{R}e^{t/(RC)}\cos\omega t.$$

Copyrighted material

D'après la question 1 (en prenant $\alpha = 1/RC$ et $\beta = \omega$), on en déduit que

$$\kappa(t) = \frac{\omega\nu C}{1+\omega^2R^2C^2}\,\mathrm{e}^{t/(RC)}\big(\cos\omega t + \omega RC\sin\omega t\big).$$

La solution de l'équation (E) sous l'hypothèse $L = 0$ est par conséquent

$$q : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\omega\nu C}{1+\omega^2R^2C^2}\,\mathrm{e}^{t/(RC)}\big(\cos\omega t + \omega RC\sin\omega t\big) + \kappa\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

L'unique solution vérifiant $q(0) = 0$ est obtenue pour $\kappa = -\dfrac{\omega\nu C}{1+\omega^2R^2C^2}$.

3 - Si $L \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation (E) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène

$$(\mathrm{E}_0) \quad Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0$$

est

$$Lx^2 + Rx + \frac{1}{C} = 0.$$

Sous l'hypothèse $R^2 - 4L/C > 0$, cette équation admet deux racines réelles distinctes qui sont

$$r_1 = \frac{-R+\sqrt{R^2-4L/C}}{2L} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-R-\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}.$$

On en déduit que la solution générale de l'équation (E_0) est

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{r_1t} + \mu\mathrm{e}^{r_2t} \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de l'équation (E) qui soit de la forme

$$q_1(t) = \delta\cos\omega t + \gamma\sin\omega t$$

où $(\delta,\gamma) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} & q_1'(t) = -\delta\omega\sin\omega t + \gamma\omega\cos\omega t \\ \text{et} \quad & q_1''(t) = -\delta\omega^2\cos\omega t - \gamma\omega^2\sin\omega t. \end{aligned}$$

Pour que q_1 soit solution de l'équation (E), il faut donc que

$$\left(\frac{\delta}{C} + R\omega\gamma - L\omega^2\delta\right)\cos\omega t + \left(\frac{\gamma}{C} - R\omega\delta - L\omega^2\gamma\right)\sin\omega t = \omega\nu\cos\omega t.$$

Les réels δ et γ doivent donc être solution de

$$\begin{cases} \left(1/C - L\omega^2\right)\delta + R\omega\gamma &= \omega\nu \\ -R\omega\delta + \left(1/C - L\omega^2\right)\gamma &= 0 \end{cases}.$$

Copyrighted material

Hidden page

L'application $t \in \mathbb{R}^* \longmapsto (\cos t)/t$ est Riemann intégrable sur l'intervalle fermé d'extrémité 1 et x, pour tout réel x strictement positif, puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. D'après la proposition 18.8 page 847, v est dérivable en tout réel x_0 de l'intervalle ouvert d'extrémités 1 et x et

$$v'(x_0) = -\frac{\cos x_0}{x_0}.$$

Finalement v est elle aussi dérivable sur $]0, +\infty[$.

3 - L'application $\phi : t \in \mathbb{R}^* \longmapsto \sin(t)/t$ prolongée par continuité en 0 en posant $\phi(0) = 1$ est Riemann intégrable sur l'intervalle fermé d'extrémités 1 et x, pour tout réel x strictement positif, puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc une intégrale de Riemann et

$$\lim_{x\to 0^+} u(x) = u(1) + \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = u(1) + \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4 - Pour tout réel x strictement positif, on a

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} v(x) + \ln x &= v(1) - \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puisque $1-\cos t \underset{0}{\sim} t^2/2$, on a $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{t} = 0$. L'application $\psi : t \in]0,1] \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t}$ est ainsi prolongeable par continuité en 0 en posant $\psi(0) = 0$. Elle est donc Riemann intégrable sur $[0,1]$ et par conséquent la limite à droite en 0 de la fonction $x \longmapsto v(x) + \ln x$ existe et vaut

$$\lim_{x\to 0^+} (v(x) + \ln x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On a

$$\frac{v(x)}{-\ln x} = \frac{v(x) + \ln x}{-\ln x} + 1.$$

Lorsque x tend vers 0, on vient de voir que $v(x) + \ln x$ tend vers une limite finie, donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{v(x) + \ln x}{-\ln x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{v(x)}{-\ln x} = 1.$$

Copyrighted material

On en déduit que $v(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$.

5 - On a montré que les applications u et v sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivables sur cet intervalle, de dérivées

$$u' : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto -\frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad v' : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto -\frac{\cos x}{x}.$$

Les deux fonctions u' et v' étant indéfiniment dérivables sur $]0, +\infty[$, on en déduit que les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et par conséquent que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Calculons les dérivées de f. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\cos x - u(x)\sin x - v'(x)\sin x - v(x)\cos x \\ &= -\frac{\sin x}{x}\cos x - u(x)\sin x + \frac{\cos x}{x}\sin x - v(x)\cos x \\ &= -u(x)\sin x - v(x)\cos x. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -u'(x)\sin x - u(x)\cos x - v'(x)\cos x + v(x)\sin x \\ &= \frac{1}{x} + v(x)\sin x - u(x)\cos x. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{x},$$

autrement dit que f est solution de l'équation différentielle (E).

On a

$$u(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t.$$

Il est donc clair que

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} v(x) = 0.$$

Puisque les fonctions sinus et cosinus sont bornées, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

6 - L'équation caractéristique associée à l'équation (E) est $x^2 + 1 = 0$. Elle admet deux racines complexes conjuguées i et $-i$. On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est

$$y_0 : t \in \mathbb{R} \longmapsto A\cos t + B\sin t, \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Copyrighted material

La fonction y_0 admettra une limite finie ℓ en $+\infty$ si et seulement si[9] pour toute suite $(t_n)_n$ tendant vers $+\infty$, la suite de terme général $y_0(t_n)$ tend vers ℓ. La suite de terme général $2\pi n$ tend vers $+\infty$. On a pour tout entier n, $y_0(2\pi n) = A$. La suite de terme général $\pi/2 + 2\pi n$ tend vers $+\infty$. On a pour tout entier n, $y_0(\pi/2 + 2\pi n) = B$. On en déduit que si $A \neq B$, la fonction y_0 ne peut avoir de limite en 0. Supposons donc que $A = B$. La suite de terme général $\pi/4 + 2\pi n$ tend vers $+\infty$. On a pour tout entier n, $y_0(\pi/4 + 2\pi n) = 2A/\sqrt{2}$. La suite de terme général $5\pi/4 + 2\pi n$ tend vers $+\infty$. On a pour tout entier n, $y_0(5\pi/4 + 2\pi n) = -2A/\sqrt{2}$. On en déduit que si $A \neq 0$, la fonction y_0 ne peut avoir de limite en 0. Si $A = B = 0$, cette limite vaut 0 car on a alors la fonction nulle.

Il est clair, d'après ce qui précède que f est une solution de (E) ayant une limite finie en $+\infty$. Supposons qu'il existe une seconde fonction g solution de (E) ayant une limite finie en $+\infty$. La fonction $f - g$ serait alors solution de l'équation homogène associée à (E) et aurait une limite finie en $+\infty$. D'après ce que l'on vient d'établir, la seule solution de l'équation homogène associée à (E) ayant une limite finie en $+\infty$ est la fonction nulle. Il existe donc une unique solution de (E) ayant une limite finie en $+\infty$. Puisque f vérifie cette propriété, l'unique solution est f.

7 - Pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) = u(x)\cos x - v(x)\sin x.$$

On a $v(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$ et $\sin x \underset{0^+}{\sim} x$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} v(x)\sin x = -\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$

Par ailleurs, lorsque x tend vers 0, $\cos x$ tend vers 1 et $u(x)$ admet une limite finie $u(0)$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = u(0).$$

---

[9] Voir la proposition 13.11 page 575.

Copyrighted material

Hidden page

Bibliographie

[1] J. Arnaudiès et H. Fraysse, *Cours de mathématiques (en 4 tomes)*, Collection *Sciences Sup*, Dunod, 1987.

[2] R. Brouzet et H. Boualem, *La planète r, voyage au pays des nombres réels*, Collection UniverSciences, Dunod, 2002.

[3] B. Calvo et A. Calvo, *Fonctions d'une variable, cours avec exemples et exercices corrigés*, Collection *DEUG*, Masson, 1997.

[4] A. Denmat et F. Héaulme, *Algèbre linéaire, travaux dirigés*, Dunod, 1999.

[5] J.P. Escofier, *Toute l'algèbre du premier cycle, cours et exercices corrigés*, Collection *Sciences Sup*, Dunod, 2002.

[6] D. Guinin et B. Joppin, *Mathématiques (en 4 tomes)*, Collection *Les nouveaux Précis Bréal*, Bréal, 1999.

[7] B. Hauchecorne et D. Suratteau, *Des mathématiciens de a à z*, Ellipses.

[8] J. Lelong-Ferret et J.M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques (en 4 tomes)*, Collection *Les Cours de référence*, Dunod, 1977.

[9] J.M. Monier, *Cours de mathématiques (en 7 tomes)*, Collection *J'intègre*, Dunod, 2003.

[10] H. Muller, *Mathématiques - méthodes, savoir-faire et astuces*, Collection *DEUG Sciences*, Bréal, 2003.

Copyrighted material

Copyrighted material

Index

Adhérence
  d'un ensemble, 112
  point d', 112
  valeur d', 187
Anneau, 64
  intègre, 69
Antécédent, 33
Application, 36, 37
  bijective, 44
  bornée, 565
  composée, 40, 561
  continue, 588
  contractante, 599
  convexe, 737
  croissante,décroissante, 563
  dérivable, 713
  de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$, 727
  identité, 38
  injective, 41
  intégrable, 836
  linéaire, 355
  lipschitzienne, 599
  majorée, minorée, 565
  monotone, 563
  réciproque, 44
  surjective, 42
Arc-cosinus, 651
Arc-sinus, 647
Arc-tangente, 653
Argument
  cosinus hyperbolique, 659
  d'un nombre complexe, 136
  principal, 136
  sinus hyperbolique, 656
Assertion, 3
  quantifiée, 12
Asymptote, 802
Automorphisme, 358

Base algébrique, 324
  de départ, d'arrivée, 407
Base canonique
  de $\mathbb{K}[X]$, de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, 325
Bertrand
  intégrale de, 928
Bijection, 44
Bissectrice, première, 600
Borné
  application, 565
  ensemble, 89
  suite, 173
Borne
  inférieure, 90, 95, 565
  supérieure, 90, 95, 565
Branche
  infinie, 802
  parabolique, 807

Césaro, convergence au sens de, 199
Cardinal d'un ensemble, 24
Cauchy
  critère de, 931
  suite de, 191
Centre, d'un intervalle, 109
Changement de bases
  pour un endomorphisme, 442
  pour un morphisme, 441
  pour un vecteur, 438
Coefficient
  binomial, 71
  d'un polynôme, 217
  d'un système, 487
  d'une matrice, 393
Combinaison linéaire
  d'une famille finie, 304
  d'une famille infinie, 304, 305
Compact, ensemble, 111
Comparaison locale, 640

Copyrighted material

Compatibilité d'un système, 497
Complémentaire d'un ensemble, 29
Composant d'un vecteur, 339, 520
Concavité, 741
Condition
  nécessaire, 12
  nécessaire et suffisante, 12
  suffisante, 7
Connecteur logique, 4
Continue
  à droite, 590
  à gauche, 590
  par morceaux, 843
  uniformément, 598
Continuité, 588
  uniforme, 598
Contractante, 599
Convergence
  au sens de Césaro, 199
  absolue, 938
  d'une intégrale, 918
  d'une suite, 168
  semi, 940
Convexe
  application, 737
  ensemble, 738
Coordonnées d'un vecteur, 324
Corps, 74
  algébriquement clos, 248
  des fractions rationnelles, 269
Cosinus hyperbolique, 642
Critère
  de Cauchy, 931
  de convergence absolue, 938
  de Riemann, 936, 937
Croissante
  application, 563
  suite, 181

Décomposition de Dunford, 540
Décroissante
  application, 563
  suite, 181
Dérivée, 713
  seconde, 725
  successives, 725
Déterminant, 474
  d'ordre 2, 467
  d'ordre 3, 471
  d'ordre n, 474
  d'un système 2×2, 460
  d'un système 3×3, 464
  d'une matrice d'ordre n, 477
Développement
  asymptotique, 797, 798
  de Taylor, 752
  limité, 773
  limité généralisé, 797
Degré d'un polynôme, 218
Densité, 107
Diagonale principale, 394, 395
Diagonalisation, 533
Diagramme
  cartésien d'une relation, 34
  de Venn d'un ensemble, 24
  sagittal d'une relation, 34
Différence d'ensembles, 28
Dimension, 329
Direction asymptotique, 807
Discontinuité (point de), 588
Discriminant d'un trinôme, 145
Distance, 104
Distributivité, 63
Divergence
  d'une intégrale, 918
  d'une suite, 168
Dividende (dans $\mathbb{K}[X]$), 224, 230
Diviseur (dans $\mathbb{K}[X]$), 224, 228, 230
Diviseur de zéro, 69
Division (dans $\mathbb{K}[X]$)
  euclidienne, 224
  puissances croissantes, 230
  puissances décroissantes, 228
Domaine
  de définition, 36
  de dérivabilité, 716
Dominée, 687
Données
  d'un système, 487
  d'une équation, 38
Droite vectorielle, 307, 311, 331

Échelle de comparaison, 809
Écriture

Copyrighted material

cartésienne (dans $\mathbb{C}$), 131
polaire (dans $\mathbb{C}$), 138
trigonométrique (dans $\mathbb{C}$), 136
Élément
absorbant, 66
d'un ensemble, 23
minimal, maximal, 89
neutre, 58
nilpotent, 69
propre
d'un endomorphisme, 515
d'une matrice, 523
simple, 278
symétrisable, symétrique, 58
unité, 67
zéro, 67
Endomorphisme, 358
diagonalisable, 533
nilpotent, 363, 419
trigonalisable, 541
Ensemble, 23
équipotent, 44
convexe, 738
de définition, 36
des parties d'un ensemble, 26
disjoint, 27
fermé, 110
fini, infini, 24
ouvert, 110
structuré, 56
vide, 24
Épigraphe, 739
Équation
algébrique, 238, 525
homogène, 490
impossible, 38
possible, 38
Équivalence, 6
de fonctions, 688
de suites, 702
Équivalent, 799
Espace
métrique, 104
Espace vectoriel, 297, 560
de dimension finie, infinie, 327
normé, 569
Exponentielle
complexe, 977
réelle, 633
Extension de loi, 57
Extractrice, 186
Extremum, 736

Famille
de vecteurs, 303
génératrice, 310, 316
liée, libre, 317, 319
Fermé, 110
Fonction, 35
en escalier, 832
monôme, 224
polynomiale, 224
spéciale, 874
Forme
bilinéaire, 465
canonique d'un trinôme, 145
linéaire, 355
multilinéaire, 473
trilinéaire, 467
Formule
de Stirling, 199
d'Euler, 138
d'intégration par parties, 860, 925
de Cramer, 494
de la moyenne, 871
de Leibniz, 726
de Maclaurin, 236, 753
de Moivre, 138
de primitivation par parties, 855
de quadrature, 885
de Taylor
à reste intégral, 873
pour les polynômes, 237
de Taylor-Lagrange, 750
de Taylor-Young, 778
de Viète, 245
du binôme de Newton, 98, 753
dans $\mathbb{C}$, 132
dans un anneau, 72
pour les matrices, 406
du changement de variable, 855, 858, 863, 922

Copyrighted material

du triangle de Pascal, 71
Fraction rationnelle, 270

Graphe d'une relation, 33
Groupe, 61
linéaire, 360
linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$, 429

Homéomorphisme, 858
Homomorphisme, 60
Hyperplan vectoriel, 331
Hypothèse de récurrence, 19

Image
d'un élément, 33
d'un ensemble, 37
d'une application, 37
d'une application linéaire, 365
Impaire, 562
Implication, 6
contraposée, 11
réciproque, 7
Impropre
intégrale, 917
Inégalité
de Cauchy-Schwarz, 101, 846
triangulaire, 102
Inconnue
d'un système, 487
d'une équation, 38
Indéterminée, 223
Indice de nilpotence
d'un endomorphisme, 363
d'une matrice carrée, 405
Infimum, 90
Injection, 41
Intégrable
au sens de Riemann, 836
localement, 917
Intégrale
convergente, 918
de Bertrand, 928
de Fresnel, 941
de Riemann, 836, 927
généralisée, 917, 918
impropre, 917
indéfinie, 847

Intégration
numérique, 883
par parties, 860
Intérieur, 111
Intersection
d'ensembles, 27
de sous-espaces vectoriels, 308
Intervalle, 109
centre, 109
Isomorphisme, 358

Limite
à gauche, à droite, 584
d'une application, 569
d'une suite, 168
inférieure, supérieure, 197
Lipschitzienne, 599
Localement intégrable, 917
Logarithme
de base a, 632
néperien, 629
Loi de composition externe
sur $\mathbb{K}[X]$, 220
sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, 397
Loi de composition interne, 56
sur $\mathbb{K}[X]$, 219, 221
sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, 397
sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, 403
Lois de Morgan
pour les assertions, 10
pour les ensembles, 30

Méthode
des zéros échelonnés, 333
Majoré
application, 565
ensemble, 89
suite, 173
Majorant, 89
d'une suite, 173
Matrice
égale, 395
élémentaire, 398
équivalente, 444
antisymétrique, 401
associée à une application linéaire, 407

Copyrighted material

carrée d'ordre n, 394, 395
colonne, 394, 395
de passage, 434
diagonale, 395, 534
diagonalisable, 534
identité d'ordre n, 394, 395
inverse, 425
inversible, 425
ligne, 394, 395
nilpotente, 405, 419
nulle, 394, 395
régulière, 425
rectangulaire, 393
semblable, 444
singulière, 425
symétrique, 401
transposée, 400
triangulaire, 396
trigonalisable, 541
Maximum, 736
Minimum, 736
Minoré
application, 565
ensemble, 89
suite, 173
Minorant, 89
d'une suite, 173
Module d'un nombre complexe, 134
Monôme, 218
Monotone
application, 563
suite, 181
Morphisme, 60
d'anneaux, de corps, 76
d'espaces vectoriels, 355
Multiplicité
d'un pôle, 273
d'une racine, 241, 273
d'une valeur propre, 527

Négligeable, 683
Nature
d'une intégrale généralisée, 918, 933
d'une suite, 168
Nombre
algébrique, 97
irrationnel, 97
rationnel, 87
transcendant, 97
Nombre complexe, 130
conjugué, 133
imaginaire pur, 131
unité imaginaire, 130
Norme, 569
Noyau d'une application linéaire, 365

Ordre de multiplicité
d'un pôle, 273
d'une racine, 241, 273
d'une valeur propre, 527
Ouvert, 110

Périodique, Période, 562
Pôle d'une fraction rationnelle, 273
Paire, Parité, 562
Partie, 25
entière, 104
génératrice, 312
libre, 321
Partie entière
d'une fraction rationnelle, 274
Pas (d'une subdivision), 831
Plan vectoriel, 311, 331
Point
adhérent, 112
d'accumulation, 112
d'inflexion, 741
de discontinuité, 588
fixe, 600
intérieur, 111
isolé, 112
Polynôme
caractéristique, 525
dérivé, 233
divisible, 228
formel, 217
générateur, 224
irréductible, 229
multiple, 228
normalisé, 218
nul, 217
premier, 229

Copyrighted material

réductible, 229
scindé, scindable, 245
unitaire, 218
Prédicat, 4
composé, 4
incompatible, 9
logiquement équivalent, 7
Primitive, 850
Principe du tiers-exclu, 3
Produit cartésien d'ensembles, 31
Projecteur, 364
Prolongement par continuité, 592
Propriété
d'Archimède, 96
des segments emboîtés, 190

Quadrature, 885
Quantificateur, 12
Quotient (dans $\mathbb{K}[X]$), 224
Quotient à l'ordre k (dans $\mathbb{K}[X]$), 230

Résidu à un pôle, 283
Règle
de L'Hôpital, 743
de Sarrus, 471
Racine
n-ième, 147
d'un réel, 105
de l'unité, 147
fonction, 627
primitive de l'unité, 153
d'un polynôme, 238
d'une fraction rationnelle, 273
deuxième, 142
simple, multiple, 241, 273
Raisonnement
par contraposée, 16
par contre-exemple, 19
par hypothèse auxiliaire, 16
par l'absurde, 17
par récurrence, 19
Rang, 167
d'un système, 491
d'une application linéaire, 375
d'une famille de vecteurs, 332
d'une matrice, 419
Rangée d'une matrice, 393
Rectangles, méthode des, 870
Relation, 33
d'ordre, 88
d'ordre total, 89
de Chasles, 844
Reste
dans $\mathbb{K}[X]$, 224, 230
de Taylor, 752
Riemann
critère, 936, 937
intégrale de, 927
somme, 868

Second membre
d'un système, 487
d'une équation, 38
Semi convergence, 940
Signature d'une permutation, 473
Singleton, 24
Sinus hyperbolique, 642
Solution
banale ou triviale, 490
d'un système, 487
d'une équation, 38
Somme
de Riemann, 868
de sous-espaces vectoriels, 339, 520
directe de sous-espaces vectoriels, 339, 520
Sous-ensemble, 25
Sous-espace propre, 519
Sous-espace vectoriel, 306
engendré, 310, 316
supplémentaire, 339, 520
Sous-famille de vecteurs, 303
Sous-suite, 186
Spectre d'une matrice, 523
Stationnaire, suite, 167
Stirling, 199
Subdivision
adaptée, 832
d'un intervalle, 831
Suite, 167
adjacentes, 185
arithmétique, 194

Copyrighted material

bornée, 173
convergente, 168
de Cauchy, 191
de Fibonacci, 306, 373
divergente, 168
extraite, 186
géométrique, 195
limite, 168
majorée, 173
minorée, 173
nature, 168
stationnaire, 167
Supremum, 90
Sur-famille de vecteurs, 303
Surjection, 42
Symétrie, 364
Symbole
de Kronecker, 395
Système
équivalent, 488
carré, 487
d'équations linéaires, 487
déterminé, indéterminé, 488
de Cramer, 493
de type (n, p) ou $n \times p$, 487
homogène, 487
rectangulaire, 487
sous/sur abondant, 487

Table de vérité, 5
Tangente hyperbolique, 642
Tautologie, 8
Terme d'une matrice, 393
Théorème
d'Abel, 940
d'encadrement, 179, 577
de Bolzano-Weierstrass, 189
de d'Alembert-Gauss, 248
de Grassmann, 343
de la base incomplète, 327
de Rolle, 729
des accroissement finis, 731
des accroissements finis généralisés, 742
des valeurs intermédiaires, 594
du rang, 376
Triangle de Pascal, 71, 72
Trigonalisation, 541

Uniforme continuité, 598
Union d'ensembles, 27

Valeur
absolue, 102, 715
d'adhérence, 187
moyenne, 871
propre
d'un endomorphisme, 515
d'une matrice, 523
simple, multiple, 527
Valuation d'un polynôme, 218
Vandermonde, 746
Vecteur
colinéaire, coplanaire, 322
d'un espace vectoriel, 297
générateur, 312
linéairement dépendant, 317
propre
d'un endomorphisme, 515
d'une matrice, 523
Voisinage, 110
au, 683
de l'infini, 113
sur un, 683

Zéro, 605

Copyrighted material

Copyrighted material

Copyrighted material

Copyrighted material

Hidden page

Copyrighted material

Copyrighted material

MATHÉMATIQUES

Algèbre et analyse

Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés

Cet ouvrage, réunissant en un tout cohérent algèbre et analyse, s'adresse de manière plus spécifique aux élèves de première année des cycles préparatoires intégrés des écoles d'ingénieurs mais peut être utilisé avec profit par les étudiants de DEUG scientifiques et d'IUT. Il est issu de l'enseignement dispensé par les auteurs dans la filière ASINSA qui est l'une des trois filières de premier cycle international de l'INSA de Lyon. A ce titre, il ne constitue pas seulement une somme de connaissances mathématiques de 1re année de l'enseignement supérieur mais vise à présenter de manière précise les résultats essentiels à une formation d'ingénieur généraliste.

L'ouvrage est divisé en 20 chapitres regroupés en 5 grandes parties: ensembles numériques fondamentaux, polynômes et fractions rationnelles, algèbre linéaire, calcul différentiel et calcul intégral. Chaque chapitre contient de courts exercices visant à tester la bonne compréhension des notions introduites et se termine par quelques exercices de synthèse. Une correction détaillée et commentée de tous les exercices est fournie en fin de chapitre. Quelques éléments biographiques de mathématiciens cités dans l'ouvrage y figurent également afin de mieux situer les résultats présentés dans leur contexte historique.

Stéphane Balac est professeur agrégé à l'INSA de Lyon. Il enseigne les mathématiques en premier cycle dans la filière classique et dans la filière ASINSA. Il est Docteur de l'Université de Rennes 1 et chercheur au laboratoire de Mathématiques Appliquées de Lyon. Ses recherches portent sur l'étude de méthodes numériques en électromagnétisme dans le cadre d'applications en imagerie médicale.

Frédéric Sturm est maître de conférences à l'INSA de Lyon. Il enseigne les mathématiques en premier cycle dans la filière ASINSA et l'analyse numérique en département. Il est Docteur de l'Université de Toulon et du Var et chercheur au laboratoire de Mathématiques Appliquées de Lyon. Ses recherches portent sur la résolution mathématique et numérique de problèmes de propagation d'ondes acoustiques dans des milieux multicouches.

ISBN 2-88074-558-6

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Copyrighted material